Quantum analog of Mishchenko-Fomenko theorem for Ugl_d

ロモノーソフ・モスクワ国立大学　力学・数学部　数学部門
池田康 (Yasushi IKEDA) *

概要

Mishchenko-Fomenko の定理の量子 analog を証明する．$g = gl(d, \mathbb{C})$ のときに Gurevich-Pyatov-Saponov によって導入された量子微分を用いて量子 argument shift を構成する．ここまでは Sharygin 准教授（モスクワ大学）との共同研究に基づく．量子 argument shift 代数の生成元を 2 階までの量子 argument shift について与える．

1　導入

有限次元複素 Lie 環 g の双対空間 g^* の関数環 $C^\infty(g^*)$ には Lie 括弧を拡張するような Poisson 括弧がただひとつ存在する．

$$\begin{array}{ccc} C^\infty(g^*) \times C^\infty(g^*) & \xrightarrow{\text{Poisson 括弧}} & C^\infty(g^*) \\ \uparrow & & \uparrow \\ g \times g & \xrightarrow{\text{Lie 括弧}} & g \end{array}$$

これを Lie-Poisson 括弧と呼ぶ．g^* の任意の元 ξ に対して $C^\infty(g^*)$ の部分代数である対称代数 $Sg = \mathbb{C}\big[e_1, \ldots, e_d\big]$ 上の線型写像

$$\bar{\partial}_\xi = \xi(e_1)\frac{\partial}{\partial e_1} + \cdots + \xi(e_d)\frac{\partial}{\partial e_d} \tag{1}$$

は g の基底 $(e_1, \ldots, e_d)$ によらない．可積分系で Sg の Poisson 可換部分代数を見つけることは重要で，次の定理がある．

Theorem 1 (Mishchenko-Fomenko [1], 1978)**.** $\bar{C}$ を Sg の Poisson center とするとき

$$\bar{C}_\xi = \bar{C}\left[\,\bar{\partial}_\xi x, \bar{\partial}_\xi^2 x, \cdots : x \in \bar{C}\,\right]$$

は Poisson 可換である．

Definition 1. $\bar{C}_\xi$ を ξ による argument shift 代数と呼ぶ.

これに変形量子化の視点を導入する．Poisson 多様体に対して，双微分作用素 B_1, B_2, ... を用いて定まる積

$$x \star y = xy + (i\hbar)B_1(x, y) + (i\hbar)^2 B_2(x, y) + \cdots \tag{2}$$

* E-mail:yasushikeda@yahoo.com

が結合的で

$$B_1(x,y) - B_1(y,x) = \left[\frac{x \star y - y \star x}{i\hbar}\right]_{i\hbar=0} = \{x,y\} \tag{3}$$

をみたすとき，変形量子化と呼ぶ．条件 (3) は物理学における正準量子化

$$\lim_{i\hbar \to 0} \frac{xy - yx}{i\hbar} = \{x,y\}$$

に対応している．Kontsevich [2] は任意の Poisson 多様体に対してその変形量子化を構成した．Poisson 多様体が g^* と Lie-Poisson 括弧で与えられるとき，Sg の任意の元 x と y に対して，Kontsevich の変形量子化 (2) は $(i\hbar)$ の有限次である．$i\hbar = 1$ とするとき，対称代数 Sg の変形量子化 (2) と普遍展開代数 Ug は次の可換図式により同型である．

$$\begin{array}{ccc} Sg & \longrightarrow & Ug \\ {\scriptstyle (2)}\big\uparrow & & \big\uparrow \\ Sg \times Sg & \longrightarrow & Ug \times Ug \end{array}, \qquad x_1 \cdots x_n \mapsto \frac{1}{n!}\sum_{\sigma \in S_n} x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(n)}, \qquad (x_1, \ldots, x_n) \in g^n.$$

S_n は n 次対称群を表す．普遍展開代数 Ug は付随する次数付き代数 $\mathrm{gr}\, Ug = Sg$ の変形量子化であると考えることができる．

