

# A construction of quantized flag manifolds via deformed quantum enveloping algebras

東京大学 大学院数理科学研究科 数理科学専攻  
星野 真生 (Mao HOSHINO) \*

## 概要

この講演では、旗多様体の変形量子化を一般化された放物型誘導表現を経由することによって構成する。これは Donin らの群同変な場合の研究の類似であり、また De Commer による複素数パラメーターのものの形式変数類似でもある。

## 1 変形量子化と Poisson 括弧

本講演で扱うのは次のような概念である：

**定義 1.1.** 可換  $\mathbb{C}$  代数  $A$  に対して、その**変形量子化** (deformation quantization) とは位相  $\mathbb{C}[[\hbar]]$  代数  $A_\hbar$  と位相  $\mathbb{C}[[\hbar]]$  加群の同型  $A_\hbar \cong A[[\hbar]]$  の組であって、誘導される  $\mathbb{C}$  線型空間の同型  $A_\hbar/\hbar A_\hbar \cong A$  が  $\mathbb{C}$  代数の同型となっているもののことである。

**注意.** 新たに  $A_\hbar$  という位相  $\mathbb{C}[[\hbar]]$  加群を考えるのではなく、 $A[[\hbar]]$  上に次の条件を満たす位相  $\mathbb{C}[[\hbar]]$  代数の構造を与える積  $*_\hbar$  を考えても変形量子化の概念と等価である： $\mathbb{C}$  双線型形式の列  $\{m_n\}_{n=1}^\infty$  を用いて、任意の  $a, b \in A$  について  $a *_\hbar b$  が次のように表せる

$$a *_\hbar b = ab + m_1(a, b)\hbar + m_2(a, b)\hbar^2 + \dots$$

そこで本講演ではこれら 2 つの定式化を特に区別しない。

さて、可換  $\mathbb{C}$  代数  $A$  の変形量子化  $(A[[\hbar]], *_\hbar)$  が与えられると、次のようにして  $A$  上の **Poisson 括弧**  $\{-, -\}$  が得られる：

$$\{a, b\} = m_1(a, b) - m_1(b, a).$$

すなわち、以下の 3 つの条件を満たす：

- (i)  $\{a, b\} = -\{b, a\}$  (歪対称性).
- (ii)  $\{\{a, b\}, c\} + \{\{b, c\}, a\} + \{\{c, a\}, b\} = 0$  (Jacobi 恒等式).
- (iii)  $\{ab, c\} = a\{b, c\} + \{a, c\}b$  (Leibniz 則).

これに関連して次のような微分幾何学的な構造が定義される。

---

\* E-mail: mhoshino@ms.u-tokyo.ac.jp

**定義 1.2.** 可微分多様体  $M$  と双ベクトル場  $\pi \in \Gamma(M, \wedge^2 TM)$  の組が **Poisson 多様体** (Poisson manifold) であるとは,  $\{f, g\}_\pi := \pi(df, dg)$  が  $C^\infty(M)$  上の Poisson 括弧を定めることをいう.

**注意.** 全ての  $C^\infty(M)$  上の Poisson 括弧は Poisson 多様体の構造から得られる (Leibniz 則による). またシンプレクティック多様体  $(M, \omega)$  が与えられると,  $\omega$  を  $TM \cong T^*M$  によって双ベクトル場とみなすことで Poisson 多様体が定まる.

**注意.** ここでは可微分多様体に基づいて定式化した, 同様の概念は複素多様体や代数多様体でも考えられる.

可微分多様体  $M$  について  $C^\infty(M)$  の変形量子化は  $C^\infty(M)$  上の Poisson 括弧を誘導するのであったから,  $M$  上の Poisson 多様体の構造を定める. この Poisson 多様体を与えられた変形量子化の半古典極限 (semi-classical limit) と呼ぶことがある.

ここまで述べたことについていくつか具体例を述べる. ただし簡単のため  $C^\infty(M)$  そのものではなく, その部分  $\mathbb{C}$  代数の変形量子化を扱う.

