

定曲率を持つ多面体

九州大学 大学院数理学府 数理学専攻
久川創人 (Soto HISAKAWA) *

概要

\mathbb{R}^3 にはめ込まれた閉曲面について、ガウス曲率が一定値であるものは向き付け可能で種数が 0 であるものしか存在しない。一方同じ二次元閉多様体である多面体には、ガウス曲率に相当する概念として各頂点での不足角が存在し、向き付け可能であるものに対しては任意の種数で不足角が一定値である多面体が存在することが河井 (2022) らによって証明された。本講演では向き付け不可能な任意の種数の多面体について、具体的に構成することで不足角が一定値であるものが存在することを示す。

1 導入

閉曲面のガウス曲率における離散的なアナロジーとして、多面体の不足角を考える。不足角は多面体 P の各頂点 $v \in V$ において定義される実数である。頂点 v に集まっている角度の和を σ_v とすると、頂点 v の不足角 δ_v は 2π からの σ_v の不足、つまり以下によって定義される。

$$\delta_v := 2\pi - \sigma_v \quad (1)$$

また、大域的な性質として、多面体 P のオイラー標数 $\chi(P)$ についてデカルトの不足角定理

$$\sum_{v \in V} \delta_v := 2\pi\chi(P) \quad (2)$$

が成立する [1].

一方、多面体と同じ二次元閉多様体である \mathbb{R}^3 にはめ込まれた閉曲面 S についてみる。ガウス曲率 K は各点において、法曲率の最小値と最大値の積として定義される実数である。そして、多面体の不足角におけるデカルトの不足角定理と同様に大域的な性質として、閉曲面 S のオイラー標数 $\chi(S)$ について Gauss-Bonnet の定理

$$\iint K d\mu = 2\pi\chi(S) \quad (3)$$

が成立する。 (μ は面積要素)

任意の二次元閉多様体は球 S^2 , トーラス T^2 , 射影平面 RP^2 を用いて位相的に以下のようにに分類できる [2].

$$\begin{cases} S^2 \# T_1^2 \# \cdots \# T_g^2 & (g \geq 0) \\ RP_1^2 \# RP_2^2 \# \cdots \# RP_g^2 & (g \geq 1) \end{cases} \quad (4)$$

* E-mail: hisakawa.souto@gmail.com

g を二次元閉多様体の種数とする. ここで, 2つの二次元閉多様体 M, N の連結和に対し,

$$\chi(M\#N) = \begin{cases} \chi(M) + \chi(N) - 2 & (M \neq N) \\ \chi(M) - 2 & (M = N) \end{cases} \quad (5)$$

$$M\#N \text{ が向き付け可能} \Leftrightarrow M \text{ と } N \text{ が共に向き付け可能} \quad (6)$$

である. そのため,

$$\chi(M) = \begin{cases} 2 - 2g & (\text{向き付け可能}) (g \geq 0) \\ 2 - g & (\text{向き付け不可能}) (g \geq 1) \end{cases} \quad (7)$$

となる. この分類に対し, ガウス曲率が一定値である \mathbb{R}^3 にはめ込まれた閉曲面においては向き付け可能で種数が 0 であるものしか存在しない. なぜなら, 閉曲面上の最も原点から遠い点ではガウス曲率が正になるが, オイラー標数が 1 以下の場合には必ずガウス曲率が負になる点が存在するためである.

ところで, 多面体における各頂点の不足角が一定値である多面体を閉曲面のアナロジーとして, 定曲率多面体と呼ぶ. すると, 正多面体や半正多面体等によって, 向きづけ可能で種数が 0 である定曲率多面体が存在するだけでなく, Henry Segerman の Hinged Flat Torus[3] や, Octamioctahedron[4] 等 (図 1) によって, 向き付け可能で種数が 1 である定曲率多面体が知られており, 閉曲面におけるガウス曲率とは結果が異なる. さらに, 向き付け可能な多面体に対しては, 河井によって 2 以上の任意の種数に対して, 定曲率多面体が構成された (図 2)[5]. これにより, 向き付け可能な任意の種数に対して, 定曲率多面体の存在が示された. 一方, 向き付け不可能である多面体については, 1, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 20, 30, 58 等の断片的な種数に対して, 定曲率多面体が知られている (図 3).

