非アルキメデス的関数解析における自己共役コンパクト作用素のスペクトル分解

東北大学大学院 理学研究科 数学専攻
石塚康介 (Kosuke Ishizuka) *

概要

古典的な関数解析において, ヒルベルト空間上の自己共役コンパクト作用素のスペクトル分解定理は有名な定理である. この定理の非アルキメデス的関数解析における類似を考えた際に問題になることは, 「直交作用素」が存在するかということである. 一般にそのような作用素は存在しないが, Narici と Beckenstein によって剰余体が実体である場合は「内積」が良い性質をもつことが分かり, 「直交作用素」の存在が示された. 本稿では, 剰余体が実体である場合の自己共役コンパクト作用素について得られた結果を紹介する.

1 導入

非アルキメデス的関数解析とは, 係数体が (完備) 非アルキメデス的付値体であるような関数解析のことをいう. ここで, 非アルキメデス的付値体とは強三角不等式と呼ばれる次の不等式

$$|x+y| \leq \max(|x|, |y|)$$

を満たす体のことであった. 特に三角不等式を満たすため, 古典的な場合 (係数体が実数体, 複素数体である関数解析) と同様に, 開写像原理, 一様有界性原理などは非アルキメデス的関数解析においても成り立つ. しかし, いつでも古典的な結果が成立するわけではなく, 例えばハーン-バナッハの定理は成り立たないことが知られている. このような事情から, 非アルキメデス的関数解析の研究では, 古典的な概念と類似した概念を, まず定義し, そして古典的な場合との違いを調べるということが一つのテーマとなる.

本稿では古典的なヒルベルト空間上の自己共役コンパクト作用素のスペクトル分解定理に注目する. 非アルキメデス的関数解析においてこの定理の類似を考える際に, 大きく分けて 2 つの問題が生じる. まず, コンパクト作用素を非アルキメデス的関数解析においてどのように定義するかという問題である. 非アルキメデス的付値体は一般に局所コンパクトでないため古典的なコンパクト作用素の定義は機能しないことがわかる. そこで, Gruson と van der Put によって導入されたコンパクトイドを用いてコンパクト作用素の類似であるコンパクトイド作用素が定義される. コンパクトイド作用素についてはセクション 3 で詳しく述べる. もう 1 つ問題になることは, 非アルキメデス的関数解析においてヒルベルト空間とは何であるかということである. 実は非アルキメデス的関数解析におい

* E-mail:kosuke.ishizuka.r7@dc.tohoku.ac.jp

て, 「良い直交性」を持つ無限次元空間は存在しないことが知られている. よって, 古典的なヒルベルト空間に完全に対応する概念は存在しないのだが, ヒルベルト空間の類似物としてセクション 4 で数列空間 c_0 を導入する. c_0 においては, 自己共役であるという概念を考えることができ, 更に, Narici と Beckenstein によって, 剰余体が実体である場合には古典的なヒルベルト空間に類似した性質を持つことが知られている. 最後にセクション 5, 6 にて本研究で得られた結果を紹介する.

2 準備

本セクションでは本稿で用いる記号を整備する.

K は非自明な付値 $|\cdot|: K \to [0,\infty)$ による, 完備非アルキメデス的付値体とする. $B_K := \{x \in K : |x| \leq 1\}$ によって K の整数環, k によって K の剰余体を表す. バナッハ空間は常に K 上のバナッハ空間を考えることにする. ここでバナッハ空間のノルム $\|\cdot\|$ は強三角不等式

$$\|x+y\| \leq \max(\|x\|, \|y\|)$$

を満たすとする.

$(E, \|\cdot\|), (F, \|\cdot\|)$ をバナッハ空間とするとき, $\mathcal{L}(E,F)$ によって, E から F への有界作用素全体の集合を表す. また, $T \in \mathcal{L}(E,F)$ に対して, $\|T\| := \sup_{x\neq 0}\|T(x)\|/\|x\|$ によって $\mathcal{L}(E,F)$ 上のノルムを定める. $E = F$ であるときは, $\mathcal{L}(E,E)$ を $\mathcal{L}(E)$ で表し, $I \in \mathcal{L}(E)$ を E 上の恒等作用素とする.

