選択公理の弱い形について

神戸大学　大学院システム情報学研究科　システム情報学専攻
林佑亮 (Yusuke HAYASHI) *

概要

ZFC は集合論の標準的な公理系の一つである．その中でも，選択公理とその周辺については現在まで深く研究されている． とくに自然数 n に対して「選択関数の存在を n 元集合の族に制限した場合，その公理は他のどのような公理を導出できるか？」という問いは古くから取り組まれており，これは群論の言葉を用いて特徴づけできることが分かっている． 講演者は，上記研究の発展形として新たな選択公理の弱形を導入する．また，その強さを推し量るための群論的な条件を紹介する．

1 導入

1.1 集合論と ZFC，選択公理

集合論は集合，とくに無限集合の解析を目的に発展した．その結果,「現在まで行われている数学的営みの大部分が集合論の言葉で形式化できる」という経験的事実から，集合論を数学の基礎付けとする立場が生まれた．

したがって前述の立場のもとでは，標準的な集合論の公理系 ZFC を現代数学の公理系とみなすことができる．ZFC は有限の公理と公理図式から成るが，そのなかで集合論内外関わらず，様々な専門書で専ら取り沙汰されているものに**選択公理** (AC) と呼ばれるものがある．

定義． **選択公理** (AC) とは,「空でない集合から成る空でない族 $\mathcal{F}$ に対して，写像 $C : \mathcal{F} \to \bigcup \mathcal{F}$ が存在して $C(X) \in X$ がすべての $X \in \mathcal{F}$ について成り立つ」という命題である．

上の C は各 $X \in \mathcal{F}$ から元をひとつ選ぶという意味で**選択関数**と呼ばれる．

1.2 公理と独立性

ところで，何らかの構造ないし体系の公理たちを記述するときは，それらには過剰なもののないように記されることが多い．たとえば，よく知られているように通常群の公理といえば以下のものを指す：

定義． 集合 $G \ni 0$ とその上の演算 $+$ について，群の公理 Grp とは以下の論理式たちのことである．

* E-mail:219x504x@stu.kobe-u.ac.jp

(1) $\forall a, b, c \in G\ [(a+b)+c = a+(b+c)]$
(2) $\forall a \in G, \exists b \in R\ [a+b = b+a = 0]$
(3) $\forall a \in G\ [a+0 = 0+a = a]$

ここで通常，上の公理に加えて $\forall a, b, c, d \in G\ [(a+b)+(c+d) = a+(b+c)+d]$ という論理式を群の公理として明記することはしない．なぜなら簡単にわかるように，この論理式は上の群論の公理から証明可能であるからである．

以上のように，ある体系・構造の公理を述べるときは

公理の中のある命題が他の命題たちから証明されるようなことがない $(*)$

という性質が期待される．

では，(1) と (2) から (3) が証明できることを期待して，(3) の論理式を除いたものを群の公理であると主張することはできるだろうか．

結論から言えばこれはできない．なぜなら，(1)(2) の論理式を満たすが群でないような代表例（モデル）として $\mathbb{N} \cup \{0\}$ があり，したがって (3) がないと群の公理を適切に表しているとはいえないからである．

上の考察は次の意味で示唆に富んでいる．いま，$\forall a \in R, \exists b \in R\ [a+b = b+a = 0]$ が他の公理たちから証明できないことの証拠として $\mathbb{N} \cup \{0\}$ を例に挙げた．このように，ある論理式 φ が論理式の集合 Ψ から証明できないことは，Ψ をすべて満たすが φ を満たさないようなモデルを探すことで，$\Phi + \varphi$ が無矛盾であることを確かめればよい．

いま，論理式 φ について，

1. ZFC と φ を満たすモデル
2. ZFC と $\neg\varphi$ を満たすモデル

の両方を見つけることができたとする．このとき，2. の存在から**数学は（ZFC は）φ を証明できない**し，1. の存在から**数学は（ZFC は）φ を反証することもできない**．言い換えれば，数学は φ の真偽をもはや決定することができない．このようなとき「φ は ZFC から**独立**である」と表現する．

1.3　有限集合の族に対する選択公理

ZFC において選択公理は $(*)$ を満たすことが知られている．つまり，ZFC から選択公理を除いた集合論の公理系である ZF[*1]からは，選択公理を証明することはできない．