**例 (非可換トーラス).**  $M = \mathbb{T}^2$  とし,  $z, w: \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{C}$  をそれぞれ第一射影, 第二射影とする. すると  $z, w$  が生成する部分  $\mathbb{C}$  代数  $A$  は  $\{z^n w^m\}_{n, m \in \mathbb{Z}}$  を基底にもつ.

そこで  $\lambda \in \mathbb{C}$  を固定し,  $A_h$  を可逆元  $u, v$  と関係式  $vu = e^{\lambda h} uv$  で生成される完備位相  $\mathbb{C}[[h]]$  代数とする. すると  $u^n v^m \mapsto z^n w^m$  により  $A_h$  は  $A$  の変形量子化となり, その半古典極限は

$$\lambda \frac{\partial}{\partial x} \wedge \frac{\partial}{\partial y}$$

で与えられる. ただしここでは局所座標として  $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (e^{ix}, e^{iy}) \in \mathbb{T}^2$  を用いている.

**例 (equatorial Podleś 球面).**  $M = S^2$  として,  $X, Y, Z: S^2 \rightarrow \mathbb{C}$  を  $X(x, y, z) = x + iy, Y(x, y, z) = x - iy, Z(x, y, z) = z$  で定める. このときこれらが生成する  $C^\infty(S^2)$  の部分  $\mathbb{C}$  代数を  $A$  とすると,  $A \cong \mathbb{C}[X, Y, Z]/(XY + Z^2 - 1)$  となる.

そこで  $A_h$  を生成元  $u, v, w$  と次の関係式で得られる完備位相  $\mathbb{C}[[h]]$  代数とする:

$$uw = e^{2h} wu, vw = e^{-2h} wv, uv = 1 - e^{2h} w^2, vu = 1 - e^{-2h} w^2.$$

すると  $u^n w^l v^m \mapsto X^n Z^l Y^m$  により  $A_h$  は変形量子化となり, その半古典極限は局所座標  $(x, y, z) = (\cos \theta \cos \varphi, \sin \theta \cos \varphi, \sin \varphi)$  のもとで

$$-2i \tan \varphi \frac{\partial}{\partial \theta} \wedge \frac{\partial}{\partial \varphi}$$

で与えられる.

次の定理は本講演の内容に直接は関係しないため, 事実の紹介のみに留めておく.

**定理 1.3** (M. Kontsevich, [Kon03]). 可微分多様体  $M$  上の全ての Poisson 構造は  $C^\infty(M)$  の変形量子化から得られる.

## 2 量子群とその作用

以下、可逆元  $q$  に対して  $q$  整数や  $q$  二項係数を次のように定義する：

$$[n]_q = \frac{q^n - q^{-n}}{q - q^{-1}}, \quad \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \frac{[n]_q!}{[k]_q! [n-k]_q!}.$$

$\mathfrak{g}$  を複素半単純 Lie 代数,  $\mathfrak{h}$  をその Cartan 部分代数,  $R = R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$  を対応するルート系, さらに正系  $R^+$  を固定し, 単純ルートの集合  $\Delta$  をとる. また Killing 形式が  $\mathfrak{h}^*$  に誘導する双線型形式を規格化し, 短ルートの長さが  $\sqrt{2}$  となるようにする. こうして得られる  $\mathfrak{h}^*$  上の双線型形式を  $(-, -)$  とする. 以下  $\Delta = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r\}$  とし,  $d_i$  と  $a_{ij}$  を次のように定める (これらは自動的に整数になる)：

$$d_i = \frac{(\alpha_i, \alpha_i)}{2}, \quad a_{ij} = \frac{2(\alpha_i, \alpha_j)}{(\alpha_i, \alpha_i)}.$$

これらの記号のもと,  $U_h(\mathfrak{g})$  を生成元  $E_i, F_i, H_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) と次の関係式により定まる完備位相  $\mathbb{C}[[h]]$  代数として定める：

$$\begin{aligned} [H_i, H_j] &= 0, \\ [H_i, E_j] &= a_{ij} E_j, \\ [H_i, F_j] &= -a_{ij} F_j, \\ [E_i, F_j] &= \delta_{ij} \frac{\sinh(d_i H_i h)}{\sinh(d_i h)}, \\ \sum_{k=0}^{1-a_{ij}} (-1)^k \begin{bmatrix} 1-a_{ij} \\ k \end{bmatrix}_{e^{d_i h}} E_i^{1-a_{ij}-k} E_j E_i^k &= 0, \\ \sum_{k=0}^{1-a_{ij}} (-1)^k \begin{bmatrix} 1-a_{ij} \\ k \end{bmatrix}_{e^{d_i h}} F_i^{1-a_{ij}-k} F_j F_i^k &= 0. \end{aligned}$$