$T \in \mathcal{L}(E)$ に対して, T のスペクトル集合を $\sigma(T) := \{\lambda \in K : \lambda I - T$ が可逆でない $\}$ と定め, $\sigma_p(T) := \{\lambda \in K : \mathrm{Ker}(\lambda I - T) \neq 0\}$ を T の固有値の集合とする. これらは全て K 上で考えていることに注意せよ. 実際 K が代数閉体であってもスペクトル集合が空である場合がある.

3 コンパクトイド作用素

本セクションでは (プレ) コンパクト性の類似物であるコンパクトイドを導入し, コンパクトイド作用素を定義する. そして, 既に知られている性質について述べる.

定義 3.1. バナッハ空間 $(E, \|\cdot\|)$ の部分集合 A がコンパクトイドであるとは, 任意の $r > 0$ に対して, 有限個の元 $a_1, \cdots, a_n \in E$ が存在して,

$$A \subseteq B_E(0,r) + B_K a_1 \cdots + B_K a_n$$

が成り立つときにいう. ここで, $B_E(0,r) := \{x \in E : \|x\| \leq r\}$ である.

注意 3.2. K が局所コンパクトであるときは, コンパクトイドはプレコンパクトと同値である.

コンパクトイドが定義されたことにより, コンパクト作用素の類似物であるコンパクトイド作用素が定義される.

定義 3.3. $(E, \|\cdot\|), (F, \|\cdot\|)$ をバナッハ空間として, $T \in \mathcal{L}(E,F)$ がコンパクトイド作用素であるとは, $T(B_E(0,1))$ がコンパクトイドであるときにいう.

古典的な場合, ヒルベルト空間上のコンパクト作用素は, 像が有限次元であるような作用素で近似されるのであった. 非アルキメデス的関数解析においては, この結果がいつでも成り立つ.

定理 3.4 ([7, Theorem 4.39])**.** $T \in \mathcal{L}(E,F)$ がコンパクトイド作用素であることと, 像が有限次元である作用素の列 $T_1, T_2, \cdots \in \mathcal{L}(E,F)$ で $\lim_{n\to\infty} \|T - T_n\| = 0$ を満たす列が存在することは同値である.

一般に K が代数閉体であっても, スペクトル集合が空である場合があるが, コンパクトイド作用素に対しては古典的な結果と同様に次の 2 つの定理が成り立つ.

定理 3.5 ([6, Theorem 6.14])**.** K を代数閉体, $T \in \mathcal{L}(E)$ をコンパクトイド作用素とする. このとき,

$$\sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(T)\} = \lim_{n\to\infty} \|T^n\|^{1/n}$$

が成り立つ.

定理 3.6 ([6, Corollary 3.3, Theorem 5.6])**.** $T \in \mathcal{L}(E)$ をコンパクトイド作用素作用素とする. このとき次が成り立つ.
(1) $\lambda_1, \lambda_2, \cdots \in \sigma(T)$ をそれぞれ相異なる元とすると, $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = 0$ である.
(2) $\lambda \in \sigma(T), \lambda \neq 0$ とすると $\lambda \in \sigma_p(T)$ である.
(3) $\lambda \in \sigma(T), \lambda \neq 0$ とすると $\mathrm{Ker}(\lambda I - T)$ は有限次元である.

4　ヒルベルト空間と内積

本セクションでは数列空間 c_0 を導入し, c_0 上の内積についての性質を紹介する.

古典的なヒルベルト空間の非アルキメデス的関数解析における類似物を考えたいのだが, 古典的な場合と同様に「良い直交性」を持つ無限次元空間は存在しないことが知られている ([5, Theorem 2.4.5]). そこで代替物として数列空間 c_0 を導入する. c_0 の定義は次の通りである:

$$c_0 := \{x := (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in K^{\mathbb{N}} : \lim_{n\to\infty} x_n = 0\},$$
$$\|x\| := \max_n |x_n|,\ x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in c_0.$$

上に定めたノルム $\|\cdot\|$ によって c_0 をバナッハ空間とみなす. 次の定理は数列空間が基本的な空間であることを示すものである.