Problem 1 (Vinberg [3], 1991)**.** argument shift 代数 $\bar{C}_\xi$ を付随する次数付き代数に持つような普遍展開代数 Ug の可換部分代数 C_ξ がただひとつ存在するか？

Definition 2. argument shift 代数 $\bar{C}_\xi$ を付随する次数付き代数に持つような普遍展開代数 Ug の可換部分代数 C_ξ を ξ による量子 argument shift 代数と呼ぶ．

Problem 1 は Feigin-Frenkel center を用いて

- g が単純で ξ が $g^* \simeq g$ の正則元のとき [4, 5]
- g が A, C 型単純のとき [6, 7]

肯定的に解決されている．量子 argument shift 代数 C_ξ の生成元は g が単純で E, F 型以外のとき得られている ([8, 9, 7, 10] とその参考文献を参照)．わたしたちは Gurevich-Pyatov-Saponov [11] による量子微分に注目した．これは $g = gl(d,\mathbb{C})$ のときに定義される偏微分 (1) の量子 analog である．わたしたちは量子微分を用いて定義される量子 argument shift ∂_ξ が Mishchenko-Fomenko 型の定理をみたすことを示した (Theorem 2)．わたしは量子微分の基本公式 (Theorem 3) を用いて量子 argument shift ∂_ξ により生成される量子 argument shift 代数 C_ξ の生成元を 2 階までの量子 argument shift について与えた (Theorem 6)．

2 Gurevich-Pyatov-Saponov の量子微分

複素一般線型 Lie 環 $gl(d,\mathbb{C})$ は基底 $\left\{ e^i_j : i,j = 1, \ldots, d \right\}$ と Lie 括弧

$$[e^{i_1}_{j_1}, e^{i_2}_{j_2}] = e^{i_2}_{j_1}\delta^{i_1}_{j_2} - \delta^{i_2}_{j_1}e^{i_1}_{j_2} \tag{4}$$

により定まる．集合 S に値をとる d 次正方行列全体を $M(d,S)$ で表す．$M(d,\mathbb{C})$ の (j,i) 行列単位を E^i_j で表す．e^i_j を E^i_j に対応させる $gl(d,\mathbb{C})$ から $M(d,\mathbb{C})$ への線型写像は Lie 環の同型写像である．A が $Sgl(d,\mathbb{C})$ と $Ugl(d,\mathbb{C})$ のいずれかを表すとき $M(d,A)$ の元 e を

$$e = \begin{pmatrix} e^1_1 & \cdots & e^1_d \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ e^d_1 & \cdots & e^d_d \end{pmatrix} = \sum_{i,j=1}^{d} e^i_j \otimes E^j_i, \qquad\qquad M(d,A) = A \otimes M(d,\mathbb{C})$$

により定める．すなわち e^i_j は行列 e の (i,j) 成分である．同じように任意の行列 x の (i,j) 成分を x^i_j で表す．

Remark 1. $\bar{\partial}^i_j = \dfrac{\partial}{\partial e^j_i}$ を $Sgl(d,\mathbb{C}) = \mathbb{C}\big[\, e^i_j : i,j = 1,\dots,d \,\big]$ 上の偏微分とするとき $\bar{\partial}$

$$Sgl(d,\mathbb{C}) \to M\big(d, Sgl(d,\mathbb{C})\big) = Sgl(d,\mathbb{C}) \otimes M(d,\mathbb{C}), \qquad x \mapsto \bar{\partial} x = \sum_{i,j=1}^{d} (\bar{\partial}^i_j x) \otimes E^j_i$$

は以下の性質によってひととおりに特徴付けられる線型写像である．

1. 任意の複素数 ν に対して $\bar{\partial}\nu = 0$.
2. 任意の複素数値 d 次正方行列 ξ に対して $\bar{\partial}\,\mathrm{tr}(\xi e) = \xi$.
3. (Leibniz の法則) $Sgl(d,\mathbb{C})$ の任意の元 x と y に対して $\bar{\partial}(xy) = (\bar{\partial}x)y + x(\bar{\partial}y)$.