このとき自然に  $U(\mathfrak{h})[[h]] \subset U_h(\mathfrak{g})$  である.

**定義 2.1.** 複素半単純 Lie 代数  $\mathfrak{g}$  の  $h$  進 Drinfeld-神保変形 ( $h$ -adic Drinfeld-Jimbo deformation) または  $h$  進量子包絡環 ( $h$ -adic quantum enveloping algebra) とは,  $U_h(\mathfrak{g})$  に次の余積  $\Delta$ , 対蹠射  $S$ , 余単位射  $\varepsilon$  を与えて位相 Hopf 代数としたもののことである：

$$\begin{aligned} \Delta(H) &= H \otimes 1 + 1 \otimes H, & S(H) &= -H, & \varepsilon(H) &= 0, \\ \Delta(E_i) &= E_i \otimes e^{d_i H_i h} + 1 \otimes E_i, & S(E_i) &= -E_i e^{-d_i H_i h}, & \varepsilon(E_i) &= 0, \\ \Delta(F_i) &= F_i \otimes 1 + e^{-d_i H_i h} \otimes F_i, & S(F_i) &= -e^{d_i H_i h} F_i, & \varepsilon(F_i) &= 0. \end{aligned}$$

さて, 位相的  $\mathbb{C}[[h]]$  代数の同型  $\varphi: U_h(\mathfrak{g}) \rightarrow U(\mathfrak{g})[[h]]$  と  $F \in U(\mathfrak{g} \times \mathfrak{g})[[h]]$  であって次を満たすものが存在することが知られている：

- $F = 1 + rh + \dots$ . ただし  $r \in \wedge^2 \mathfrak{g}$
- $(\varphi \otimes \varphi)\Delta\varphi^{-1} = F\Delta(-)F^{-1}$ .

またこのような  $r$  は一意であり, **標準  $r$  行列** (standard r-matrix) と呼ばれる. 具体的には次のように書くことができる.

$$r = \sum_{\alpha \in R^+} d_\alpha E_\alpha \wedge F_\alpha = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in R^+} d_\alpha (E_\alpha \otimes F_\alpha - F_\alpha \otimes E_\alpha), \quad \text{where } d_\alpha = \frac{(\alpha, \alpha)}{2}.$$

このことを用いると,  $\mathfrak{g}$  に対応する単連結複素半単純 Lie 群  $G$  について  $\mathcal{O}(G)$  の変形量子化を構成することができる. まず  $U(\mathfrak{g})$  の元を  $G$  上の左不変微分作用素と考えると,  $f \in \mathcal{O}(G)$  を  $X \mapsto (Xf)(e)$  により  $U(\mathfrak{g})^*$  の元とみなす. するとこれは  $\mathcal{O}(G)$  の  $U(\mathfrak{g})^*$  への埋め込みを与える. このとき  $\Delta^*: (U(\mathfrak{g}) \otimes U(\mathfrak{g}))^* \rightarrow U(\mathfrak{g})^*$  は  $\mathcal{O}(G) \times \mathcal{O}(G)$  上では積に一致している. そこで同様に  $\mathcal{O}(G)[[\hbar]]$  を  $(U(\mathfrak{g})[[\hbar]])^*$  に埋め込み,  $\Delta$  の代わりに  $F\Delta(-)F^{-1}$  による引き戻しを考える. するとこれにより  $\mathcal{O}(G)$  の変形量子化  $\mathcal{O}_\hbar(G)$  が定まり, その半古典極限は

$$(\pi_G)_x = dr_x(r) - dl_x(r).$$

で与えられる. この Poisson 構造は  $G$  の演算と整合的であるため, 特に  $(G, \pi_G)$  は **Poisson-Lie 群** (Poisson-Lie group) となる. 同様のことは  $G$  のコンパクト実形  $K$  に対しても考えることができる.

