Refined Filtrated K-Theory for Graph C^*-Algebras over a Four-Point Space

慶應義塾大学大学院 理工学研究科 基礎理工学専攻
橋本 七海 (Nanami HASHIMOTO) *

Abstract

本稿では, ある 4 点空間上の C^*-環に対する完全不変量を得るために Meyer, Nest によって改良された filtrated K-theory をグラフ C^*-環を通して解説する. また, 4 点空間上のグラフ C^*-環の K-理論的特徴づけを与える.

1 導入

作用素環論は, 量子力学を数学的に定式化するという目的で von Neumann らによって研究が始められたもので, 数学の中でも比較的新しい研究分野である. 作用素環論は通常, 関数解析学に属する分野として捉えられているが, その手法や応用については, 代数学・幾何学とも相互的に関わり合いながら発展してきた分野である.

作用素環の一種である C^***-環**はさまざまな数学的・物理的対象から自然に現れるものである. 異なる対象から異なる手段を用いて現れた C^*-環がどのような場合に同型になるかを問う分類理論は, C^*-環の研究において普遍的なテーマである. K**-理論**はこの分野において強力な道具である.

C^*-環の分類理論における重要な進展として, Kirchberg [Kir94] と Phillips [Phi00] によって示された定理が知られている. これは, いくつかの条件をみたす C^*-環が**単純**であるならば, K-理論を用いて完全に分類されるという驚くべき定理である. 近年, 単純でない C^*-環でイデアルを有限個もつようなものに対してこの結果を拡張するという問題が興味深いテーマとして盛んに研究されている. これらの C^*-環は**有限** T_0**-空間上の** C^***-環**と呼ばれており, **filtrated** K**-theory** とよばれる K-理論的不変量が自然な不変量として考えられている.

先行研究で Meyer, Nest [MN12], Bentmann, Köhler [BK11] は, **アコーディオン空間**とよばれる空間の上の C^*-環に対して, filtrated K-theory が所望の完全不変量であることを証明した. その一方で, アコーディオン空間でないある **4 点空間**に対して, filtrated K-theory に別の K-理論的不変量を 1 つ付け加えることで, 所望の完全不変量が得られることを証明した.

本稿では, [MN12] が改良した新しい不変量を用いて, **グラフ** C^***-環**の特徴づけに関する結果を得る. グラフ C^*-環は filtrated K-theory を具体的に記述することができるため, 有限 T_0-空間上の C^*-環の分類を行う上で重要な C^*-環のクラスを成している. 本稿では, C^*-環, イデアルの定義や K-理論の基本事項の説明から始め, 最後に [MN12] の 4 点空間の上の C^*-環がグラフ C^*-環となるための必要十分条件を与える.

2 準備

2.1 C^*-環

まずは C^*-環の基礎事項を概説する. 詳細は [Bla06] などを参照してほしい.

*E-mail: nanami_hashimoto@keio.jp

定義 2.1 (C^*-環)**.** 複素数体 $\mathbb{C}$ 上の代数 A であって, 次の条件をみたす共役線形な $A \ni a \mapsto a^* \in A$ が備わっているものを **$*$-代数** (**$*$-algebra**) という:

$$(ab)^* = b^* a^*, \qquad a^{**} = a \qquad (a, b \in A).$$

C^*-環 (**C^*-algebra**) とは, 完備なノルムを備えた $*$-代数 A であって, 次の条件をみたすものである:

$$\|ab\| \leq \|a\| \|b\|, \qquad \|a^* a\| = \|a\|^2 \qquad (a, b \in A).$$

乗法単位元 1 をもつ C^*-環を**単位的** (**unital**) であるという.

例 2.2. 複素 n 次行列全体 $M_n(\mathbb{C})$ は共役転置を $*$-演算として備え, 作用素ノルムとよばれる完備ノルムを備えた単位的 C^*-環である. 同様にして, C^*-環 A に対して, A 値の n 次行列全体 $M_n(A)$ もまた C^*-環となる.

定義 2.3. A を C^*-環とする.

- $p \in A$ が $p^2 = p^* = p$ をみたすとき, p を**射影** (**projection**) という.
- $s \in A$ に対し, $s^* s$ が射影であるとき, s を**部分等長作用素** (**partial isometry**) という[1].
- A が単位的で $u \in A$ が $u^* u = u u^* = 1$ をみたすとき, u を**ユニタリ** (**unitary**) という.