対称代数 $Sgl(d,\mathbb{C})$ を変形量子化である普遍展開代数 $Ugl(d,\mathbb{C})$ に置きかえたとき Remark 1 の 3 条件をみたす線型写像 ∂ は存在しない．なぜなら ∂ をそのような線型写像とするとき交換関係 (4) により

$$0 = \partial\Big(e^{i_1}_{j_1} e^{i_2}_{j_2} - e^{i_2}_{j_2} e^{i_1}_{j_1}\Big) = \partial\Big(e^{i_2}_{j_1} \delta^{i_1}_{j_2} - \delta^{i_2}_{j_1} e^{i_1}_{j_2}\Big) = E^{i_2}_{j_1} \delta^{i_1}_{j_2} - \delta^{i_2}_{j_1} E^{i_1}_{j_2} \neq 0.$$

Gurevich-Pyatov-Saponov [11] は Leibniz の法則を修正して線型写像 ∂ が well-defined になるようにした．

Definition 3. $gl(d,\mathbb{C})$ の量子微分 ∂

$$Ugl(d,\mathbb{C}) \to M\big(d, Ugl(d,\mathbb{C})\big) = Ugl(d,\mathbb{C}) \otimes M(d,\mathbb{C}), \qquad x \mapsto \partial x = \sum_{i,j=1}^{d} (\partial^i_j x) \otimes E^j_i$$

は以下の性質によってひととおりに特徴付けられる線型写像である．

1. 任意の複素数 ν に対して $\partial\nu = 0$.
2. 任意の複素数値 d 次正方行列 ξ に対して $\partial\,\mathrm{tr}(\xi e) = \xi$.
3. (量子 Leibniz の法則) $Ugl(d,\mathbb{C})$ の任意の元 x と y に対して

$$\partial(xy) = (\partial x)y + x(\partial y) + (\partial x)(\partial y).$$

3　Mishchenko-Fomenko 定理の量子 analog

この節は [12] に基づく．$\xi^i_j = \xi(e^i_j)$ と考えることにより，$gl(d,\mathbb{C})^*$ を $M(d,\mathbb{C})$ と同一視する．argument shift $\bar{\partial}_\xi = \mathrm{tr}(\xi\bar{\partial})$ の量子 analog として，量子 argument shift $\partial_\xi = \mathrm{tr}(\xi\partial)$ を考えることができる．この節の主定理を述べる．

Theorem 2 ($gl(d,\mathbb{C})$ における Mishchenko-Fomenko 定理の量子 analog)**.** C を $Ugl(d,\mathbb{C})$ の center とするとき

$$C_\xi = C\Big[\,\partial_\xi x, \partial_\xi^2 x, \cdots : x \in C\,\Big]$$

は可換である．

証明について述べる．特性多項式が重根を持たない複素数値 d 次正方行列全体は $M(d,\mathbb{C})$ で稠密である．さらに対角化を考えることにより，ξ は対角成分がすべて異なる対角行列 $\mathrm{diag}(z_1,\dots,z_d)$ であるとしてよい．このとき ξ による量子 argument shift 代数はただひとつ存在して

$$\left\{ e^i_i, \sum_{j\neq i} \frac{e^j_i e^i_j}{z_i - z_j} \right\}_{i=1}^d \tag{5}$$

の centraliser (集合 (5) のすべての元と交換する $Ugl(d,\mathbb{C})$ の元全体) として与えられる [3, 15]．x を C の元とするとき

$$0 = \partial_\xi^n \big[e^i_i, x\big] = \big[e^i_i, \partial_\xi^n x\big], \qquad i = 1,\dots,d.$$

したがって

$$\big[\sum_{j\neq i} \frac{e^j_i e^i_j}{z_i - z_j}, \partial_\xi^n x\big] = 0, \qquad i = 1,\dots,d \tag{6}$$