**定義 2.2.**  $A$  を左  $U(\mathfrak{g})$  作用付き可換  $\mathbb{C}$  代数とする. すなわち左  $U(\mathfrak{g})$  加群構造  $(a, x) \in A \times U(\mathfrak{g}) \mapsto a \triangleleft x \in A$  であって次を満たすものを備えているとする:

$$\begin{aligned} x \triangleright 1 &= \varepsilon(x)1, \\ x \triangleright ab &= \sum_i (x_{1,i} \triangleright a)(x_{2,i} \triangleright b), \quad \text{where } \Delta(x) = \sum_i x_{1,i} \otimes x_{2,i}. \end{aligned}$$

このとき  $A$  の  $G_\hbar$  **同変変形量子化** ( $G_\hbar$ -equivariant deformation quantization) とは,  $A$  の変形量子化  $A_\hbar$  とその上の連続左  $U_\hbar(\mathfrak{g})$  作用であって次を満たすもののことである:

- (i)  $A_\hbar$  上の左  $U_\hbar(\mathfrak{g})$  作用は  $A_\hbar/hA_\hbar$  に左  $U(\mathfrak{g})$  作用を誘導する.
- (ii) 標準的な同型  $A \cong A_\hbar/hA_\hbar$  は左  $U(\mathfrak{g})$  作用を保つ.

また右  $U(\mathfrak{g})$  作用付き可換  $\mathbb{C}$  代数についても同様にして定義する.

$G$  のコンパクト実形  $K$  が右作用する多様体  $M$  が与えられると,  $C^\infty(M)$  は自然に左  $U(\mathfrak{g})$  作用を持つ. そこでその  $G_\hbar$  同変変形量子化を考えると, 既に述べたようにその半古典極限がとれる. これは次の意味でもとの  $K$  作用と整合的である: 作用  $M \times K \rightarrow M$  は Poisson 多様体の射となる.

**例.** equatorial Podleś 球面は次のようにして左  $U_\hbar(\mathfrak{sl}_2)$  作用付き  $\mathbb{C}[[\hbar]]$  代数となる:

$$\begin{aligned} E \triangleright X &= 0, & F \triangleright X &= e^{h/2}[2]_{e^h} Z, & H \triangleright X &= 2X, \\ E \triangleright Y &= -q^{-h/2}[2]_{e^h} Z, & F \triangleright Y &= 0, & H \triangleright Y &= -2Y, \\ E \triangleright Z &= e^{-h/2} X, & F \triangleright Z &= -e^{-h/2} Y, & H \triangleright Z &= 0. \end{aligned}$$

このとき半古典極限として得られる  $SU(2)$  作用付きの Poisson 多様体は, Poisson-Lie 群  $SU(2)$  の商 Poisson 多様体  $SO(2) \backslash SU(2)$  に他ならない.

### 3 籠多様体の同変変形量子化

$S$  を  $\Delta$  の有限部分集合とし,  $P_S$  を対応する  $G$  の放物型部分群,  $L_S$  をその Levi 因子とする. また  $L_S$  に対応する  $\mathfrak{g}$  の部分 Lie 代数を  $\mathfrak{l}_S$  とする. このとき  $K$  作用付き多様体として籠多様体  $G/P_S$  を考えると,  $C^\infty(G/P_S)$  の  $K$  有限部分は自然に右  $U(\mathfrak{g})$  作用付可換  $\mathbb{C}$  代数として  $\mathcal{O}(G/L_S)$  と同一視される.

このことを踏まえて,  $\mathcal{O}(G/L_S)$  の  $G_h$  同変変形量子化としてどのようなものがあるかを考える. ただしここでは簡単のため  $S = \emptyset$ , つまり  $P$  が Borel 部分群で  $L_S$  が極大トーラス場合についてのみ考える. このとき  $G/B$  は  $K/T$  と同一視できることに注意する.

