

Lagrange のコマに付随する楕円ファイバー空間と そのモノドロミーについて

立命館大学大学院理工学研究科基礎理工学専攻数理科学コース

石川元稀 (Genki ISHIKAWA) *

概要

Lagrange のコマは固定点の周りで回転する剛体の力学系で、特に固定点と重心を通る軸に関して回転対称性を持つものを言う。この力学系は可積分系の典型例であり、第一積分（保存量）を並べて得られるモーメント写像は楕円曲線を一般ファイバーとするファイバー空間を誘導する。この講演ではこの楕円ファイバー空間の特異跡を分析した結果について述べる。さらにこの楕円ファイバー空間のモノドロミーに関する結果についても述べる。

1 導入

本稿は、Lagrange のコマの複素代数幾何学的側面についての研究 [Ish] の紹介である。

一定重力の下で固定点の周りで回転する剛体の力学系は解析力学や幾何学的力学系理論の典型例の 1 つである。この力学系が可積分系になるのは、Euler のコマ、Lagrange のコマ、Kowalevski のコマ、Goryachev-Chaplygin のコマの 4 つの場合に限ることが S. L. Ziglin[Zig82, Zig83] によって示されている。

可積分系は複素代数幾何学の観点からも研究が行われている。上で述べた 4 つの可積分なコマのうち Euler のコマについて、積分曲線の族やスペクトル曲線の族が定めるファイバー空間（これらは楕円ファイバー空間になる）の複素代数幾何学が多羅間大輔、成木勇夫、J.-P. Francoise らによって研究されている [NT12, TF14, FT15]。これらの一連の研究では、Euler のコマに付随する楕円ファイバー空間の特異点や退化の解析が、作用変数や Birkhoff 標準形（Morse 函数における標準形のシンプレクティック版にあたるもの）の計算へ応用できることが述べられている。

固定点と剛体の重心を通る軸に関して回転対称性を持つものは上で述べた可積分なコマの一種であり、これを Lagrange のコマと呼ぶ。Lagrange のコマの場合、第一積分（保存量）を並べて得られるベクトル値写像（モーメント写像）の複素化を考えることで楕円ファイバー空間が構成できる。本研究では、この楕円ファイバー空間の特異点や退化を複素代数幾何学の観点から考察した。主結果として、この楕円ファイバー空間の特異跡の詳細を明らかにし、それによりモノドロミー表現の特徴付けを得た。

* E-mail:ra0070fs@ed.ritsumei.ac.jp

2 Lagrange のコマ

この節では、まず固定点周りでの剛体の回転運動の数学的定式化を与える。そして、Lagrange のコマが自由度 2 の完全積分可能な Hamilton 系であることを見る。詳細は例えば [Aud99] 等を参照されたい。

固定点周りでの剛体の回転運動は 3 次元回転群とその Lie 環の半直積群 $SO(3) \times \mathfrak{so}(3)$ の Lie 環の双対空間 $(\mathfrak{so}(3) \times \mathbb{R}^3)^*$ 上の Lie-Poisson 構造に関する Hamilton 系として以下のようにして与えられる。ただし、この双対空間 $(\mathfrak{so}(3) \times \mathbb{R}^3)^*$ は自然な同一視によって $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ と見做せるため、この先の議論は $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ 上で考えることとする。

$\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ 上の Lie-Poisson 構造は、 $F, G \in C^\infty(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)$ に対して

$$\{F, G\}(\Gamma, M) = -\langle \Gamma, (\nabla_M F) \times (\nabla_\Gamma G) \rangle - \langle \Gamma, (\nabla_\Gamma F) \times (\nabla_M G) \rangle - \langle M, (\nabla_M F) \times (\nabla_M G) \rangle,$$

で定義される。ここで、 $(\Gamma, M) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ 、であり $\langle \cdot, \cdot \rangle$ は \mathbb{R}^3 上の標準内積を表す。さらに $(\nabla_\Gamma F, \nabla_M F)$ は $F \in C^\infty(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)$ の $(\Gamma, M) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ での勾配を表し、

$$(\mathbf{d}F)_{(\Gamma, M)}(\xi, \eta) = \langle \nabla_\Gamma F(\Gamma, M), \xi \rangle + \langle \nabla_M F(\Gamma, M), \eta \rangle, \quad (\xi, \eta) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \cong T_{(\Gamma, M)}(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3),$$