定義 2.4. C^*-環 A の閉部分空間であって, 積と $*$-演算で閉じているものを **C^*-部分環** (**C^*-subalgebra**) という. 部分集合 $X \subset A$ に対して, X を含む最小の C^*-部分環を **X から生成される C^*-部分環**といい, $C^*(X)$ と表記する.

注意 2.5. C^*-部分環はもちろん C^*-環である. また, $C^*(X)$ は X を含むすべての C^*-部分環の共通部分である.

定義 2.6. C^*-環 A の閉部分空間 I であって, 任意の $a \in A$ と $b \in I$ に対して $ab, ba \in I$ をみたすものを**イデアル** (**ideal**) という. A が**自明な** (**trivial**) イデアル 0 と A の 2 つしかもたないとき, A を**単純** (**simple**) という.

注意 2.7. 実は, C^*-環のイデアルは $*$-演算で閉じているため, C^*-部分環である. また, 商空間 A/I も $(a + I)^* := a^* + I$ という $*$-演算で C^*-環となる.

定義 2.8. C^*-環 A, B に対し, 積と $*$-演算を保つ線形写像 $\varphi : A \to B$ を **$*$-準同型** (**$*$-homomorphism**) という. 加えて全単射であるとき, φ は **$*$-同型** (**$*$-isomorphism**) とよばれる. $*$-同型 $\varphi : A \to B$ が存在するとき, A と B は**同型** (**isomorphic**) であるといい, $A \simeq B$ と表す.

注意 2.9. 実は, $*$-準同型 $\varphi : A \to B$ は任意の $a \in A$ に対して $\|\varphi(a)\| \leq \|a\|$ をみたすので, $*$-同型はノルムを変えない.

Meyer, Nest が構成した不変量を理解するために, 引き戻しとよばれる C^*-環を導入する. そのために, まずは C^*-環の直和を定義する.

定義 2.10. C^*-環 A, B のベクトル空間としての直和に, 成分ごとの積, $*$-演算を入れ, $\|(a, b)\| := \max\{\|a\|, \|b\|\}$ でノルムを定めると, C^*-環になる. これを A, B の**直和** (**direct sum**) といい, $A \oplus B$ と表記する.

定義 2.11. C^*-環 A, B, D と $*$-準同型 $\varphi : A \to D, \psi : B \to D$ に対し, P を次式で定める:

$$P := \{(a, b) \in A \oplus B \mid \varphi(a) = \psi(b)\}.$$

すると, P は $A \oplus B$ の C^*-部分環となる. P を**引き戻し** (**pullback**) という.

[1] $s \in A$ に対し, $s^* s$ が射影であることと $s s^*$ が射影であることは同値である.

2.2 K-理論

一般に C^*-環 A, B が同型であるか否かは定義をじっと見てわかるようなことではない. 本小節で導入する K-理論が強力な道具となる. K-理論とは, 各 C^*-環 A に対して, A の諸性質を反映した 2 つのアーベル群 $K_0(A)$ と $K_1(A)$ を関連付け, それらの構造を調べることで A の構造を調べるというものである. Elliott による AF-環の分類に端を発する C^*-環の分類理論において, 良い性質を満たす C^*-環は K-理論的不変量で分類可能であるというスローガンが歴史的にも重要とされている. K-理論の詳細は [Bla98] などを参照してほしい.

定義 2.12 (K_0-群, K_1-群)**.** 単位的 C^*-環 A に対し[2],

$$V(A) := \Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} \{ M_n(A) \text{ の射影 } \} \Big) / \sim_{\text{homotopy}}$$

は「対角成分に並べる」という演算で可換モノイドになる. $K_0(A)$ を $V(A)$ のグロタンディーク群[3]と定める. また,

$$K_1(A) := \Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} \{ M_n(A) \text{ のユニタリ } \} \Big) / \sim_{\text{homotopy}}$$

は「対角成分に並べる」という演算でアーベル群になる.

少し雑に K-群を定義してしまったが, どのように構成されるかは本稿では不要で, 次に紹介する諸性質の方が重要である.

命題 2.13. $*$-準同型 $\varphi : A \to B$ は群準同型 $K_i(\varphi) : K_i(A) \to K_i(B)$ を誘導する $(i = 0, 1)$.