まず  $X_{K/T}$  を次のように定義する:

$$X_{K/T} = \{(\varphi_\alpha)_{\alpha \in R^+} \mid \varphi_\alpha \varphi_\beta + 1 = \varphi_{\alpha+\beta}(\varphi_\alpha + \varphi_\beta) \text{ when } \alpha, \beta, \alpha + \beta \in R^+\}.$$

これはアファイン代数多様体であり, 次のように  $K/T$  上の Poisson 構造で  $K$  作用と整合的なものの空間と思える.

**命題 3.1** (J. Donin, [Do01]). 任意の  $\varphi = (\varphi_\alpha)_{\alpha \in R^+} \in X_{K/T}$  について,

$$\pi_\varphi = dr_{K/T}(r) + \sum_{\alpha \in R^+} \varphi_\alpha d_\alpha dl_k(E_\alpha \wedge F_\alpha)$$

は  $K/T$  上の Poisson 構造であって  $K$  の Poisson-Lie 群構造と整合的なものを与える. また全てのそのような  $K/T$  上の Poisson 構造はこのように表せる.

また同論文 [Do01] の中で, J. Donin は各  $\varphi \in X_{K/T}$  について対応する (一般の) 籠多様体の  $G_h$  同変変形量子化が存在することを示し, さらに完全な分類定理も示した. ただしこれは  $X_{K/T}$  の記述に基づいて同変変形量子化に関わるコホモロジーの消滅を示したものであり, 非構成的である.

主結果はこの同変変形量子化の具体的な構成を与えたことである. 方針としては K. De Commer による複素パラメーターの場合の構成 ([DC13]) を修正し, 放物型誘導表現の類似を通じて構成を行った.

以下その構成を  $U_h(\mathfrak{sl}_3)$  の場合に述べる. まず  $\varphi \in X_{SU(3)/T}$  に対して完備位相  $\mathbb{C}[[h]]$  代数  $U_{h,\varphi}(\mathfrak{sl}_3)$  を次のように定義する: 生成元は  $H_\alpha, H_\beta, E_\alpha, E_{\alpha+\beta}, E_\beta, \tilde{F}_\alpha, \tilde{F}_{\alpha+\beta}, \tilde{F}_\beta$  であり, 定義関係式は次のとおり:

$$\begin{aligned} [H_\alpha, E_\alpha] &= 2E_\alpha, & [H_\alpha, E_\beta] &= -E_\beta, \\ [H_\alpha, \tilde{F}_\alpha] &= -2\tilde{F}_\alpha, & [H_\alpha, \tilde{F}_\beta] &= \tilde{F}_\beta, \\ [H_\beta, E_\alpha] &= -E_\alpha, & [H_\beta, E_\beta] &= 2E_\beta, \\ [H_\beta, \tilde{F}_\alpha] &= \tilde{F}_\alpha, & [H_\beta, \tilde{F}_\beta] &= -2\tilde{F}_\beta, \\ E_\beta E_\alpha - e^h E_\alpha E_\beta &= E_{\alpha+\beta}, & \tilde{F}_\alpha \tilde{F}_\beta - e^{-h} \tilde{F}_\beta \tilde{F}_\alpha &= (\varphi_\alpha + \varphi_\beta) h \tilde{F}_{\alpha+\beta}, \\ E_{\alpha+\beta} E_\alpha - e^{-h} E_\alpha E_{\alpha+\beta} &= 0, & \tilde{F}_\alpha \tilde{F}_{\alpha+\beta} - e^h \tilde{F}_{\alpha+\beta} \tilde{F}_\alpha &= 0, \\ E_\beta E_{\alpha+\beta} - e^{-h} E_{\alpha+\beta} E_\beta &= 0, & \tilde{F}_{\alpha+\beta} \tilde{F}_\beta - e^h \tilde{F}_\beta \tilde{F}_{\alpha+\beta} &= 0, \\ [H_\alpha, H_\beta] &= [E_\alpha, \tilde{F}_\beta] = [E_\beta, \tilde{F}_\alpha] = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[E_{\alpha+\beta}, \tilde{F}_\alpha] &= (\varphi_\alpha - 1)h e^{-H_\alpha h} E_\beta, & [E_\alpha, \tilde{F}_{\alpha+\beta}] &= \frac{\varphi_{\alpha+\beta} + 1}{\varphi_\beta + 1} \tilde{F}_\beta e^{H_\alpha h}, \\
[E_{\alpha+\beta}, \tilde{F}_\beta] &= -(\varphi_\beta + 1)h E_\alpha e^{H_\beta h}, & [E_\beta, \tilde{F}_{\alpha+\beta}] &= -\frac{(\varphi_\beta - 1)(\varphi_{\alpha+\beta} + 1)}{(\varphi_\alpha + 1)(\varphi_\beta + 1)} e^{-H_\beta h} \tilde{F}_\alpha, \\
[E_\gamma, \tilde{F}_\gamma] &= \varphi_\gamma h \frac{\sinh(H_\gamma h)}{\sinh(h)} + h \frac{\cosh(H_\gamma h)}{\sinh(h)}, & (\gamma &= \alpha, \beta, \alpha + \beta)
\end{aligned}$$