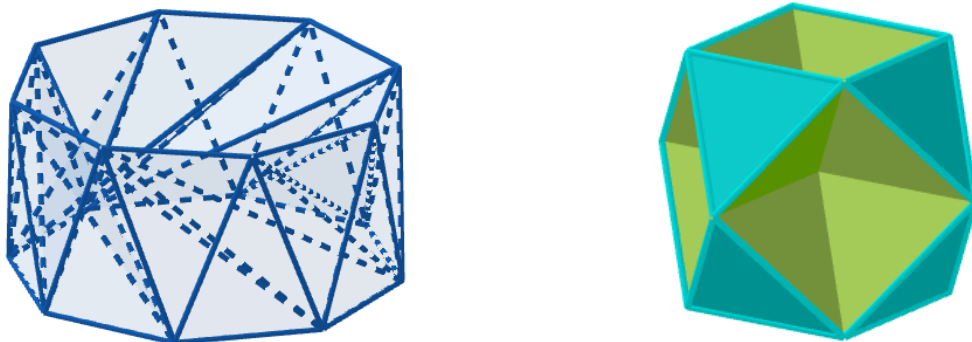


図 1 向き付け可能で種数が 1 である定曲率多面体の例 [6],[4]

そこで, 本講演では向き付け不可能な多面体に対して, 任意の種数で多面体を構成することにより, その存在性を示す. さらに未解決の問題である, 向き付け可否の両方において各種数に対する定曲率多面体の最小頂点数について, 現状を紹介する.

作成した多面体は私の geogebra のページ <https://www.geogebra.org/u/hisakawa> にて公開している. また, 本研究に際し指導教員の鍛冶静雄教授には研究の進め方や論文執筆等, 多大なご指導, ご助言を賜りました. 深く感謝いたします. 研究室や事務の方をはじめとする, お世話になりました大学関係者の方にもこの場をお借りして深くお礼申し上げます.

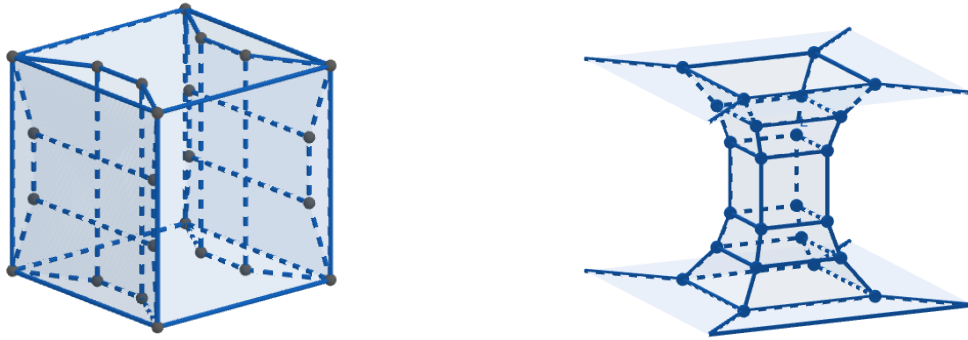


図2 向き付け可能で種数が2である定曲率多面体 (左), 右の穴を開けることで, 定曲率を保ったまま2以上の任意の種数の多面体を構成できる [5]

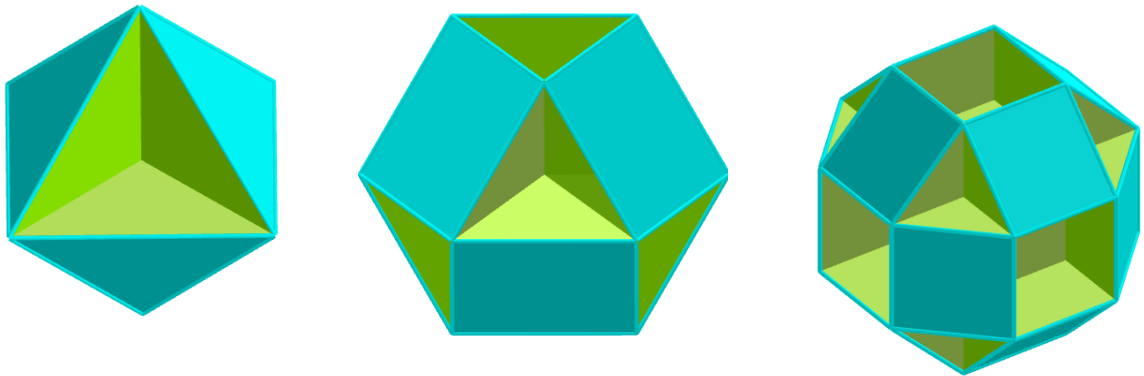


図3 向き付け不可能である定曲率多面体の例. 左から順に, Tetrahemihexahedron(射影平面), Cubohemioctahedron, Rhombihexahedron. 青の面を3つだけ通る帯はメビウスの帯となる [4]

主結果

向き付け不可能な任意の種数について, 定曲率多面体を構成した. そのため以下の定理が成立する.