を示せばよい．

Lemma 1. 部分空間

$$\left\{ x \in Ugl(d,\mathbb{C}) : \mathrm{tr}\Big(\xi\big[\partial \sum_{j\neq i} \frac{e^j_i e^i_j}{z_i - z_j}, \partial x\big]\Big) = 0 \right\}, \qquad i = 1,\dots,d \tag{7}$$

は C を含み ∂_ξ で保たれる．

Proof. 次節の Theorem 4 より部分空間 (7) が C を含むことを示すには

$$\mathrm{tr}\Big(\xi\big[\partial \sum_{j\neq i} \frac{e^j_i e^i_j}{z_i - z_j}, e^n\big]\Big) = 0$$

を示せばよい．これは交換関係

$$\big[(e^n)^{i_1}_{j_1}, e^{i_2}_{j_2}\big] = \big[e^{i_1}_{j_1}, (e^n)^{i_2}_{j_2}\big] = (e^n)^{i_2}_{j_1}\delta^{i_1}_{j_2} - \delta^{i_2}_{j_1}(e^n)^{i_1}_{j_2} \tag{8}$$

により示される．x を部分空間 (7) の元とすると

$$\partial\partial_\xi \sum_{j\neq i} \frac{e^j_i e^i_j}{z_i - z_j} = \big(z_{j_1} z_{j_2} - z_{i_1} z_{i_2}\big) \partial^{j_1}_{i_1} \partial^{j_2}_{i_2} \big(e^j_i e^i_j\big) = 0$$

より

$$\begin{aligned}
0 &= \partial_\xi \operatorname{tr}\Big(\xi\big[\partial \sum_{j\neq i} \frac{e^j_i e^i_j}{z_i - z_j}, \partial x\big]\Big) \\
&= \operatorname{tr}\Big(\xi\big[\partial\partial_\xi \sum_{j\neq i} \frac{e^j_i e^i_j}{z_i - z_j}, \partial x\big]\Big) + \operatorname{tr}\Big(\xi\big[\partial \sum_{j\neq i} \frac{e^j_i e^i_j}{z_i - z_j}, \partial\partial_\xi x\big]\Big) \\
&\qquad + \sum_{i_1,i_2,j_1,j_2=1}^{d} \big(z_{j_1} z_{j_2} - z_{i_1} z_{i_2}\big) \big(\partial^{j_1}_{i_1} \partial^{j_2}_{i_2} \sum_{j\neq i} \frac{e^j_i e^i_j}{z_i - z_j}\big) \big(\partial^{i_1}_{j_1} \partial^{i_2}_{j_2} x\big) \\
&= \operatorname{tr}\Big(\xi\big[\partial \sum_{j\neq i} \frac{e^j_i e^i_j}{z_i - z_j}, \partial\partial_\xi x\big]\Big).
\end{aligned}$$

□

(6) を n についての数学的帰納法により示す．$n > 0$ として $\big[\sum_{j\neq i} \frac{e^j_i e^i_j}{z_i - z_j}, \partial^{n-1}_\xi x\big] = 0$ と仮定する．量子 Leibniz の法則より

$$\begin{aligned}
0 &= \partial_\xi \big[\sum_{j\neq i} \frac{e^j_i e^i_j}{z_i - z_j}, \partial^{n-1}_\xi x\big] \\
&= \big[\partial_\xi \sum_{j\neq i} \frac{e^j_i e^i_j}{z_i - z_j}, \partial^{n-1}_\xi x\big] + \big[\sum_{j\neq i} \frac{e^j_i e^i_j}{z_i - z_j}, \partial^{n}_\xi x\big] + \operatorname{tr}\Big(\xi\big[\partial \sum_{j\neq i} \frac{e^j_i e^i_j}{z_i - z_j}, \partial\partial^{n-1}_\xi x\big]\Big).
\end{aligned}$$

$\partial_\xi \sum_{j\neq i} \frac{e^j_i e^i_j}{z_i - z_j} = \sum_{j\neq i} \frac{z_i}{z_i - z_j}$ と Lemma 1 より

$$\big[\partial_\xi \sum_{j\neq i} \frac{e^j_i e^i_j}{z_i - z_j}, \partial^{n-1}_\xi x\big] = \operatorname{tr}\Big(\xi\big[\partial \sum_{j\neq i} \frac{e^j_i e^i_j}{z_i - z_j}, \partial\partial^{n-1}_\xi x\big]\Big) = 0.$$