また  $U_{h,\varphi}(\mathfrak{sl}_3)$  は自然な左  $U_h(\mathfrak{sl}_3)$  余作用を持ち、特に  $U_h(\mathfrak{sl}_3)$  加群  $M$  と  $U_{h,\varphi}(\mathfrak{sl}_3)$  加群  $N$  のテンソル積  $M \otimes N$  は自然に  $U_{h,\varphi}(\mathfrak{sl}_3)$  加群となる。

さて、 $U_h(\mathfrak{h})$  が自然に  $U_{h,\varphi}(\mathfrak{sl}_3)$  に含まれていることに注意すると、放物型誘導関手  $\text{Ind}_\varphi: U_h(\mathfrak{h})\text{-Mod} \rightarrow U_{h,\varphi}(\mathfrak{sl}_3)\text{-Mod}$  が定義できる。次の補題が重要である。

**補題 3.2.**  $V, V'$  を  $U_h(\mathfrak{h})$  の有限次元可積分表現、 $W$  を  $U_h(\mathfrak{g})$  の有限次元可積分表現とする。このとき次の自然な同型がある：

$$\text{Hom}_{U_h(\mathfrak{h})}(V', W \otimes V) \cong \text{Hom}_{U_{h,\varphi}(\mathfrak{sl}_3)}(\text{Ind}_\varphi V', W \otimes \text{Ind}_\varphi V).$$

そこで  $V, W$  に対して  $\text{id}_{W \otimes V}: (W \otimes V) \rightarrow W \otimes V$  に対応する準同型を  $U_{W,V}: \text{Ind}_\varphi(W \otimes V) \rightarrow W \otimes \text{Ind}_\varphi V$  とし、さらに  $(\text{id}_W \otimes U_{W',V})U_{W,W' \otimes V}$  に対応する  $U_h(\mathfrak{h})$  加群  $W \otimes W' \otimes V$  の自己準同型を  $\Psi_{W,W',V}$  とする。このとき（同様の構成が一般の  $\mathfrak{g}$  に対しても定義され）次の主張が成り立つ。

**定理 3.3.**  $\Psi \in U_h(\mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \times \mathfrak{h})^{\mathfrak{h}} \widehat{\otimes} \mathcal{O}(X_{K/T})[[\hbar]]$  であって、その  $W \otimes W' \otimes V$  への作用が  $\Psi_{W,W',V}$  となるものが唯一つ存在する。さらにこれは次を満たす。

- (i)  $(1 \otimes \Psi)(\text{id} \otimes \Delta \otimes \text{id})(\Psi) = (\text{id} \otimes \text{id} \otimes \Delta)(\Psi)(\Delta \otimes \text{id} \otimes \text{id})(\Psi)$ .
- (ii)  $(\varepsilon \otimes \text{id} \otimes \text{id})(\Psi) = (\text{id} \otimes \varepsilon \otimes \text{id})(\Psi) = 1$ .
- (iii)  $\Psi = 1 - \hbar \sum_{\alpha \in R^+} (1 + \varphi_\alpha) d_\alpha E_\alpha \otimes F_\alpha \otimes 1 + \dots$ .