定理:

向き付けの可否によらず任意の種数について, 定曲率多面体が存在する.

2 向き付け不可能である定曲率多面体

存在するか不明であったものは, 種数が2, 4以上の一般の偶数, 3以上の任意の奇数であるものであったため, それらに対し定曲率多面体を構成した.

2.1 種数が偶数である定曲率多面体

まず、種数が2で不足角が一定値である多面体として、図4を構成した。この多面体は2つの射影平面 RP_1^2, RP_2^2 の連結和 $RP_1^2 \# RP_2^2$ を取ることで、向き付け不可能性と種数2を実現し、さらに2つのパラメータ r, h を調整することで各点での不足角を0にしている。

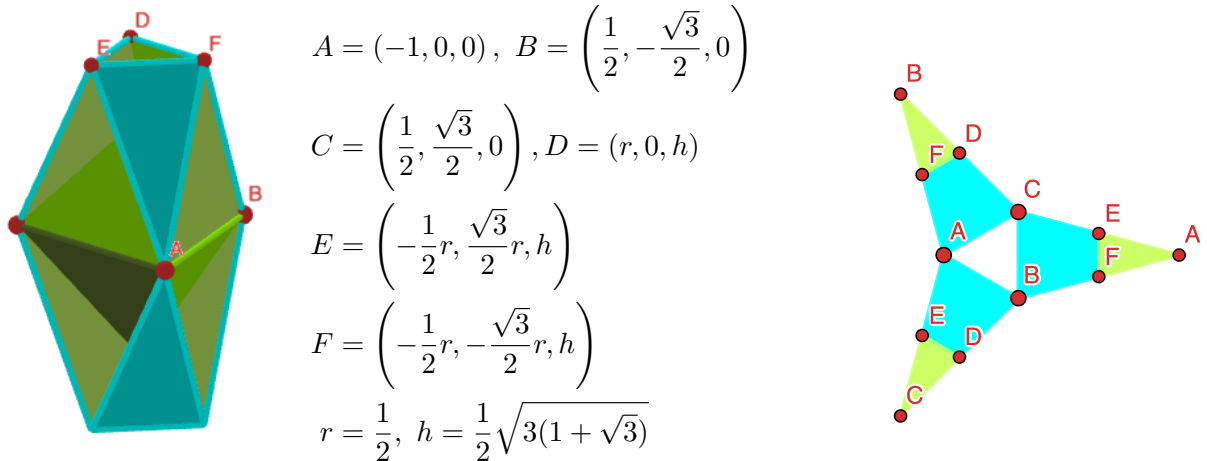


図4 向き付け不可能で種数が2である定曲率多面体 (不足角0)

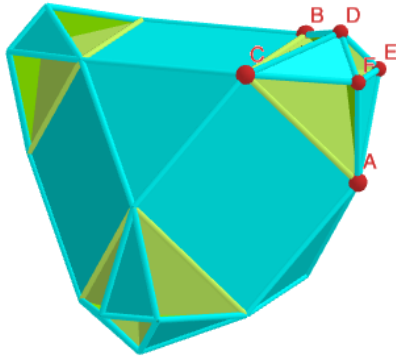
次に、立方八面体 S^2 に4つの射影平面 $RP_1^2, RP_2^2, RP_3^2, RP_4^2$ の連結和 $S^2 \# RP_1^2 \# RP_2^2 \# RP_3^2 \# RP_4^2$ をとることで、図5の向き付け不可能、種数が4である定曲率多面体を構成した。一般に多面体 P に対して1つの穴を開けることは、穴の部分に相当する多面体を S'^2 とすると、 $(P \# S') \# (P \# S')$ となる。そのため、 $\chi((P \# S') \# (P \# S')) = \chi(P) - 2$ より、多面体 P に穴を開けると、種数 P と向き付け可能性が一致し、オイラー標数が -2 となる多面体を構成することができる。また、図5の各頂点の不足角は $-\frac{\pi}{6}$ であるため、図7の多面体に正十二各柱状の穴を開けることで、向き付け不可能で4以上の任意の偶数の種数の定曲率多面体を構成した。