命題 2.14 (6 項完全列)**.** 任意の C^*-環の完全列[4]

$$0 \longrightarrow I \xrightarrow{\ \iota\ } A \xrightarrow{\ \pi\ } A/I \longrightarrow 0$$

に対し, **境界写像** (**boundary map**) とよばれる群準同型 $\delta_0 : K_0(A/I) \to K_1(I)$ と $\delta_1 : K_1(A/I) \to K_0(I)$ が存在して, 次の列が完全になる[5]:

$$\begin{array}{ccccc}
K_0(I) & \xrightarrow{K_0(\iota)} & K_0(A) & \xrightarrow{K_0(\pi)} & K_0(A/I) \\
{\scriptstyle \delta_1}\big\uparrow & & & & \big\downarrow{\scriptstyle \delta_0} \\
K_1(A/I) & \xleftarrow[K_1(\pi)]{} & K_1(A) & \xleftarrow[K_1(\iota)]{} & K_1(I).
\end{array}$$

Kirchberg, Phillips は, A, B が安定, 純無限, 可分, 核型, 単純な C^*-環であるとき, A と B の KK-同値は $*$-同型 $A \to B$ を誘導することを証明した ([Kir94], [Phi00]). また, Rosenberg, Schochet の普遍係数定理により, bootstrap class に属する可分 C^*-環 A, B に対し, K-群の同型は KK-同値に持ち上がる ([RS87]). この 2 つの事実を組み合わせると, 次の顕著な結果が得られる. なお, 仮定に未定義語がいくつか登場したが, すべてを説明するのは難しいので, 本稿では説明を省略する.

---

[2] 単位的でない C^*-環に対しても K-群を定義することができるが, 本稿では説明を省略する.

[3] グロタンディーク群とは, 可換モノイドから普遍的な方法で構成されるアーベル群である. 例えば, $\mathbb{Z}$ は $\mathbb{N}$ のグロタンディーク群として構成される.

[4] I が C^*-環 A のイデアルで, ι が包含写像, π が商写像であることを意味している.

[5] $\operatorname{Im} \delta_1 = \operatorname{Ker} K_0(\iota)$ を含む 6 個の条件をみたすことを意味している.

定理 2.15. A, B を安定, 純無限, 可分, 核型, 単純な C^*-環で bootstrap class に属しているとする. このとき, 次の同値が成り立つ:

$$A \simeq B \iff K_0(A) \simeq K_0(B),\ K_1(A) \simeq K_1(B).$$

さらに, Kirchberg は, T_0-空間 X 上の C^*-環 A, B が安定, 純無限, 可分, 核型, 緊密であるとき, A と B の $KK(X)$-同値は X-同変な $*$-同型 $A \to B$ を誘導することを証明した ([Kir94]). 次小節で有限 T_0-空間上の C^*-環を導入し, 緊密性や X-同変性を定義しよう.

2.3 有限 T_0-空間上の C^*-環

X を有限 T_0-空間とし, X の開集合全体を $\mathbb{O}(X)$ と表記する. また, C^*-環 A のイデアル全体を $\mathbb{I}(A)$ と表記する.

定義 2.16 (有限 T_0-空間上の C^*-環)**.** X 上の C^*-環とは, 次の条件をみたす $\mathbb{O}(X) \ni U \mapsto A(U) \in \mathbb{I}(A)$ を備えた C^*-環 A を指す[6]:

(i) $A(\emptyset) = 0$, $A(X) = A$;

(ii) 任意の $U, V \in \mathbb{O}(X)$ に対し, $A(U \cap V) = A(U) \cap A(V)$, $A(U \cup V) = A(U) + A(V)$[7].

加えて, $\mathbb{O}(X) \ni U \mapsto A(U) \in \mathbb{I}(A)$ が全単射であるとき, A は**緊密** (**tight**) であるという.

注意 2.17. 単純 C^*-環は 1 点空間上の緊密な C^*-環と思えるため, 緊密性は単純性を一般化した概念である.

注意 2.18. 元々, 位相空間 X 上の C^*-環は, C^*-環 A と連続写像 $\psi : \mathrm{Prim}(A) \to X$ の組 (A, ψ) として定義される ($\mathrm{Prim}(A)$ は A の原始イデアル空間を表す). この定義は, X が有限 T_0-空間の場合, 上の定義と等価になる. 詳しくは [MN09] を参照してほしい.