で定まる。

Hamilton 関数として剛体の全エネルギーを表す $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ 上の関数

$$H(\Gamma, M) = \frac{1}{2} \langle M, \Omega \rangle + \langle \Gamma, \chi \rangle, \quad \Omega = \mathcal{J}^{-1}M,$$

を考える。ここで、 $J = \text{diag}(J_1, J_2, J_3)$ は慣性行列であり、 $\chi \in \mathbb{R}^3$ は剛体の重心を表すベクトルである。

Poisson 多様体 $(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3, \{\cdot, \cdot\})$ 上の Hamilton 関数 H に関する Hamilton 方程式

$$\begin{cases} \dot{\Gamma} = \Gamma \times \Omega, \\ \dot{M} = M \times \Omega + \Gamma \times \chi, \end{cases} \quad (2.1)$$

は Euler-Poisson 方程式と呼ばれており、固定点周りでの剛体の回転運動を記述している。この Hamilton 系は次のようにして自由度 2 の Hamilton 系と考えることができる。

$\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ 上の 2 つの関数

$$C_1(\Gamma, M) = \langle \Gamma, \Gamma \rangle, \quad C_2(\Gamma, M) = \langle \Gamma, M \rangle,$$

は Casimir 関数、すなわち任意の関数 $f \in C^\infty(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)$ に対して、 $\{C_1, f\} = 0, \{C_2, f\} = 0$ を満たす $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ 上の関数である。言い換えると C_1, C_2 は $(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3, \{\cdot, \cdot\})$ 上の任意の Hamilton 系に関する第一積分（保存量）である。

一般に Poisson 多様体はシンプレクティック多様体の非交和として書けることが知られており、特に今の場合には Casimir 関数 C_1, C_2 で定まる集合

$$\mathcal{O}_a := \{(\Gamma, M) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \mid \langle \Gamma, \Gamma \rangle = 1, \langle \Gamma, M \rangle = a\}, \quad a \in \mathbb{R},$$

は Poisson 多様体 $(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3, \{, \cdot\})$ のシンプレクティック葉の中で次元が最も高いもの ($\dim \mathcal{O}_a = 4$) を与えている. したがって Euler-Poisson 方程式 (2.1) を \mathcal{O}_a 上に制限することにより, 固定点周りの剛体の回転運動を自由度 2 の Hamilton 系と考えることができる.

Lagrange のコマはこの Hamilton 系の特別な場合で, 慣性行列 \mathcal{J} と質量重心 $\chi \in \mathbb{R}^3$ が条件

$$J_1 = J_2, \chi_1 = \chi_2 = 0,$$

を満たすものを言う. 簡単な計算によって Lagrange のコマは 2 つの函数的に独立かつ Poisson 括弧に対して可換な第一積分

$$H(\Gamma, M) = \frac{1}{2}\langle M, \Omega \rangle + \langle \Gamma, \chi \rangle, L(\Gamma, M) = -M_3,$$

を持つことが確認できる. したがって Lagrange のコマは完全積分可能系である.

最後に後のために, これまでに述べた 4 つの第一積分 C_1, C_2, H, L を [GZ98] での記述にしたがって以下の通りに書き直す.

$$\begin{aligned} H_1 &:= C_1 = \Gamma_1^2 + \Gamma_2^2 + \Gamma_3^2, \\ H_2 &:= C_2/J_1 = \Gamma_1\Omega_1 + \Gamma_2\Omega_2 + (m+1)\Gamma_3\Omega_3, \\ H_3 &:= H/J_1 = \frac{1}{2}(\Omega_1^2 + \Omega_2^2 + (m+1)\Omega_3^2) - \Gamma_3, \\ H_4 &:= -L/J_3 = \Omega_3. \end{aligned}$$

ただし, 適切な変数変換によって $\chi_3/J_1 = -1$ とし, さらに $m := (J_3 - J_2)/J_1$ と置いている.

3 楕円ファイバー空間

この節では, Weierstraß標準形で与えられる楕円ファイバー空間の一般的な事柄について述べる. 詳しいことや関連する内容については [Mir83], [Kas77], [Nak88], [Nak02]などを参照されたい.

S を (コンパクト) 複素多様体とし, \mathcal{L} を S 上の正則直線束とする. a, b をそれぞれ $\mathcal{L}^{\otimes 4}, \mathcal{L}^{\otimes 6}$ の正則切断であって, $\Delta := a^3 - 27b^2$ が S 上で恒等的に 0 ではないものとする.