Corollary 1. C_ξ は ξ による量子 argument shift 代数である．

Proof. $\bar{C}$ と C は $\big(\operatorname{tr} e, \ldots, \operatorname{tr} e^d\big)$ により自由に生成される．

$$\bar{C} = \mathbb{C}\Big[\operatorname{tr} e, \ldots, \operatorname{tr} e^d\Big] \simeq \mathbb{C}\big[x_1, \ldots, x_d\big], \qquad C = \mathbb{C}\Big[\operatorname{tr} e, \ldots, \operatorname{tr} e^d\Big] \simeq \mathbb{C}\big[x_1, \ldots, x_d\big]. \tag{9}$$

ここで行列 e は，左の式においては $M\big(d, Sgl(d,\mathbb{C})\big)$ の元とみていて，右の式においては $M\big(d, Ugl(d,\mathbb{C})\big)$ の元とみている．量子 Leibniz の法則の付加項 $\big((\partial x)(\partial y)\big)^i_j$ は $\partial^i_j(xy)$ の最高次の項には寄与しない．したがって $\operatorname{gr} C_\xi = \bar{C}_\xi$. □

4　量子微分の基本公式と量子 argument shift 代数の生成元

この節は [13, 14] に基づく．前節の量子 argument shift 代数 C_ξ の生成元を 2 階までの量子 argument shift について与える．わたしは C の元 x の量子 argument shift $\partial^n_\xi x$ を計算するための

量子微分の基本公式を得た.

Definition 4.

$$f_{\pm}^{(n)}(x) = \frac{(x+1)^n \pm (x-1)^n}{2} = \sum_{m=0}^{n} \frac{1 \pm (-1)^{n-m}}{2} \binom{n}{m} x^m \in \mathbb{Z}[x].$$

Theorem 3.

$$\begin{aligned}
\partial(e^n)^i_j &= \sum_{m=0}^{n-1} \left(\begin{pmatrix} f_+^{(n-m-1)}(e)^1_j \\ \vdots \\ f_+^{(n-m-1)}(e)^d_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (e^m)^i_1 & \cdots & (e^m)^i_d \end{pmatrix} + f_-^{(n-m-1)}(e)(e^m)^i_j \right) \\
&= \sum_{m=0}^{n-1} \left(\begin{pmatrix} (e^m)^1_j \\ \vdots \\ (e^m)^d_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_+^{(n-m-1)}(e)^i_1 & \cdots & f_+^{(n-m-1)}(e)^i_d \end{pmatrix} + (e^m)^i_j f_-^{(n-m-1)}(e) \right).
\end{aligned}$$

Proof.

$$\partial(e^{n+1})^i_j = \sum_{m=0}^{n} \left(\begin{pmatrix} g_m^{(n)}(e)^1_j \\ \vdots \\ g_m^{(n)}(e)^d_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (e^m)^i_1 & \cdots & (e^m)^i_d \end{pmatrix} + h_m^{(n)}(e)(e^m)^i_j \right)$$

を仮定して $g_m^{(n)}(x)$ と $h_m^{(n)}(x)$ の漸化式を解くことにより得られる. □

同型 (9) により有限個の積 $x = \mathrm{tr}\, e^{n_1}\, \mathrm{tr}\, e^{n_2} \cdots$ に対して量子 argument shift $\partial_\xi^n x$ を計算することが本質的である. 次の事実が役に立つ.

Proposition 1.

$$Ugl(d, \mathbb{C}) \to M\big(d, Ugl(d, \mathbb{C})\big), \qquad x \mapsto x + \partial x$$

は代数の準同型写像である.