定義 2.19. A, B を X 上の C^*-環とする. $*$-準同型 $\varphi : A \to B$ が任意の $U \in \mathbb{O}(X)$ に対し, $\varphi(A(U)) \subset B(U)$ をみたすとき, φ は X**-同変** (X**-equivariant**) であるという.

開集合 U にイデアル $A(U)$ を対応させることを考えたが, 次は開集合より広いクラスを成す局所閉集合 Y に対して, C^*-環 $A(Y)$ を定義する. まずは, 局所閉集合の定義を確認する.

定義 2.20. $U \supset V$ をみたす $U, V \in \mathbb{O}(X)$ が存在して, $Y = U \setminus V$ が成り立つとき, Y を X の**局所閉集合** (**locally closed subset**) という. X の局所閉集合全体を $\mathbb{LC}(X)$ と表記する.

開集合や閉集合は局所閉集合である. また, Y を X の局所閉集合とし, Z を Y の局所閉集合とすると, Z は X の局所閉集合である.

定義 2.21. A を X 上の C^*-環とする. X の局所閉集合 Y が $U \supset V$ をみたす $U, V \in \mathbb{O}(X)$ を用いて $Y = U \setminus V$ と表されるとき, C^*-環 $A(Y)$ を次の商で定める:

$$A(Y) := A(U)/A(V).$$

注意 2.22. A が X 上の C^*-環のとき, $\mathbb{O}(X) \ni U \mapsto A(U) \in \mathbb{I}(A)$ は包含を保つので, この定義において, $A(V)$ は $A(U)$ のイデアルであることに注意してほしい. また, $A(Y)$ は U, V の取り方に依存するように見えるが, 実は自然な同型を除いて一意に定まる.

命題 2.23. A を X 上の C^*-環とする. X の局所閉集合 Y と Y の開集合 Z に対し, 次の C^*-環の完全列が存在する:

$$0 \longrightarrow A(Z) \xrightarrow{\iota_Z^Y} A(Y) \xrightarrow{\pi_Y^{Y \setminus Z}} A(Y \setminus Z) \longrightarrow 0.$$

[6]無限位相空間 X 上の C^*-環も同様にして定義することができるが, 本稿では不要なので, 説明を省略する.

[7]C^*-環 A のイデアル I, J に対し, $I \cap J$ と $I + J := \{a + b \mid a \in I, b \in J\}$ は A のイデアルとなる.

2.4 グラフ C^*-環

本小節では, グラフ C^*-環の定義を手短に説明する. 詳細は [Rae05] などを参照してほしい.

定義 2.24. **グラフ** (**graph**) とは, 集合 E^0, E^1 と写像 $d, r : E^1 \to E^0$ から成る組 $E = (E^0, E^1, d, r)$ を指す.

E^0, E^1 はそれぞれグラフ E の頂点集合, 辺集合を表し, 辺 $e \in E^1$ は始点 (domain) $d(e)$ から終点 (range) $r(e)$ に向き付けられていると思える.

$$r(e) \xleftarrow{\;e\;} d(e)$$

グラフ C^*-環の分野では, 無向グラフは考えず, 有向グラフのみを考える.

以降, $E = (E^0, E^1, d, r)$ を各頂点 $v \in E^0$ に対して $0 < |r^{-1}(v)| < \infty$ をみたすグラフとする[8].

定義 2.25. C^*-環 A の部分等長作用素の族 $S = (S_e)_{e \in E^1}$ と互いに直交する射影の族 $P = (P_v)_{v \in E^0}$[9] の組 (S, P) は, 次の条件をみたすとき, **Cuntz-Krieger E-family** とよばれる:

(i) 各辺 $e \in E^1$ に対し, $P_{d(e)} = S_e^* S_e$;

(ii) 各頂点 $v \in E^0$ に対し, $P_v = \sum_{e \in r^{-1}(v)} S_e S_e^*$.

定義 2.26 (グラフ C^*-環)**.** Cuntz-Krieger E-family から生成される普遍 C^*-環[10]を**グラフ C^*-環** (**graph C^*-algebra**) といい, $C^*(E)$ と表記する.