S の構造層 \mathcal{O}_S を S 上の自明な直線束と同一視し, ベクトル束 $\mathcal{L}^{\otimes 2} \oplus \mathcal{L}^{\otimes 3} \oplus \mathcal{O}_S$ を考える. さらにこのベクトル束の射影化, すなわち $\mathcal{L}^{\otimes 2} \oplus \mathcal{L}^{\otimes 3} \oplus \mathcal{O}_S$ における零切断の像の補集合を自然な \mathbb{C}^* -作用で割ることで得られる S 上の $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ -束を $P(\mathcal{L}^{\otimes 2} \oplus \mathcal{L}^{\otimes 3} \oplus \mathcal{O}_S)$ で表す.

$P(\mathcal{L}^{\otimes 2} \oplus \mathcal{L}^{\otimes 3} \oplus \mathcal{O}_S)$ の斉次ファイバー座標 $(X : Y : Z)$ をとり, 方程式

$$Y^2Z = 4X^3 - aXZ^2 - bZ^3,$$

で定まる $P(\mathcal{L}^{\otimes 2} \oplus \mathcal{L}^{\otimes 3} \oplus \mathcal{O}_S)$ 内の超曲面 \mathcal{W} を考える. 標準射影 $\pi: P(\mathcal{L}^{\otimes 2} \oplus \mathcal{L}^{\otimes 3} \oplus \mathcal{O}_S) \rightarrow S$ を超曲面 \mathcal{W} 上に制限することにより, 楕円ファイバー空間 $\pi_{\mathcal{W}}: \mathcal{W} \rightarrow S$ が得られる. これを楕円ファイバー空間の Weierstraß標準形と呼ぶ. この楕円ファイバー空間について, 次が成り立つ.

Proposition 3.1. ([Mir83, Proposition 2.1]) A, B, D をそれぞれ $a = 0, b = 0, \Delta = 0$ が定める S 上の因子とする. さらに $P(\mathcal{L}^{\otimes 2} \oplus \mathcal{L}^{\otimes 3} \oplus \mathcal{O}_S)$ の点を $((X : Y : Z); p)$ で表す. ただし, $p \in S$ である. このとき, 次が成り立つ.

1. W は $Z = 0$ においてなめらかであり, $(X : Y : Z) = (0 : 1 : 0)$ で与えられる集合は楕円ファイバー空間 π_W の正則切断を定める.
2. W が $((X : Y : Z); p)$ で特異点を持つならば, $Y = 0$ かつ $Z \neq 0$ である.
3. W が $((0 : 0 : Z); p)$ で特異点を持つことと, $p \in \text{supp}(A) \cap \text{supp}(B)$, かつ B は p で特異点を持つことは同値である.
4. W が $((X : 0 : Z); p)$ (ただし, $X \neq 0$) で特異点を持つことと, $p \notin \text{supp}(A) \cup \text{supp}(B)$, かつ D は p で特異点を持つことは同値である. このとき, $(X : 0 : Z) = (-3b : 0 : 2a)$ である.

4 Lagrange のコマに付随する楕円ファイバー空間

4.1 モーメント写像の複素化とアフィン曲線族

Lagrange のコマについて, モーメント写像 $\mathcal{EM} := (H_3, H_4) : \mathcal{O}_a \rightarrow \mathbb{R}^2$ から誘導される楕円ファイバー空間を複素代数幾何学の観点から考察するため, 以降は上で述べた全ての設定を複素化して考える. つまり, モーメント写像は

$$\mathcal{O}_a^{\mathbb{C}} := \{(\Gamma, M) \in \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^3 \mid H_1(\Gamma, M) = 1, H_2(\Gamma, M) = a\}, \quad (4.1)$$

上で定義されたベクトル値関数 $\mathcal{EM} : \mathcal{O}_a^{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{C}^2$ とする. さらに, H_4 に関する Hamilton 流が定める変換群 ($\cong S^1$) の複素化を $\mathbb{C}^* \cong \mathbb{C}/2\pi i\mathbb{Z}$ とする. このとき \mathbb{C}^* はモーメント写像 $\mathcal{EM} : \mathcal{O}_a^{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{C}^2$ の一般ファイバー

$$\mathcal{EM}^{-1}(h_3, h_4) = \{(\Gamma, M) \in \mathcal{O}_a^{\mathbb{C}} \mid H_3(\Gamma, M) = h_3, H_4(\Gamma, M) = h_4\},$$