Proof. 量子 Leibniz の法則より

$$xy + \partial(xy) = xy + (\partial x)y + x(\partial y) + (\partial x)(\partial y) = (x + \partial x)(y + \partial y). \quad \square$$

Theorem 3 と Proposition 1 より次の結果が得られる. $f_-^{(-1)}(x) = \mathrm{tr}\, e^{-1} = 1$ と約束する.

Theorem 4. 有限個の積 $x = \mathrm{tr}\, e^{n_1}\, \mathrm{tr}\, e^{n_2} \cdots$ に対して

1. $x + \partial x = \displaystyle\sum_{m_1=-1}^{n_1} \sum_{m_2=-1}^{n_2} \cdots \Big(\prod_k f_-^{(n_k - m_k - 1)}(e) \Big) \Big(\prod_k \mathrm{tr}\, e^{m_k} \Big),$
2. $$\begin{aligned}\big(\mathrm{tr}\,\xi + \partial_\xi\big)^2 x &= \sum_{m_1=-1}^{n_1} \sum_{m_2=-1}^{n_2} \cdots \mathrm{tr}\big(\xi \prod_k f_-^{(n_k - m_k - 1)}(e)\big)\big(\mathrm{tr}\,\xi + \partial_\xi\big) \prod_k \mathrm{tr}\, e^{m_k} \\ &+ \sum_{m_1=-1}^{n_1} \sum_{m_2=-1}^{n_2} \cdots \sum_{k_1=-1}^{n_1 - m_1 - 1} \sum_{k_2=-1}^{n_2 - m_2 - 1} \cdots \\ &\mathrm{tr}\Big(\xi \Big(\partial\, \mathrm{tr}\big(\xi \prod_\ell f_-^{(n_\ell - m_\ell - k_\ell - 2)}(e)\big)\Big) \prod_\ell f_-^{(k_\ell)}(e)\Big) \prod_\ell \mathrm{tr}\, e^{m_\ell}.\end{aligned}$$

Definition 5.

$$C_\xi^{(n)} = C\Big[\partial_\xi x, \dots, \partial_\xi^n x : x \in C\Big].$$

$C_\xi = \lim_{n\to\infty} C_x^{(n)}$ である．同型 (9) と Theorem 4 より

$$\begin{aligned} C_\xi^{(1)} &= C\Big[\operatorname{tr}\big(\xi e^n\big) : n = 1, 2, \dots\Big], \\ C_\xi^{(2)} &= C_\xi^{(1)}\left[\tau_\xi\begin{pmatrix} 0 & P_n \\ P_m^T & 0 \end{pmatrix} : m, n = 0, 1, 2, \dots\right] \end{aligned} \tag{10}$$

が結論される．x^T は x の転置行列である．

Definition 6.

$$\tau_\xi(x) = \operatorname{tr}\left(\begin{pmatrix} \xi & \xi e & \cdots & \xi e^{n-1} \end{pmatrix} x \begin{pmatrix} \xi \\ \xi e \\ \vdots \\ \xi e^{n-1} \end{pmatrix}\right) = \sum_{i,j=1}^n x_j^i \operatorname{tr}\big(\xi e^{i-1} \xi e^{j-1}\big).$$

Definition 7.

$$x^m \begin{pmatrix} f_+^{(n-1)}(x) \\ \vdots \\ f_+^{(0)}(x) \end{pmatrix} = P_n^{(m)} \begin{pmatrix} x^0 \\ \vdots \\ x^{m+n-1} \end{pmatrix}, \qquad\qquad P_n = P_n^{(0)}.$$

Definition 8.

$$\sigma(x) = \begin{pmatrix} x_1^1 & x_2^1 + x_1^2 & \cdots & x_n^1 + x_1^n \\ 0 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 + x_2^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x_n^n \end{pmatrix} = \sum_{i,j=1}^n x_j^i E_{\min\{i,j\}}^{\max\{i,j\}}.$$

交換関係 (8) より $\operatorname{tr}\big(\xi e^m \xi e^n\big) = \operatorname{tr}\big(\xi e^n \xi e^m\big)$ が示される．したがって $\tau_\xi\big(\sigma(x)\big) = \tau_\xi(x)$ である．わたしは (10) において次の行列の等式を得た．