例 2.27. 次のグラフから作られるグラフ C^*-環は $M_4(\mathbb{C})$ である.

$$\bullet \longleftarrow \bullet \longleftarrow \bullet \longleftarrow \bullet$$

グラフ C^*-環のイデアル構造はグラフの言葉を用いて記述することができる. そのため, 後で観察するように, 有限 T_0-空間上の C^*-環はグラフ C^*-環を用いて比較的容易に具体例を作ることができる. また, グラフ C^*-環の K_0-群と K_1-群は, それぞれグラフの隣接行列から余核と核を用いて計算できる (このことから, グラフ C^*-環の K_1-群は常に自由アーベル群となる). したがって, グラフ C^*-環は次節で説明する filtrated K-theory を具体的に記述することができる. さらに, ある条件を満たすグラフに対して, グラフ C^*-環は Kirchberg-Phillips の定理の仮定をみたす. 以上の事実が, 有限 T_0-空間上の C^*-環の分類理論においてグラフ C^*-環を考える利点である.

3 主結果

3.1 Filtrated K-theory

厳密な定義は難しいので, 大雑把に言うと, 有限 T_0-空間 X 上の C^*-環 A に対し, **filtrated K-theory** $FK(A)$ とは, X の局所閉集合 Y と Y の開集合 Z に対して定まる C^*-環の完全列

$$0 \longrightarrow A(Z) \xrightarrow{\iota_Z^Y} A(Y) \xrightarrow{\pi_Y^{Y \setminus Z}} A(Y \setminus Z) \longrightarrow 0$$

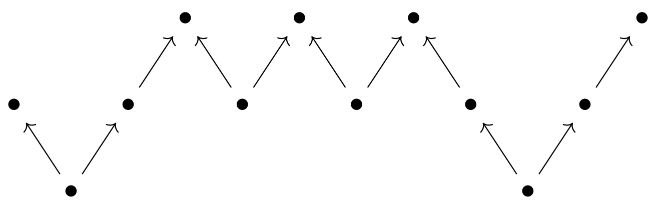
[8] この仮定を課さなくてもグラフ C^*-環は定義できるが, 本稿では説明を省略する.

[9]「互いに直交する」とは, 異なる 2 頂点 $v, w \in E^0$ に対し, $P_v P_w = 0$ をみたすことをいう.

[10] 普遍 C^*-環とは, 関係式をみたす元から生成される, 普遍性をもった C^*-環のことである. グラフ C^*-環 $C^*(E)$ は Cuntz-Krieger E-family (s, p) から生成され, さらに次の普遍性をみたす: C^*-環 A と A の Cuntz-Krieger E-family (S, P) が任意に与えられると, $*$-準同型 $\pi : C^*(E) \to A$ が (一意に) 存在し, 各頂点 $v \in E^0$ に対して $\pi(p_v) = P_v$, 各辺 $e \in E^1$ に対して $\pi(s_e) = S_e$ をみたす. 普遍 C^*-環は, 普遍性から誘導される同型を除いて一意に定まる.

から誘導される 6 項完全列に現れる K-群や群準同型を集めてできる不変量である．この説明は不十分だが, X がこれから扱うような簡単な空間の場合には十分である (厳密な定義については [MN12] を参照せよ)．Meyer, Nest, Bentmann, Köhler は, filtrated K-theory が X 上の C^*-環に対する完全不変量であることと X が**アコーディオン空間**であることが同値であることを証明した ([MN12], [BK11])．

アコーディオン空間を厳密に定義する代わりに, ハッセ図を使って解説する．はじめに, 連結な有限 T_0-空間の位相はハッセ図を用いて表すことができることを思い出してほしい．アコーディオン空間とは, 無向グラフとして見たときに一直線になるようなハッセ図で表される連結な有限 T_0-空間である．例えば, 次のハッセ図はアコーディオン空間を表している．