に自由に作用し, その商多様体 $\mathcal{EM}^{-1}(h_3, h_4)/\mathbb{C}^*$ は Weierstraß 標準形

$$y^2 = 4x^3 - g_2x - g_3, \quad (4.2)$$

で定まる楕円曲線のアフィン部分と同型になる. ただし g_2, g_3 は

$$a_1 = 2(1+m)h_4, \quad a_2 = 2h_3 + (1+m)mh_4^2, \quad \alpha = -2a,$$

で与えられる変数 a_1, a_2, α を用いて

$$g_2 = 1 + \frac{a_2^2}{12} - \frac{\alpha}{4}a_1, \quad g_3 = \frac{a_2^3}{216} + \frac{a_1^2}{16} - \frac{\alpha}{48}a_1a_2 - \frac{1}{6}a_2 + \frac{\alpha^2}{16}, \quad (4.3)$$

で定義される.

Weierstraß 標準形 (4.2) が定める 3 次曲線を $(a_1, a_2) \in \mathbb{C}^2$ でパラメータ付けされた曲線 $C_{(a_1, a_2)}$ と考える. 次で述べるように曲線の族 $\{C_{(a_1, a_2)}\}_{(a_1, a_2) \in \mathbb{C}^2}$ から複素射影平面 \mathbb{CP}^2 上の (特異な) 楕円ファイバー空間 W を構成できる.

4.2 楕円ファイバー空間 W の構成とその特異跡 (主結果 1)

$C_{(a_1, a_2)}$ を (4.2) 式, (4.3) 式で定義され, $(a_1, a_2) \in \mathbb{C}^2$ でパラメータ付けされたアフィン曲線とする. 3 次曲線の族 $\{C_{(a_1, a_2)}\}_{(a_1, a_2) \in \mathbb{C}^2}$ が誘導する \mathbb{CP}^2 上の楕円ファイバー空間は次のように構成される.

まずアファイン座標 $(a_1, a_2) \in \mathbb{C}^2$ を \mathbb{CP}^2 の非斉次座標と考える. すなわち $(A_0 : A_1 : A_2) \in \mathbb{CP}^2$ としたとき, $a_1 = A_1/A_0, a_2 = A_2/A_0$ とする. このとき, (4.3) 式で定義される g_2, g_3 はそれぞれ正則切断

$$g_2^* \in H^0(\mathbb{CP}^2, \mathcal{O}(\mathcal{L}^{\otimes 4})), g_3^* \in H^0(\mathbb{CP}^2, \mathcal{O}(\mathcal{L}^{\otimes 6})),$$

を誘導する. ここで, $\mathcal{L} := \mathcal{O}_{\mathbb{CP}^2}(1)$ である. \mathbb{CP}^2 上の \mathbb{CP}^2 -束 $P(\mathcal{L}^{\otimes 2} \oplus \mathcal{L}^{\otimes 3} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{CP}^2}) \rightarrow \mathbb{CP}^2$ の斉次ファイバー座標 $(X : Y : Z)$ をとり, 方程式

$$Y^2 Z = 4X^3 - g_2^* X Z^2 - g_3^* Z^3,$$

が定める $P(\mathcal{L}^{\otimes 2} \oplus \mathcal{L}^{\otimes 3} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{CP}^2})$ 内の超曲面を W とする. 標準射影 $\pi: P(\mathcal{L}^{\otimes 2} \oplus \mathcal{L}^{\otimes 3} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{CP}^2}) \rightarrow \mathbb{CP}^2$ を W 上に制限することにより, 楕円ファイバー空間 $\pi_W: W \rightarrow \mathbb{CP}^2$ を得る.

Proposition 3.1 より, 楕円ファイバー空間 $\pi_W: W \rightarrow \mathbb{CP}^2$ の特異跡は

$$(g_2^*)^3 - 27(g_3^*)^2 = 0,$$

で定義される \mathbb{CP}^2 上の因子 D で与えられる. この特異跡 D の詳細を次の定理によって明らかにした.

Theorem 4.1. ([Ish]) 特異跡 D は重複度が 7 の $A_0 = 0$ で定義される直線と 4 つの尖点と 2 つの通常二重点を特異点として持つ特異 5 次曲線からなる. さらにこの 5 次曲線は直線 $A_0 = 0$ と $(0 : 1 : 0), (0 : 0 : 1)$ の 2 点で接する.