2.2 種数が3以上の奇数である定曲率多面体

種数が3の多面体を構成するにあたって、 S^2 と同相な台形状の多面体と3つの射影平面の連結和を取ることで、図6を作成した。この多面体は、各頂点の不足角が $-\frac{\pi}{9}$ であるため、正十八角柱状の穴を平行な2面に対して開けることで、任意の3以上の奇数の種数に対する定曲率多面体を構成した。

3 最小頂点数での定曲率多面体の実現

向き付けの可否と各種数における定曲率多面体について、最小の頂点数が何であるかはまだ未解決な問題である。この問題に対して、現状判明している定曲率多面体の頂点数の最小値を提示する。



$$A = (\sqrt{3}, 0, 0), B = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \sqrt{\frac{3}{2}}\right),$$

$$C = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, \sqrt{\frac{3}{2}}\right)$$

$$D = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}r + \sqrt{\frac{2}{3}}h + \frac{2\sqrt{3}}{3}, 0, \sqrt{\frac{2}{3}}r + \frac{1}{\sqrt{3}}h + \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$$

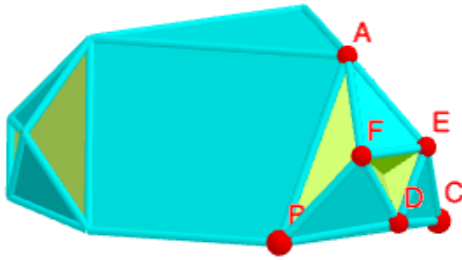
$$E = \left(\frac{1}{2\sqrt{3}}r + \sqrt{\frac{2}{3}}h + \frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{2}r, -\frac{1}{\sqrt{6}}r + \frac{1}{\sqrt{3}}h + \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$$

$$F = \left(\frac{1}{2\sqrt{3}}r + \sqrt{\frac{2}{3}}h + \frac{2\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{2}r, -\frac{1}{\sqrt{6}}r + \frac{1}{\sqrt{3}}h + \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$$

$$r = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{2} - \sqrt{3})$$

$$h = \sqrt{\frac{1}{2}(5 - 3\sqrt{2} + 3\sqrt{3} - 2\sqrt{6})}$$

図5 向き付け不可能で種数が4である定曲率多面体 (不足角 $-\frac{\pi}{6}$)



$$A = \left(\frac{3}{2} - \sqrt{\frac{9}{4} - h'^2}, 0, h'\right), B = \left(\frac{3}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right), C = \left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)$$

$$D = \left(\frac{3}{2} + (r - \frac{1}{2})\sqrt{1 - \frac{4}{9}h'^2} + \frac{2}{3}hh', 0, (r - \frac{1}{2})(-\frac{2}{3}h') + h\sqrt{1 - \frac{4}{9}h'^2}\right)$$

$$E = \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}(r+1)\sqrt{1 - \frac{4}{9}h'^2} + \frac{2}{3}hh', \frac{\sqrt{3}}{2}r, -\frac{1}{2}(r+1)(-\frac{2}{3}h') + h\sqrt{1 - \frac{4}{9}h'^2}\right)$$

$$F = \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}(r+1)\sqrt{1 - \frac{4}{9}h'^2} + \frac{2}{3}hh', -\frac{\sqrt{3}}{2}r, -\frac{1}{2}(r+1)(-\frac{2}{3}h') + h\sqrt{1 - \frac{4}{9}h'^2}\right)$$

$$r = \frac{2\sin(\frac{\pi}{9})}{1 + 2\sin(\frac{\pi}{9})}$$

$$h' = \sqrt{2(-2\sin(\frac{\pi}{18})^2 + \sin(\frac{\pi}{18}) + 1)}$$

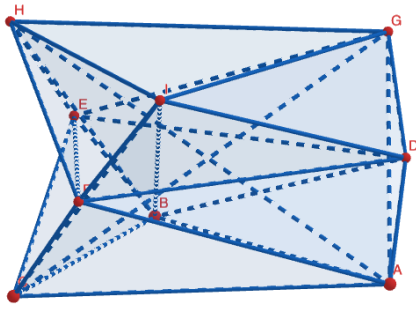
$$h = \frac{\sqrt{2(-2\sin(\frac{\pi}{9})^2 + \sin(\frac{\pi}{9}) + 1)}}{2\sin(\frac{\pi}{9}) + 1}$$