3 点以下の連結な T_0-空間はすべてアコーディオン空間である．4 点集合 $\{1,2,3,4\}$ に定まる連結で T_0 をみたす位相は, 同相を除いて全部で 10 個ある:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{O}(X_1) &:= \{\emptyset, 4, 34, 234, 1234\},\\
\mathbb{O}(X_2) &:= \{\emptyset, 2, 4, 34, 234, 1234\},\\
\mathbb{O}(X_3) &:= \{\emptyset, 4, 24, 34, 124, 234, 1234\},\\
\mathbb{O}(X_4) &:= \{\emptyset, 3, 4, 24, 34, 134, 234, 1234\},\\
\mathbb{O}(X_5) &:= \{\emptyset, 4, 14, 24, 34, 124, 134, 234, 1234\},\\
\mathbb{O}(X_6) &:= \{\emptyset, 2, 3, 4, 23, 24, 34, 234, 1234\},\\
\mathbb{O}(X_7) &:= \{\emptyset, 4, 34, 134, 234, 1234\},\\
\mathbb{O}(X_8) &:= \{\emptyset, 3, 4, 34, 234, 1234\},\\
\mathbb{O}(X_9) &:= \{\emptyset, 4, 24, 34, 234, 1234\},\\
\mathbb{O}(X_{10}) &:= \{\emptyset, 3, 4, 34, 134, 234, 1234\}.
\end{aligned}
$$

ここで, $14 := \{1,4\}$ などの表記に注意してほしい．X_1, X_2, X_3, X_4 はアコーディオン空間で, それ以外の 6 個はアコーディオン空間ではない．

以降では, $X := X_5$ に着目する．X は次のハッセ図で定まる．

$$
\begin{tikzcd}
1 & 2 & 3 \\
& 4 \arrow[ul] \arrow[u] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}
$$

X の部分集合はすべて局所閉である．その内, 次の 11 個が連結[11]である:

$$1, 2, 3, 4, 14, 24, 34, 124, 134, 234, 1234.$$

[11]例えば, 12 は非連結である．$A(12) = A(1) \oplus A(2)$ より, $K_j(A(12)) = K_j(A(1)) \oplus K_j(A(2))$ が成り立つので, $K_j(A(12))$ は不変量として情報をもたないと考えられる ($j = 0, 1$)．したがって, 非連結な局所閉集合ははじめから考えない．

X 上の C^*-環 A に対し, filtrated K-theory $FK(A)$ は次の図式で表すことができる.

$$\begin{tikzcd}
& 14 \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "i"] & 124 \arrow[dr, "i"] & & 1 \arrow[dr, "\delta"] & \\
4 \arrow[ur, "i"] \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "i"'] & 24 \arrow[ur, "i"] \arrow[dr, "i"] & 134 \arrow[r, "i"] & 1234 \arrow[ur, "r"] \arrow[r, "r"] \arrow[dr, "r"'] & 2 \arrow[r, "\delta"] & 4 \\
& 34 \arrow[r, "i"'] \arrow[ur, "i"] & 234 \arrow[ur, "i"] & & 3 \arrow[ur, "\delta"] &
\end{tikzcd}$$

この図式には 11 個の数字 (4 だけ両端に 2 つある) と 18 本の矢印があるが, もう 1 つ同じ図式が隣に続いていて, 両端の 4 が繋がって輪っかになっているのをイメージしてほしい. ここに現れている 11 個の数字は, 先の 11 個の連結な局所閉集合 Y に対する C^*-環 $A(Y)$ の K_0-群と K_1-群を表しており, 矢印は 6 項完全列に現れる群準同型を表している. つまり, この図式は全部で 22 個の K-群と 36 本の群準同型から成っている. 例えば, $124 \to 1234 \to 3$ に注目してみよう. 124 は $j = 0, 1$ に対する $K_j(A(124))$ を表している. $i : 124 \to 1234$ は包含写像 $\iota_{124}^{1234} : A(124) \to A(1234)$ から誘導される群準同型 $K_j(\iota_{124}^{1234}) : K_j(A(124)) \to K_j(A(1234))$ を表している. $r : 1234 \to 3$ は商写像 $\pi_{1234}^3 : A(1234) \to A(3)$ から誘導される群準同型 $K_j(\pi_{1234}^3) : K_j(A(1234)) \to K_j(A(3))$ を表している. また, 丸が付いた矢印は境界写像を表している. 例えば, $\delta : 3 \to 4$ は境界写像 $K_j(A(3)) \to K_{1-j}(A(4))$ を表している. この図式に現れている群準同型は, 他の群準同型の合成で表すことができない. この図式に現れていない群準同型は, この図式に現れている群準同型の合成で表すことができる.