詳しい証明は [Ish] を参照していただきたい.

Notation 4.2. 上の定理で述べた D の成分である直線 $A_0 = 0$ と特異 5 次曲線をそれぞれ L, Q で表す.

5 楕円ファイバー空間 π_W のモノドロミー (主結果 2)

前節で構成した楕円ファイバー空間 $\pi_W: W \rightarrow \mathbb{CP}^2$ のモノドロミーについて述べる.

特異跡 D の成分である特異 5 次曲線 Q のアファイン部分を Q_{aff} で表す. このとき $\mathbb{CP}^2 \setminus \text{supp}(D)$ は $\mathbb{C}^2 \setminus Q_{\text{aff}}$ と自然に同一視されるため, 基本群の同型

$$\pi_1(\mathbb{CP}^2 \setminus \text{supp}(D), *) \cong \pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus Q_{\text{aff}}, *)$$

が得られる.

次に $\pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus Q_{\text{aff}}, *)$ の生成元について, Q_{aff} の特異点の周りでの関係を見る. Q_{aff} の滑らかな点全体の集合を $\text{Reg}(Q_{\text{aff}})$ で表す. $\text{Reg}(Q_{\text{aff}})$ の連結成分のうち閉包に同じ通常二重点を持つ二つの連結成分について, 各々の成分に対応する $\pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus Q_{\text{aff}}, *)$ の生成元を図 1 のように a_1, b_1 とする. 同様に閉包に同じ尖点を持つ二つの連結成分について, 各々の成分に対応する $\pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus Q_{\text{aff}}, *)$ の生成元を図 2 のように a_2, b_2 とする.

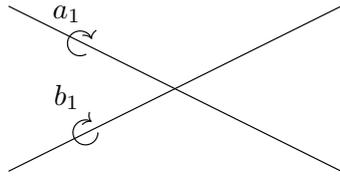


図1 通常二重点

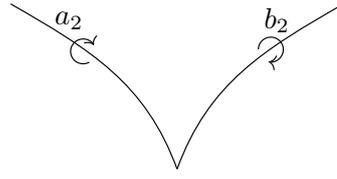


図2 尖点

このとき Zariski–van Kampen の定理より [Zar29, Kam33], a_1 と b_1 , a_2 と b_2 はそれぞれ関係式

$$a_1 b_1 = b_1 a_1, \tag{5.1}$$

$$a_2 b_2 a_2 = b_2 a_2 b_2, \tag{5.2}$$

を満たす.

楕円曲面に現れる全ての特異ファイバーについて、それぞれの型に対応するモノドロミー行列が小平邦彦 [Kod63] によって決定されている. これまで議論してきた楕円ファイバー空間 π_W の場合, $\text{Reg}(Q_{\text{aff}})$ の点上の特異ファイバーは I_1 型であることが確かめられる. したがって対応するモノドロミー行列は $SL(2, \mathbb{Z})$ の共役の違いを除き $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ で与えられることが分かる. これらの結果をもとに, 楕円ファイバー空間 $\pi_W: W \rightarrow \mathbb{CP}^2$ のモノドロミーが以下のように特徴付けられること示した.

Theorem 5.1. ([Ish]) $p \in \mathbb{C}^2 \setminus Q_{\text{aff}}$ を基本群 $\pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus Q_{\text{aff}}, p)$ の基点とする. このとき $H_1(\pi_W^{-1}(p), \mathbb{Z})$ の適当な基底に対して, 楕円ファイバー空間 $\pi_W: W \rightarrow \mathbb{CP}^2$ のモノドロミー表現は次のように特徴付けられる.

- $\text{Reg}(Q_{\text{aff}})$ の各連結成分に対応するモノドロミー行列は

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

のいずれかである.

- 二つの連結成分が閉包で同じ通常二重点を持つ時, 対応するモノドロミー行列は等しくなる.
- 二つの連結成分が閉包で同じ尖点を持つ時, 対応するモノドロミー行列は互いに異なる.

6 おわりに

本稿では頁数の関係上, 楕円ファイバー空間 π_W の特異ファイバーの分類に関する結果を扱わなかった. 最後にこのことについて簡単に紹介する. 詳細は [Ish] を参照していただきたい.

よく知られている結果として, 楕円曲面に現れる特異ファイバーは小平邦彦 [Kod63] によって完全に分類されている. しかし, 本研究で議論した楕円ファイバー空間 π_W は全空間が3次元の楕円ファイバー空間であり, 小平の分類とは状況が異なる.