実は以下で述べるように，族 $\mathcal{F}$ を有限集合たちからなる場合に弱めたバージョンの選択公理でさえ，ZF から証明することはできない．

定義． n を自然数とする．AC(n) とは，「空でない n 元集合たちからなる族に選択関数が存在する」という命題である．

事実． $n > 1$ を自然数とする．ZFC のモデルを作り替えて，ZF $+ \neg$AC(n) のモデルを作ることがで

[*1] ZFC の C は **C**hoice の頭文字である．

きる．すなわち，ZF から AC(n) を証明することはできない．

このような選択公理の弱形は 1900 年代後半によく研究されてきた．とくに，上記のような有限集合の族に対する選択公理の文脈においては，ZF の下で証明可能な導出関係にはどのようなものがあるか？という問いに強い興味が持たれている．たとえば，ZF の下で以下のような命題が証明できる：

事実． 以下が ZF で成り立つ

- AC$(2) \leftrightarrow$ AC(4).
- (AC$(3) \land$ AC$(7)) \to$ AC(9).

また同時に，ZF では証明不可能な導出関係についてもよく研究されてきた．これについてはたとえば，以下のような事実がある：

事実． ZFC のモデルを変形することで，次が作れる．

- ZF $+$ AC$(2) + \neg$AC(3) を満たすモデル．
- ZF $+$ AC$(3) + \neg$AC(2) を満たすモデル．

したがって，AC$(2) \to$ AC(3) や AC$(3) \to$ AC(2) は ZF では証明できない．

このことから次のような問いが自然に浮かび上がる

問． $A \subseteq \mathbb{N}$ を有限集合とする．$\bigwedge_{m \in A}$ AC$(m) \to$ AC(n) が ZF で証明可能であるための条件は何か？

この問いは Gauntt[1] によって完全に解決された．Gauntt は，上の特徴付けに有限群論を用いた．

事実． $\mathfrak{S}_n$ を $\{1, 2, \ldots, n\}$ の置換群とする．
$\bigwedge_{m \in A}$ AC$(m) \to$ AC(n) が ZF で証明可能であることと，以下は同値：
$G \leq \mathfrak{S}_n$ が，任意の $k \leq n$ に対してある $\sigma \in G$ が存在して $\sigma(k) \neq k$ をみたすなら，ある $H \leq G$ と $H_1, H_2, \ldots, H_p \lneq H$ が存在して，

$$\sum_{j=1}^{p} [H : H_j] \in A$$

が成り立つ．

1.4 Truss による拡張

Truss[2] は AC(n) をさらに弱めた公理を導入し，同様な特徴づけを得ている．
公理の弱め方を述べるための準備をしよう．$\mathfrak{S}_n$ を $\{1, 2, \ldots, n\}$ の置換群とする．集合 S に対して $e(S)$ で S の空でない有限部分集合全体を表すことにする．いま，$e_\omega(S) = \bigcup \left\{ e^k(S) \mid k \geq 1 \right\}$ とすると，$\mathfrak{S}_n$ は $e_\omega(\{1, 2, \ldots, n\})$ に自然に作用する．
$e_\omega(\{1, 2, \ldots, n\})$ 上の同値関係 $\sim_n$ を，

$$x \sim_n y \iff (\exists \sigma \in \mathfrak{S}_n) \, [\sigma(x) = y]$$

で定義し，$V_n = e_\omega(\{1,2,\ldots,n\})/\sim_n$ とする．$v \in V = \bigcup\{V_n \mid n \geq 1\}$ に対して一意的に $v \in V_{n(v)}$ となる $n(v) \geq 1$ が定まる．またこのとき，$n(v)$ 元集合 S に対して勝手に一つ全単射 $f : \{1,2,\ldots,n(v)\} \to S$ を取ると，これは v に自然に作用し $f(v) \subseteq e_\omega(S)$ を定める．さらに，同値関係の定義からこの $f(v)$ は全単射 f の取り方に依らない．したがってこの $f(v)$ を $v(S)$ と書くことにする．

以上の記法のもと，Truss は $Z \subseteq V$ に対して $\mathsf{AC}(Z)$ と呼ばれる公理を定義した．

定義． $Z \subseteq V$ とする．$\mathsf{AC}(Z)$ とは，「任意の $v \in Z$ に対して，どんな $n(v)$ 元集合から成る空でない族 $\mathcal{F}$ に対しても $\{v(X) \mid X \in \mathcal{F}\}$ に選択関数が存在する．」という命題である．

たとえば，自然数 n に対して

$$v_n = \{s \subseteq \{1,2,\ldots,n\} \mid |s| = 1\} \in e_2(\{1,2,\ldots,n\})$$

とすれば，すぐにわかるように $\mathsf{AC}(v_n)$ は $\mathsf{AC}(n)$ と同値な命題を表す．また，

$$v = \{s \subseteq \{1,2,\ldots,6\} \mid |s| = 2\} \in e_2(\{1,2,\ldots,6\})$$

とすれば，$\mathsf{AC}(v)$ は「6 元集合から成る空でない族 $\mathcal{F}$ に対して，各 6 元集合の 2 元部分集合を選択する関数が存在する．」という命題を表す．