Theorem 5.

$$\sigma\begin{pmatrix} 0 & P_{m+2n} \\ P_m^T & 0 \end{pmatrix} = \sum_{k=0}^n \left(\binom{2n-k}{k} + \binom{2n-k-1}{k-1}\right) P_{m+k}^{(m+k)},$$

$$\sigma\begin{pmatrix} 0 & P_{m+2n+1} \\ P_m^T & 0 \end{pmatrix} = \sum_{k=0}^n \binom{2n-k}{k} \Big(P_{m+k+1}^{(m+k)} + P_{m+k}^{(m+k+1)}\Big).$$

Theorem 5 は (11)，(12)，(13)，(14) と同値である．

- 二項係数の等式

$$\begin{aligned}
&\binom{2n_1+n_2+2n_3+1}{2n_3}+\binom{n_2+2n_3}{2n_3} \\
&\qquad =\sum_{n_4=0}^{n_3}\left(\binom{n_1+n_2+n_3+n_4+1}{2n_4}+\binom{n_1+n_2+n_3+n_4}{2n_4}\right)\binom{n_1+n_3-n_4}{2(n_3-n_4)}, \quad (11)\\
&\binom{2n_1+n_2+2n_3+2}{2n_3}+\binom{n_2+2n_3}{2n_3} \\
&\qquad =\sum_{n_4=0}^{n_3}\binom{n_1+n_2+n_3+n_4+1}{2n_4}\left(\binom{n_1+n_3-n_4+1}{2(n_3-n_4)}+\binom{n_1+n_3-n_4}{2(n_3-n_4)}\right). \quad (12)
\end{aligned}$$

- 多項式の等式

$$f_+^{(m+2n)}(x)+f_+^{(m)}(x)x^{2n}=\sum_{k=0}^{n}\left(\binom{2n-k}{k}+\binom{2n-k-1}{k-1}\right)f_+^{(m+k)}(x)x^k, \quad (13)$$

$$f_+^{(m+2n+1)}(x)+f_+^{(m)}(x)x^{2n+1}=\sum_{k=0}^{n}\binom{2n-k}{k}\left(f_+^{(m+k+1)}(x)x^k+f_+^{(m+k)}(x)x^{k+1}\right). \quad (14)$$

(11), (12), (13), (14) は Mathematica により確かめることができる.

```
In[1]:= FullSimplify[Binomial[2n+m+2l+1,2l]+
  Binomial[m+2l,2l]-
  Sum[(Binomial[n+m+l+k+1,2k]+Binomial[n+m+l+k,2k])
  Binomial[n+l-k,2(l-k)],{k,0,l}],
  Element[n|m|l,Integers]&&n>=0&&m>=0&&l>=0]
Out[1]= 0
In[2]:= FullSimplify[Binomial[2n+m+2l+2,2l]+
  Binomial[m+2l,2l]-
  Sum[Binomial[n+m+l+k+1,2k](Binomial[n+l-k+1,2(l-k)]+
  Binomial[n+l-k,2(l-k)]),{k,0,l}],
  Element[n|m|l,Integers]&&n>=0&&m>=0&&l>=0]
Out[2]= 0
In[3]:= Fplus[n_][x_]:=((x+1)^n+(x-1)^n)/2
In[4]:= Simplify[Fplus[m+2n][x]+Fplus[m][x]x^(2n)-
  Sum[(Binomial[2n-k,k]+Binomial[2n-k-1,k-1])
  Fplus[m+k][x]x^k,{k,0,n}],
  Element[m|n,Integers]&&m>=0&&n>=0]
Out[4]= 0
In[5]:= Simplify[Fplus[m+2n+1][x]+Fplus[m][x]x^(2n+1)-
  Sum[Binomial[2n-k,k](Fplus[m+k+1][x]x^k+
  Fplus[m+k][x]x^(k+1)),{k,0,n}],
  Element[m|n,Integers]&&m>=0&&n>=0]
Out[5]= 0
```

(10) と Theorem 5 よりこの節の主定理が得られる.