定理 4.1 ([5, Corollary 2.3.9])**.** 有限次元でない可算型であるバナッハ空間 $(E, \|\cdot\|)$ は, $(c_0, \|\cdot\|)$ とバナッハ空間として同型である (等長的であるとは限らない). ここで, $(E, \|\cdot\|)$ が可算型であるとは, 抽象的なベクトル空間としての次元が高々可算である稠密部分空間が存在するときにいう.

c_0 上には自然な内積を考えることができる. すなわち, $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}, y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in c_0$ に対して, $\langle x, y\rangle := \sum_n x_n y_n$ と定めるのである. ヒルベルト空間は内積を通して双対空間と同一視されたが, c_0 はそうでないことに注意せよ.

内積を用いることで c_0 上に共役作用素を定義することができる.

定義 4.2. $T \in \mathcal{L}(c_0)$ が共役作用素を持つとは, $S \in \mathcal{L}(c_0)$ が存在して, 任意の $x, y \in c_0$ に対して $\langle T(x), y\rangle = \langle x, S(y)\rangle$ が成り立つときにいう．このような S は T に対して一意に定まるので T^* と書いて, T の共役作用素という．また T が共役作用素を持ち, $T = T^*$ であるとき, T は自己共役作用素であるという．

古典的なヒルベルト空間においては,「直交」という概念が重要な役割を果たしたため, c_0 上の内積についても「直交」に注目してみる．そこで, c_0 の部分集合 X に対して, $X^\perp := \{x \in c_0 :$ 任意の $y \in X$ に対して $\langle x, y\rangle = 0\}$ と定めることにする．また, $x, y \in c_0$ に対して $\langle x, y\rangle = 0$ であるとき $x \perp y$ と書き, x と y は直交しているという．ここで問題になることが, 閉部分空間 $M \subseteq c_0$ に対して $M \cap M^\perp = 0$, $M + M^\perp = c_0$ という性質が成り立つとは限らないことである．そこで, Narici と Beckenstein は剰余体 k に実体であるという仮定を課すことで, 内積がより良い性質をもつことを発見した．実体の定義は以下の通りである．

定義 4.3. 体 F が実体であるとは, 任意の $n \in \mathbb{N}$ と, 任意の $a_1, a_2, \cdots, a_n \in F$ に対して, $a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 = 0$ ならば, $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$ が成り立つときにいう．

本稿ではこれ以降, K の剰余体 k は**実体**であると仮定する．

定理 4.4 ([4, Theorem 3.1, Theorem 6.1])**.** k が実体であるとき,
(1) 任意の $x \in c_0$ に対して, $\|x\| = |\langle x, x\rangle|^{1/2}$,
(2) $x, y \in c_0$ が直交するならば, $\|x + y\| = \max(\|x\|, \|y\|)$,
が成り立つ．

定理 4.4 により, 閉部分空間 $M \subseteq c_0$ に対して $M \cap M^\perp = 0$ が成立する．しかし, どのような K であっても, $M + M^\perp \neq c_0$ を満たす $M \subseteq c_0$ の存在が知られている．そこで, $M + M^\perp = c_0$ となる条件を考える．

定義 4.5 ([1, Definition 6])**.** $P \in \mathcal{L}(c_0)$ が直交作用素であるとは, P が自己共役作用素であって, $P^2 = P$ が成り立つときにいう．

定理 4.6 ([1, Corollary 3])**.** 閉部分空間 M に対して, $M + M^\perp = c_0$ であることと, 直交作用素 $P \in \mathcal{L}(c_0)$ で $\mathrm{Im}P = M$ を満たすものが存在することは同値である．またこのような P は存在するならば一意である．

M が有限次元である場合は, $M + M^\perp = c_0$ であることが知られている．もっと詳しいことについては [4] を参照せよ．

定理 4.7 ([4, Corollary 8.2])**.** 閉部分空間 $M \subseteq c_0$ が有限次元である場合は, $M + M^\perp = c_0$ である．

最後に本研究で必要な定理を述べて, このセクションを終える．

定理 4.8. $T \in \mathcal{L}(c_0)$ を自己共役作用素とする． このとき, $\|T^2\| = \|T\|^2$ である． よって, $\lim_{n\to\infty} \|T^n\|^{1/n} = \|T\|$ を満たす．

5 主結果

本セクションでは, 主結果を述べる. K の剰余体 k は実体であるという仮定をもう一度注意しておく. まず, 目標となることは自己共役コンパクトイド作用素のスペクトル分解定理である. この定理について述べる前に, 実体 F に対して条件 $(\mathrm{H})_F$ を次のように定める.

$$(\mathrm{H})_F : \text{任意の } n \in \mathbb{N}, \text{対称行列 } A \in \mathcal{M}_n(F) \text{ に対して } A \text{ は } F \text{ 上で対角化可能である.}$$

ここで, $\mathcal{M}_n(F)$ は F 上の n 次行列全体の集合である.