Truss は，$Z \subseteq V, v \in V$ について $\mathsf{AC}(Z) \to \mathsf{AC}(v)$ が ZF で証明可能であるための必要十分条件を求めた．

事実． $Z \subseteq V, v \in V$ について，ZF で $\mathsf{AC}(Z) \to \mathsf{AC}(v)$ が証明できることと，以下は同値：

$G \leq \mathfrak{S}_{n(v)}$ が，任意の $\xi \in v$ に対してある $\sigma \in G$ が存在して $\sigma(\xi) \neq \xi$ をみたすなら，ある $X \in e_\omega(\{1,2,\ldots,n(v)\})$ と $w \in Z$ が存在して $|X| = n(w)$ であり，どんな $\tilde{\xi} \in w(X)$ についても

$$\{\sigma \in G \mid \sigma(X) = X\} \not\subseteq \left\{\sigma \in G \mid \sigma(\tilde{\xi}) = \tilde{\xi}\right\}$$

が成り立つ．

2　主定理

講演者は Truss[2] で導入された公理をさらに弱めた $\mathsf{AC}^{weak}(Z)$ を導入した．そのうえで，それらの導出関係を特徴付ける条件を調べた．

定義． $Z \subseteq V$ とする．$\mathsf{AC}^{weak}(Z)$ とは，「任意の自然数 $n \in \{n \mid Z \cap V_n \neq \emptyset\}$ に対して，どんな n 元集合から成る空でない族 $\mathcal{F}$ に対しても $\{\bigcup v(X) \mid v \in Z \cap V_n\}$ に選択関数が存在する．」という命題である．

たとえば,

$$\begin{aligned}
n &= 6 \\
v_1 &= \{A \subseteq \{1,2,\ldots,6\} \mid |A| = 2\} \in e_2(\{1,2,\ldots,6\}) \\
v_2 &= \{A \subseteq \{1,2,\ldots,6\} \mid |A| = 3\} \in e_2(\{1,2,\ldots,6\}) \\
Z &= \{v_1, v_2\}
\end{aligned}$$

とすると,$\mathsf{AC}^{weak}(Z)$ は「6 元集合から成る空でない族 $\mathcal{F}$ に対して,各 6 元集合の 2 元か 3 元部分集合を選択する関数が存在する.」という主張になる.これについてたとえば,講演者は以下のような具体的な関係を示した.

定理. 以下が ZF で成り立つ

- $\mathsf{AC}(6 \to 1 \vee 2) \leftrightarrow \mathsf{AC}(3)$
- $\mathsf{AC}(6 \to 1 \vee 3) \leftrightarrow \mathsf{AC}(2)$
- $\mathsf{AC}(6 \to 2 \vee 3) \to \mathsf{AC}(5)$

ただしここで,$\mathsf{AC}(6 \to n \vee m)$ とは,「6 元集合から成る空でない族 $\mathcal{F}$ に対して,各 6 元集合の n 元か m 元部分集合を選択する関数が存在する.」という命題である.

さらに,Truss の手法をまねることで一般に $Z \subseteq V, Z' \subseteq V_n$ について,ZF で $\mathsf{AC}^{weak}(Z) \to \mathsf{AC}^{weak}(Z')$ が証明できるための必要十分条件を調べた.

主定理. $Z \subseteq V, Z' \subseteq V_n$ について,ZF で $\mathsf{AC}^{weak}(Z) \to \mathsf{AC}^{weak}(Z')$ が証明できることと,以下は同値:

$G \leq \mathfrak{S}_n$ が,任意の $\xi \in v \in Z'$ に対してある $\sigma \in G$ が存在して $\sigma(\xi) \neq \xi$ をみたすなら,ある $X \in e_\omega(\{1,2,\ldots,n\}), k = |X| \in \{k \mid Z \cap V_k \neq \emptyset\}$ が存在して,どんな $w \in Z \cap V_k$ と $\tilde{\xi} \in w(X)$ についても

$$\{\sigma \in G \mid \sigma(X) = X\} \not\subseteq \left\{\sigma \in G \mid \sigma(\tilde{\xi}) = \tilde{\xi}\right\}$$

が成り立つ.

参考文献

[1] Gauntt, Robert James. The Axiom of Choice for Collections of Finite Sets. Diss. 1969.

[2] Truss, John. "Finite axioms of choice." Annals of Mathematical Logic 6.2 (1973): 147-176.