Theorem 6 ($C_\xi^{(2)}$ の生成元)**.**

$$C_\xi^{(2)}=C_\xi^{(1)}\left[\tau_\xi\left(P_n^{(n)}\right),\tau_\xi\left(P_{n+1}^{(n)}+P_n^{(n+1)}\right):n=1,2,\dots\right].$$

Theorem 6 より下記の元は互いに交換する.

$$\begin{aligned} C = C_\xi^{(0)} &: \operatorname{tr} e,\ \operatorname{tr} e^2,\ \operatorname{tr} e^3,\ \ldots \\ C_\xi^{(1)} &: \operatorname{tr}\bigl(\xi e\bigr),\ \operatorname{tr}\bigl(\xi e^2\bigr),\ \operatorname{tr}\bigl(\xi e^3\bigr),\ \ldots \\ C_\xi^{(2)} &: \operatorname{tr}\bigl(\xi^2 e\bigr),\ 2\operatorname{tr}\bigl(\xi^2 e^2\bigr) + \operatorname{tr}\bigl(\xi e \xi e\bigr),\ \operatorname{tr}\bigl(\xi^2 e^3\bigr) + \operatorname{tr}\bigl(\xi e \xi e^2\bigr),\ \ldots \end{aligned}$$

参考文献

[1] Alexander Mishchenko and Anatoly Fomenko: Euler equations on finite-dimensional Lie groups. Mathematics of the USSR-Izvestiya. **12**(2), 371–389 (1978)

[2] Maxim Kontsevich: Deformation quantization of Poisson manifolds. Letters in Mathematical Physics. **66**, 157–216 (2003)

[3] Ernest Vinberg: On certain commutative subalgebras of a universal enveloping algebra. Mathematics of the USSR-Izvestiya. **36**(1), 1–22 (1991)

[4] Leonid Rybnikov: The shift of invariants method and the Gaudin model. Funct. Anal. Appl. **40**(3), 188–199 (2006)

[5] Boris Feigin, Edward Frenkel, and Valerio Toledano Laredo: Gaudin models with irregular singularities. Advances in Mathematics. **223**(3), 873–948 (2010)

[6] Vyacheslav Futorny and Alexander Molev: Quantization of the shift of argument subalgebras in type A. Advances in Mathematics. **285**, 1358–1375 (2015)

[7] Alexander Molev and Oksana Yakimova: Quantisation and nilpotent limits of Mishchenko-Fomenko subalgebras. Representation Theory of the American Mathematical Society. **23**(12), 350–378 (2019)

[8] Alexander Molev: Sugawara operators for classical Lie algebras. volume 229. American Mathematical Soc. (2018)

[9] Alexander Molev: On Segal-Sugawara vectors and Casimir elements for classical Lie algebras. Letters in Mathematical Physics. **111**(1), 8 (2021)

[10] Oksana Yakimova: Symmetrisation and the Feigin-Frenkel centre. Compositio Mathematica. **158**(3), 585–622 (2022)

[11] Dimitri Gurevich, Pavel Pyatov, and Pavel Saponov: Braided Weyl algebras and differential calculus on $U(u(2))$. Journal of Geometry and Physics. **62**(5), 1175–1188 (2012)

[12] Yasushi Ikeda and Gerogy Sharygin: The argument shift method in universal enveloping algebra $U\mathfrak{gl}_d$. Journal of Geometry and Physics. **195**, 105030 (2024)

[13] Yasushi Ikeda: Quasidifferential operator and quantum argument shift method. Theoretical and Mathematical Physics. **212**(1), 918–924 (2022)

[14] Yasushi Ikeda: Second quantum argument shifts in general linear Lie algebras. Theoretical and Mathematical Physics. Manuscript submitted for publication.

[15] Leonid Rybnikov: Centralizers of certain quadratic elements in Poisson-Lie algebras and the method of translation of invariants. Russian Mathematical Surveys. **60**(2), 367–369 (2005)