図6 向き付け不可能で種数が3である定曲率多面体 (不足角 $-\frac{\pi}{9}$)

3.1 向け付け可能な定曲率多面体に対する頂点数

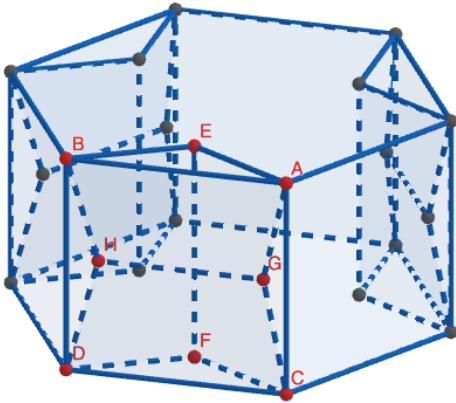
種数0に対する定曲率多面体の最小頂点数は正四面体の4である。種数1に対して、頂点数9の図7を構成した。これは、坪井の構成した多面体 [6] を変形したものである。種数2に対して、頂点数24である河井の結果2に対し、変形を行うことで頂点数16の定曲率多面体を構成した。これは各頂点の不足角が $-\frac{\pi}{8}$ であるため、種数を増やすために2つの平行な面を選んで穴を開けるという方法をとると、定曲率を維持するために穴の形状正十六角柱状の穴を開ける必要がある。しかし、側面が正方形である正 $2g$ 角柱に図8の様に穴を開けることで、頂点数を $8g$ とした。さらに、種数 $g \geq 5$ に対しては、正 g 角柱に図9の様に穴を開けることで、頂点数を $6g$ とした。また、種数4, 5, 6に限っては、図10の多面体によって、頂点数が $7g - 7$ となる。

自己交差を認めると、種数3, 4, 5, 9に対して既存の定曲率多面体で頂点数がそれぞれ24, 12, 20, 20であるものが知られている [4]。また、種数1に対して頂点数6である図11を



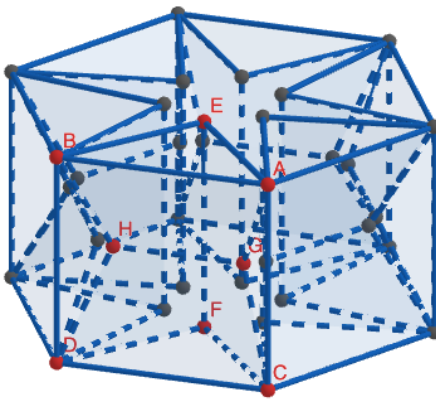
$$\begin{aligned}
 A &= (1, 0, 0), \quad B = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right), \quad C = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right) \\
 D &= \left(\cos\left(\frac{\pi}{8}\right), \sin\left(\frac{\pi}{8}\right), \frac{1}{2}\right), \quad E = \left(\cos\left(\frac{19\pi}{24}\right), \sin\left(\frac{19\pi}{24}\right), \frac{1}{2}\right) \\
 F &= \left(\cos\left(\frac{35\pi}{24}\right), \sin\left(\frac{35\pi}{24}\right), \frac{1}{2}\right), \quad G = \left(\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right), \sin\left(\frac{11\pi}{12}\right), 1\right) \\
 H &= \left(\cos\left(\frac{19\pi}{12}\right), \sin\left(\frac{19\pi}{12}\right), 1\right), \quad I = \left(\cos\left(\frac{27\pi}{12}\right), \sin\left(\frac{11\pi}{27}\right), 1\right)
 \end{aligned}$$

図7 向き付け可能で種数が1である頂点数9の定曲率多面体 (不足角0)



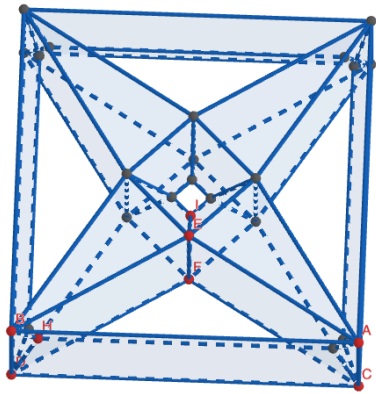
$$\begin{aligned}
 A &= (1, -\tan(a), 2), \quad B = (-1, -\tan(a), 2) \\
 C &= (1, -\tan(a), 0), \quad D = (-1, -\tan(a), 0) \\
 E &= \left(0, -\tan(a) + \tan\left(\frac{a}{2}\right), 2\right) \\
 F &= \left(0, -\tan(a) + \tan\left(\frac{a}{2}\right), 0\right) \\
 G &= \left(1 - \frac{1}{2} \sin\left(\frac{a}{2}\right), -\tan(a) + \frac{1}{2} \sin\left(\frac{a}{2}\right) \tan\left(\frac{a}{2}\right), 1\right) \\
 H &= \left(-1 + \frac{1}{2} \sin\left(\frac{a}{2}\right), -\tan(a) + \frac{1}{2} \sin\left(\frac{a}{2}\right) \tan\left(\frac{a}{2}\right), 1\right) \\
 a &= \frac{g-1}{2g} \pi
 \end{aligned}$$