**注意.** ここで  $\Psi$  が  $\mathcal{O}(X_{K/T})$  係数の元としてとれることは非自明である。実際  $U_{h,\varphi}(\mathfrak{sl}_3)$  の定義関係式では  $\varphi + 1$  が分母に登場するため、a priori には  $\varphi$  の多項式でとれることは分からない。

この  $\Psi$  を用いると、 $\mathcal{O}(G/H)$  の  $G_h$  同変変形量子化が構成できる。まず標準的な  $G_h$  同変変形量子化  $\mathcal{O}_h(G/H)$  は次のようにスペクトル分解を持つ：

$$\mathcal{O}_h(G/H) \cong \bigoplus_{W: \text{irr}} W^{U_h(\mathfrak{h})} \otimes W^*$$

このとき  $\mathcal{O}_h(G/H)$  の積は次のように表現のテンソル積と同一視される：

$$(w \otimes f)(w' \otimes f') = (w \otimes w') \otimes (f \otimes f').$$

（ここで右辺は  $W \otimes W'$  に対応するため一般に既約でないが、ここでは無視する）。そこで  $\varphi \in X_{K/T}$  に対して  $\mathcal{O}_h(G/H)$  上の新たな積  $*_\varphi$  を

$$(w \otimes f) *_\varphi (w' \otimes f') = \Psi(\varphi)_{W,W',1}^{-1} (w \otimes w') \otimes (f \otimes f')$$

とする。この変形量子化を  $\mathcal{O}_{h,\varphi}(G/H)$  とすると、その半古典極限が丁度  $\varphi$  に対応する Poisson 多様体  $K/T$  になっている。

## 参考文献

- [DC13] K. De Commer, *Representation theory of quantized enveloping algebras with interpolating real structure*, SIGMA **9** (2013), 081 (20 pages).
- [DCN15] K. De Commer, S. Neshveyev, *Quantum flag manifolds as quotients of degenerate quantized universal enveloping algebras*, Transform. Groups **20** (3) (2015), 725-742.
- [DCNTY19] K. De Commer, S. Neshveyev, L. Tuset, M. Yamashita, *Ribbon braided module categories, quantum symmetric pairs and Knizhnik-Zamolodchikov equations*, Comm. Math. Phys. **367** (2019), no. 3, 717-769.
- [DCNTY20] K. De Commer, S. Neshveyev, L. Tuset, M. Yamashita, *Comparison of quantization of symmetric spaces, cyclotomic Knizhnik-Zamolodchikov equations and Letzter-Kolb coideals*, Forum Math. Pi. **11** (2020), 1-79.
- [Do01] J. Donin,  *$U_h(\mathfrak{g})$ -invariant quantization of coadjoint orbits and vector bundles over them*, J. Geom. Phys. **38**(1) (2001). 54-80.
- [DGS96] J. Donin, G. D. Gurevich, S. Shnider, *Quantization of function algebras on semi-simple orbits in  $\mathfrak{g}^*$* , preprint, arXiv:q-alg/9607008.
- [DM05] J. Donin, A. Mudrov, *Dynamical Yang-Baxter equation and quantum vector bundles*, Comm. Math. Phys. **254** (2005), 719-760.
- [Kon03] M. Kontsevich, *Deformation quantization of Poisson Manifolds*, Lett. Math. Phys. **66** (2003), 157-216.
- [KS97] A. Klimyk, K. Schmüdgen, *Quantum groups and their representations*, Texts and Monographs in Physics, Springer-Verlag, Berlin (1997).
- [KS98] L. I. Korogodski, Y. S. Soibelman, *Algebras of functions on quantum groups: Part I*, Mathematical Surveys and Monographs **56**, American Mathematical Society, Providence, RI (1998).
- [KST07] E. Karolinsky, A. Stolin, V. Tarasov, *Irreducible highest weight modules and equivariant quantization*, Adv. Math. **211** (2007), 266-283.
- [VY20] C. Voigt, R. Yuncken, *Complex semisimple quantum groups and representation theory*, Lecture Notes in Mathematics **2264**, Springer International Publishing, 376+X pages.