3次元楕円ファイバー空間の場合, 「特異跡の特異点が通常二重点に限る」という仮定のもとで R. Miranda [Mir83] が特異ファイバーの完全な分類を与えている. この場合, 特異跡のなめらかな点上

の特異ファイバーは小平の分類に属する。一方、特異点（通常二重点）上の特異ファイバーには小平の分類に属さないものが現れるが、いずれも小平型の特異ファイバーの適当な成分を潰したものとして与えられることが述べられている。

楕円ファイバー空間 π_W は Theorem 4.1 より Miranda の仮定を満たしていないが、全空間と底空間を適切に変形することで楕円ファイバー空間 π_W と双有理同値な Miranda の 3 次元楕円ファイバー空間を構成できる。したがって特異ファイバーが分類できる。Lagrange のコマの場合は特異ファイバーに小平型ではないものが現れる。これは Euler のコマに関する結果と大きく異なる点の 1 つである。

謝辞

本研究にあたり、多くの議論や貴重なご助言を頂いた多羅間大輔先生（立命館大学）に感謝申し上げます。本研究は、JST 次世代研究者挑戦的研究プログラム JPMJSP2101 の支援を受けたものです。

参考文献

- [Aud99] M. AUDIN, *Spinning Tops – A Course on Integrable Systems –*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics **51**, Cambridge University Press, Cambridge, 1999.
- [FT15] J.-P. FRANÇOISE and D. TARAMA, Analytic extension of the Birkhoff normal forms for the free rigid body dynamics on $SO(3)$, *Nonlinearity* **28** no. 5 (2015), 1193–1216.
- [GZ98] L. GAVRILOV and A. ZHIVKOV, The complex geometry of the Lagrange top, *Enseign. Math. (2)* **44** no. 1-2 (1998), 133–170.
- [Ish] G. ISHIKAWA, An elliptic fibration arising from the Lagrange top and its monodromy, in preparation.
- [Kam33] E. R. V. KAMPEN, On the Fundamental Group of an Algebraic Curve, *Amer. J. Math.* **55** no. 1-4 (1933), 255–260.
- [Kas77] A. KAS, Weierstrass normal forms and invariants of elliptic surfaces, *Trans. Amer. Math. Soc.* **225** (1977), 259–266.
- [Kod63] K. KODAIRA, On compact analytic surfaces. I, II, III, *Ann. of Math. (2)* **71(1)**, **77(3)**, **78(1)** (1960, 1963), 111–52, 563–626, 1–40.
- [Mir83] R. MIRANDA, Smooth models for elliptic threefolds, in *The birational geometry of degenerations (Cambridge, Mass., 1981)* (R. FRIEDMAN and D. R. MORRISON, eds.), *Progr. Math.* **29**, Birkhäuser, Boston, Mass., 1983, pp. 85–133.
- [Nak88] N. NAKAYAMA, On Weierstrass models, in *Algebraic geometry and commutative algebra, Vol. II*, Kinokuniya, Tokyo, 1988, pp. 405–431.
- [Nak02] N. NAKAYAMA, Global structure of an elliptic fibration, *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* **38** no. 3 (2002), 451–649.
- [NT12] I. NARUKI and D. TARAMA, Some elliptic fibrations arising from free rigid body

- dynamics, *Hokkaido Math. J.* **41** no. 3 (2012), 365–407.
- [TF14] D. TARAMA and J.-P. FRANÇOISE, Analytic extension of Birkhoff normal forms for Hamiltonian systems of one degree of freedom—simple pendulum and free rigid body dynamics, in *Exponential analysis of differential equations and related topics, RIMS Kôkyûroku Bessatsu, B52*, Res. Inst. Math. Sci. (RIMS), Kyoto, 2014, pp. 219–236.
- [Zar29] O. ZARISKI, On the Problem of Existence of Algebraic Functions of Two Variables Possessing a Given Branch Curve, *Amer. J. Math.* **51** no. 2 (1929), 305–328.
- [Zig82] S. L. ZIGLIN, Branching of solutions and nonexistence of first integrals in hamiltonian mechanics. I, *Funct. Anal. Appl.* **16** no. 3 (1982), 30–41.
- [Zig83] S. L. ZIGLIN, Branching of solutions and nonexistence of first integrals in hamiltonian mechanics. II, *Funct. Anal. Appl.* **17** no. 1 (1983), 8–23.