図8 向き付け可能で頂点数が $8g$ の定曲率多面体 ($g \geq 2$, 不足角 $-a$)



$$\begin{aligned}
 A &= \left(1, -\cot\left(\frac{\pi}{g}\right), 2\right), \quad B = \left(-1, -\cot\left(\frac{\pi}{g}\right), 2\right) \\
 C &= \left(1, -\cot\left(\frac{\pi}{g}\right), 0\right), \quad D = \left(-1, -\cot\left(\frac{\pi}{g}\right), 0\right) \\
 E &= \left(0, -\cot\left(\frac{\pi}{g}\right) + \tan\left(\frac{a}{2}\right), 2\right) \\
 F &= \left(0, -\cot\left(\frac{\pi}{g}\right) + \tan\left(\frac{a}{2}\right), 0\right) \\
 G &= \left(1 - \frac{1}{2} \sin\left(\frac{a}{2}\right), -\cot\left(\frac{\pi}{g}\right) + \frac{1}{2} \sin\left(\frac{a}{2}\right) \tan\left(\frac{a}{2}\right), 1\right) \\
 H &= \left(-1 + \frac{1}{2} \sin\left(\frac{a}{2}\right), -\cot\left(\frac{\pi}{g}\right) + \frac{1}{2} \sin\left(\frac{a}{2}\right) \tan\left(\frac{a}{2}\right), 1\right) \\
 a &= \frac{2-2g}{3g} \pi
 \end{aligned}$$

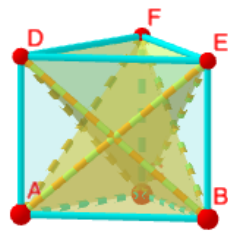
図9 向き付け可能で頂点数が $6g$ の定曲率多面体 ($g \geq 5$, 不足角 $-a$)



$$\begin{aligned}
 A &= \left(1, -\cot(b), \frac{2}{3}\right), B = \left(-1, -\cot(b), \frac{2}{3}\right) \\
 C &= (1, -\cot(b), 0), D = (-1, -\cot(b), 0), \\
 E &= \left(0, -\cot(b) + \cot\left(b + \frac{\pi}{14}\right), \frac{2}{3}\right) \\
 F &= \left(0, -\cot(b) + \cot\left(b + \frac{\pi}{14}\right), 0\right) \\
 G &= \left(x, -\cot(b) + (1-x)\cot\left(b + \frac{\pi}{14}\right), \frac{1}{3}\right) \\
 H &= \left(-x, -\cot(b) + (1-x)\cot\left(b + \frac{\pi}{14}\right), \frac{1}{3}\right) \\
 I &= \left(0, \cot\left(b + \frac{\pi}{14}\right) + \frac{\sqrt{2}h \sin\left(\frac{\pi}{7}\right)}{-\cos(2b) + \sin\left(\frac{3\pi}{14}\right)} - \cot(b), \frac{1}{3}\right) \\
 b &= \frac{\pi}{g-1}, x = 1 - \frac{1}{3(\sec\left(\frac{3\pi}{14}\right) + \csc\left(b + \frac{\pi}{14}\right)\tan\left(\frac{3\pi}{14}\right))}
 \end{aligned}$$

図 10 向き付け可能で頂点数が $7g - 7$ である定曲率多面体 ($g = 4, 5, 6$, 不足角 $-\frac{4\pi}{7}$)

構成した。



$$\begin{aligned}
 A &= (1, 0, 0), B = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right) \\
 C &= \left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right), D = \left(1, 0, \sqrt{\frac{3}{2}}\right) \\
 E &= \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \sqrt{\frac{3}{2}}\right), F = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, \sqrt{\frac{3}{2}}\right)
 \end{aligned}$$