定理 5.1. K が $(\mathrm{H})_K$ を満たすことと, 任意の自己共役コンパクトイド作用素 $T \in \mathcal{L}(c_0)$ が

$$\|T\| = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(T)\}$$

を満たすことは同値である.

この定理により, 次のスペクトル分解定理の類似を得る.

定理 5.2. K が $(\mathrm{H})_K$ を満たし, $T \in \mathcal{L}(c_0)$ を自己共役コンパクトイド作用素とする. このとき, 互いに直交するベクトルの列 $x_1, x_2, \cdots \in c_0$ と $(\lambda_n) \in c_0$ が存在して, 任意の $x \in c_0$ に対して

$$T(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda_n P_n(x)$$

が成り立つ. ここで, P_n は x_n が生成する 1 次元部分空間の上への直交作用素である.

注意 5.3. この定理は, [2, Theorem 4.3] を直したものである. [2, Theorem 4.3] の証明は Fifth step が間違っている. またこの定理が成り立つには条件 $(\mathrm{H})_K$ が必要であることは明らかであるが, 参考文献では K に対角化に関する条件を仮定していないこともおかしいのである. 加えて [3, Theorem 10] も [2, Theorem 4.3] と同様の証明であるため間違っているが, 本研究の手法により正しい証明を与えることができる.

次に条件 $(\mathrm{H})_F$ について調べる. F を実体として, $U \in \mathcal{M}_n(F)$ が ${}^tUU = I$ を満たすとき, U を直交行列と呼ぶことにする. まず次の命題が成り立つ.

命題 5.4. 実体 F が条件 $(\mathrm{H})_F$ を満たすことは, 任意の $n \in \mathbb{N}$, 対称行列 $A \in \mathcal{M}_n(F)$ に対して, A が F 上の直交行列で対角化可能であることと同値である.

この命題や, 様々な定理を用いることで次の定理を得る.

定理 5.5. 体 K が条件 $(\mathrm{H})_K$ を満たすことは, 剰余体 k が条件 $(\mathrm{H})_k$ を満たすことと同値である.

6 定理 5.1, 5.2 の証明の概略

本セクションでは定理 5.1, 5.2 の証明の概略について述べる. 基本になることは古典的な作用素解析のようなものである. $T \in \mathcal{L}(c_0)$ を自己共役コンパクトイド作用素として T の行列表示を

$(a_{i,j})_{i,j\in\mathbb{N}}$ とする．すなわち, 任意の $j\in\mathbb{N}$ に対して, $T(e_j)=\sum_i a_{i,j}e_i$ を満たすとする．ここで, $e_j\in c_0$ は j 成分が 1 でそれ以外の成分が 0 であるベクトルである．任意の $n\in\mathbb{N}$ に対して $T_n\in\mathcal{L}(c_0)$ を次のように定める．

$$T_n(e_j):=\begin{cases}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}a_{i,j}e_i & ;(1\le j\le n)\\ 0 & ;(n+1\le j)\end{cases}.$$

このとき T_n は n 次対称行列から定まる作用素である．

さて, $r\in|K|$, $r\neq 0$ を

$$B_K(0,r)\subseteq\{\lambda\in K: I-\lambda T \text{ は可逆である }\}$$

を満たす任意の元とする．このとき, [6, Proposition 6.12] より $M_r:=\sup_{|\lambda|\le r}\|(I-\lambda T)^{-1}\|<\infty$ である．[6] では便宜上 K が代数閉体であることを課しているがこの命題にはその仮定が必要ない．$\lambda\in B_K(0,r)$ に対して 簡単な計算により

$$\begin{aligned}I-\lambda T_n&=(I-\lambda T)(I+(I-\lambda T)^{-1}\lambda(T-T_n)),\\ \|(I-\lambda T)^{-1}\lambda(T-T_n))\|&\le rM_r\|T-T_n\|\end{aligned}$$