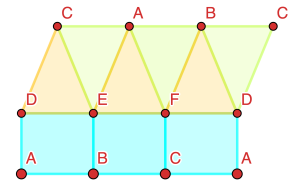


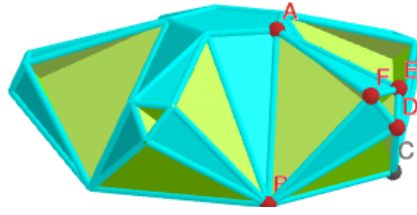
図 11 向き付け可能で種数が 1 である頂点数 6 の定曲率多面体 (不足角 0)

3.2 向け付け不可能な定曲率多面体に対する頂点数

まず、偶数の種数に対して紹介する。種数 4, 8, 10, 14, 20, 30, 58 に対して、それぞれ頂点数 12, 24, 30, 30, 60, 60, 60 である向きづけ不可能な定曲率多面体が存在することが知られている。種数が 4 で各頂点での不足角が $-\frac{\pi}{3}$ である Cubohemioctahedron(図 3) を用いて、平行な 2 面に正六角柱状の穴を開けることで、種数 $g \geq 4$ の定曲率多面体の頂点数を $6g - 12$ とできる。また、種数が 8 で各頂点での不足角が $-\frac{\pi}{2}$ である Rhombihexahedron(図 3) を用いて、平行な 2 面に正六角柱状の穴を開けることで、種数 $g \geq 8$ の定曲率多面体の頂点数を $4g - 8$ とできる。

次に、奇数の種数に対して紹介する。種数 1 に対して、頂点数 6 である Tetrahemihexahedron(図 3) が存在する。種数 3, 5, 7, 9, 11 に対し、頂点数が $5g$ である定曲率多面体(図 12) を構成した。ただ、対称性の強い射影平面を用いて構成するためには、連結和を取る S^2 と同相な多面体においても制約が必要となり、その制約を満たすものが存在するのは種数 11 までである。そのため、現状 $g \geq 13$ に対しては、種数 7 の多面体に、正七角柱状の穴を平行な 2 面に対して開けることにより、頂点数が $7g - 14$ となる。しかし、射影平面の対称性を崩すことで、 $g \geq 13$ に対しても最小の頂点数を $5g$ 以下

にできるのではないかと予想している.



$$\begin{aligned}
 A &= \left(-\sqrt{\frac{9}{4} - h^2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \tan\left(\frac{5}{4}a\right), 0, h \right) \\
 B &= \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \tan\left(\frac{5}{4}a\right), -\frac{\sqrt{3}}{2}, 0 \right), \quad C = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \tan\left(\frac{5}{4}a\right), \frac{\sqrt{3}}{2}, 0 \right) \\
 D &= \left(\left(r - \frac{1}{2}\right)\sqrt{1 - \frac{4}{9}h^2} - \frac{2}{3}h + \frac{\sqrt{3}}{2} \tan\left(\frac{5}{4}a\right), 0, \left(-r + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{3}h\right) + \sqrt{1 - \frac{4}{9}h^2} \right) \\
 E &= \left(\left(-\frac{r}{2} - \frac{1}{2}\right)\sqrt{1 - \frac{4}{9}h^2} - \frac{2}{3}h + \frac{\sqrt{3}}{2} \tan\left(\frac{5}{4}a\right), \frac{\sqrt{3}}{2}r, \left(\frac{r}{2} + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{3}h\right) + \sqrt{1 - \frac{4}{9}h^2} \right) \\
 F &= \left(\left(-\frac{r}{2} - \frac{1}{2}\right)\sqrt{1 - \frac{4}{9}h^2} - \frac{2}{3}h + \frac{\sqrt{3}}{2} \tan\left(\frac{5}{4}a\right), -\frac{\sqrt{3}}{2}r, \left(\frac{r}{2} + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{3}h\right) + \sqrt{1 - \frac{4}{9}h^2} \right) \\
 a &= \frac{2g - 4}{5g} \pi, \quad r = \frac{1}{2} \left(1 - \sqrt{\frac{11 + 14 \cos\left(\frac{a}{2}\right)}{1 + \cos\left(\frac{a}{2}\right)}} \tan\left(\frac{a}{4}\right) \right) \\
 h &= \frac{\sqrt{-3 + 6 \cos\left(\frac{a}{2}\right) + 6 \cos(a) - 6 \cos\left(\frac{3a}{2}\right) + 6 \cos\left(\frac{5a}{2}\right)}}{2 \cos\left(\frac{5}{4}a\right)}
 \end{aligned}$$

図 12 向き付け不可能で頂点数が $5g$ の定曲率多面体 ($3 \leq g \leq 11$ 不足角 $-a$)

また, 種数 3 に対しては射影平面とトーラスの連結和を取ることにより, 図 13 のような頂点数 12 の多面体のうち, 定曲率を持つものが存在していると予想している.