が成り立つ．ここで　T が自己共役コンパクトイド作用素であることから, $\lim_{n\to\infty}\|T-T_n\|=0$ であるので, 十分大きい $n\in\mathbb{N}$ に対しては,

$$B_K(0,r)\subseteq\{\lambda\in K: I-\lambda T_n \text{は可逆である }\}$$

が成り立つ．よって $(\mathrm{H})_K$ より, このような $n\in\mathbb{N}$ に対して, $(I-\lambda T_n)^{-1}$ は $B_K(0,r)$ 上解析的である．更に,

$$\|(I-\lambda T)^{-1}-(I-\lambda T_n)^{-1}\|\le r(M_r)^2\|T-T_n\|$$

が成り立つので, $(I-\lambda T)^{-1}$ も $B_K(0,r)$ 上解析的である．r が任意であったことから, K の付値が稠密である場合は,

$$\lim_{n\to\infty}\|T^n\|^{1/n}=\sup\{|\lambda|:\lambda\in\sigma(T)\}$$

を得る．そして, 定理 4.8 より定理 5.1 が導かれる．また, K の付値が離散的である場合は, $\pi\in B_K$ を極大イデアルを生成する元としたとき,

$$\|T\|\le|\pi|^{-1}\sup\{|\lambda|:\lambda\in\sigma(T)\}$$

を得る．これらの事実を用いて定理 5.2 を示すことができる．その結果として K の付値が離散的である場合も, 定理 5.1 が示される．では定理 5.2 の証明の概略を述べる．まず, 定理 3.6 により 0 でないスペクトル集合の元は全て固有値であることに注意せよ．また定理 3.6 により, $N\in\mathbb{N}\cup\{\infty\}$ が存在して

$$|\sigma_p(T)\setminus\{0\}|=\{r_n\}_{1\le n\le N},\quad r_1>r_2>\cdots$$

と表せる．ここで, $N=\infty$ の場合は $\lim_{n\to\infty} r_n = 0$ である．$N=\infty$ として示す．任意の $n\in\mathbb{N}$ に対して, $\{\lambda_{n1},\cdots,\lambda_{nm_n}\} = \{\lambda\in\sigma_p(T) : |\lambda| = r_n\}$, $N_n = \sum_{1\le l\le n}\sum_{1\le k\le m_l}\mathrm{Ker}(\lambda_{lk}I - T)$ とする．このとき, 定理 3.6, 4.7 より, N_n の上への直交作用素 P_n が存在する．$Q_n = I - P_n$ とすると, T が自己共役作用素であることから, $\sigma_p(TQ_n) = \sigma_P(T)\setminus(\bigcup_{1\le l\le n}\bigcup_{1\le k\le m_l}\{\lambda_{lk}\})$ である．よって, $\lim_{n\to\infty}\|TQ_n\| = 0$ であり定理 5.2 が示された.

参考文献

[1] J. Aguayo and M. Nova, Non-Archimedean Hilbert like spaces, Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin 14, 787—797 (2007).

[2] J. Aguayo and M. Nova, Compact and Self-adjoint operators on Free Banach Spaces of countable type, Advances in non-Archimedean analysis, 1–17, Contemp. Math., 665, Amer. Math. Soc., Providence, RI (2016).

[3] J. Aguayo, M. Nova, K. Shamseddine, Characterization of compact and self-adjoint operators on free Banach spaces of countable type over the complex Levi-Civita field, J. Math. Phys. 54 (2) (2013).

[4] L. Narici, E. Beckenstein, A non-Archimedean Inner Product, Contemporary Mathematics, vol. 384 (2005), 187–202.

[5] C. Perez-Garcia, W. H. Schikhof, *Locally convex spaces over non-archimedean valued fields*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 119. Cambridge University Press, Cambridge (2010).

[6] W.H. Schikhof, On p-adic compact operators, Report 8911, pp. 1—28, Department of Mathematics, Catholic University, Nijmegen, The Netherlands (1989).

[7] A. C. M. van Rooij, *Non-Archimedean functional analysis*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math., vol. 51, Marcel Dekker, Inc., New York (1978).