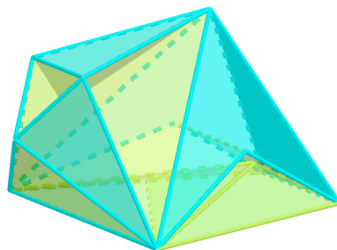


図 13 向き付け不可能で種数が 3 である頂点数 12 の多面体

3.3 頂点数のまとめ

今まで得られている定曲率多面体の最小頂点数は、以下と表 1 の通りである.

	2	1	0	-1	-2	-3	-4	-5	-6	...	-2k+1	-2k	
可 (自己交差無し)	4		9		16		24		21	...		$\begin{cases} 7k & (k = 4, 5) \\ 6k + 6 & (\text{others}) \end{cases}$	
可	4		6		16		24		12	...		$\begin{cases} 20 & (k = 4, 8) \\ 7k & (k = 5) \\ 6k + 6 & (\text{others}) \end{cases}$	
不可			6	9	15	12	25	24	35	24	...	$\begin{cases} 10k + 5 & (k < 6) \\ 14k - 7 & (k \geq 6) \end{cases}$	$\begin{cases} 30 & (k = 4, 6) \\ 60 & (k = 5, 9, 14, 28) \\ 4k - 4 & (\text{others}) \end{cases}$

表 1 向き付けの可否と各オイラー標数に対して、現状発見されている定曲率多面体の最小頂点数

$$\left. \begin{array}{l} \text{向き付け可能} \\ \text{自己交差を認めない} \\ \text{自己交差を認める} \end{array} \right\} \begin{cases} \begin{cases} 4 & (\text{if } g = 0) \\ 9 & (\text{if } g = 1) \\ 8g & (\text{if } g = 2, 3) \\ 7g - 7 & (\text{if } g = 4, 5, 6) \\ 6g & (\text{if } g \geq 7) \end{cases} \\ \begin{cases} 4 & (\text{if } g = 0) \\ 6 & (\text{if } g = 1) \\ 8g & (\text{if } g = 2, 3) \\ 12 & (\text{if } g = 4) \\ 20 & (\text{if } g = 5, 9) \\ 7g - 7 & (\text{if } g = 6) \\ 6g & (\text{others}) \end{cases} \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{向き付け不可能} \\ g \text{ が奇数} \\ g \text{ が偶数} \end{array} \right\} \begin{cases} \begin{cases} 6 & (\text{if } g = 1) \\ 5g & (\text{if } g = 3, 5, 7, 9, 11) \\ 7g - 14 & (\text{if } g \geq 13) \end{cases} \\ \begin{cases} 9 & (\text{if } g = 2) \\ 6g - 12 & (\text{if } g = 4, 6) \\ 30 & (\text{if } g = 10, 14) \\ 60 & (\text{if } g = 12, 20, 30, 58) \\ 4g - 8 & (\text{others}) \end{cases} \end{cases}$$

参考文献

- [1] Peter Hilton and Jean Pedersen. Descartes, Euler, Poincare, Polya and polyhedra. *Séminaire de Philosophie et Mathématiques*, No. 8, pp. 1–17, 1982.

- [2] Yujie Zhang. CLASSIFICATION OF SURFACES. <http://math.uchicago.edu/~may/REU2016/REUPapers/Zhang,Y.pdf>. (Accessed on 01/10/2024).
- [3] Henry Segerman. Hinged flat torus. <https://www.shapeways.com/product/3ZHSG8VZ9/hinged-flat-torus>. (Accessed on 01/10/2024).
- [4] Uniform polyhedron - Wolfram mathworld. <http://mathworld.wolfram.com/UniformPolyhedron>. (Accessed on 01/10/2024).
- [5] 河井亮. 負の定曲率をもつ多面体について, 2023.
- [6] 坪井俊. 平坦トーラスの折り紙埋め込み. 武蔵野大学数理工学センター紀要= The bulletin of Musashino University Musashino Center of Mathematical Engineering, Vol. 5, pp. 44-57, 2020.