[MN12] は, 上の filtrated K-theory は X 上の C^*-環に対する完全不変量にならないことを示した. さらに, [MN12] は, filtrated K-theory に別の K-理論的不変量を 1 つ付け加えることで, X 上の C^*-環 A に対する完全不変量 $FK'(A)$ を構成した[12]. $FK'(A)$ は次の図式で表すことができる.

$$\begin{tikzcd}
& 14 \arrow[dr] & & 124 \arrow[dr] & & 1 \arrow[dr] & \\
4 \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr] & 24 \arrow[r] & 12344 \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr] & 134 \arrow[r] & 1234 \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr] & 2 \arrow[r] & 4 \\
& 34 \arrow[ur] & & 234 \arrow[ur] & & 3 \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

[MN12] は, 新しく付け加わった 12344 は, 商写像 π_{124}^2, π_{234}^2 の引き戻し $A(12344)$ の K-群になることを示した. ここで, $A(12344)$ は次式で定まる C^*-環である:

$$A(12344) := \{(a, b) \in A(124) \oplus A(234) \mid \pi_{124}^2(a) = \pi_{234}^2(b)\}.$$

主結果を提示するために, filtrated K-theory より小さな不変量を導入しておく. X 上の C^*-環 A に対し, $FK_{\mathcal{R}}(A)$ を次の図式に現れる K-群と群準同型, および $K_1(A(4))$ から成る不変量とする.

$$\begin{tikzcd}
K_1(A(1)) \arrow[dr, "\delta"] & & K_0(A(14)) \\
K_1(A(2)) \arrow[r, "\delta"] & K_0(A(4)) \arrow[ur, "i"] \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "i"'] & K_0(A(24)) \\
K_1(A(3)) \arrow[ur, "\delta"'] & & K_0(A(34))
\end{tikzcd}$$

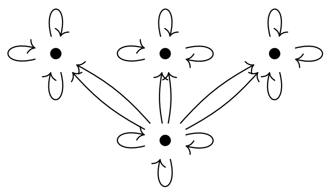
[12]歴史的には, [MN12] で filtrated K-theory はアコーディオン空間より狭いクラスの空間の上の C^*-環に対して完全不変量になることと 4 点空間 X_5 上の C^*-環に対しては完全不変量にならないことが証明された後, [BK11] で filtrated K-theory が X 上の C^*-環に対する完全不変量であることと X がアコーディオン空間であることが同値であることが証明された.

この不変量は, 純無限な Cuntz-Krieger 環を分類するため, Restorff [Res06] によって導入されたものである ([ABK14b, Definition 3.4] も参照せよ). 次小節で示すように, グラフ C^*-環の分類理論において重要な不変量となる.

3.2 主結果

X を前小節の 4 点空間 X_5 とする. まず, [MN12] によって改良された filtrated K-theory をグラフ C^*-環を例に観察してみよう.

例 3.1. 次のグラフ E を考える.



このとき, $C^*(E)$ は X 上の緊密な C^*-環となる. さらに, $FK(C^*(E))$ は次の図式で表される.

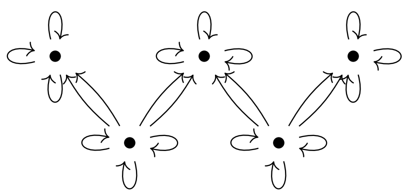
$$\begin{tikzcd}
& (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2 \arrow[r] \arrow[dr] & (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3 \arrow[dr] & & \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \arrow[dr, "\circ" marking] & \\
\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[ur] \arrow[dr] & (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2 \arrow[ur] \arrow[dr] & (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3 \arrow[r] & (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^4 \arrow[r] \arrow[ur] \arrow[dr] & \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \arrow[r, "\circ" marking] & 0 \\
& (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2 \arrow[r] \arrow[ur] & (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3 \arrow[ur] & & \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \arrow[ur, "\circ" marking] &
\end{tikzcd}$$

これらのアーベル群は K_0-群として現れたもので, K_1-群はすべて 0 である.

次のハッセ図で定まる 5 点空間 $\widetilde{X} := \{1, 2, 3, 4, 4'\}$ を考える.

$$\begin{tikzcd}
1 & & 2 & & 3 \\
& 4 \arrow[ul] \arrow[ur] & & 4' \arrow[ul] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

また, 次のグラフ $\widetilde{E}$ を考える.



このとき, $C^*(\widetilde{E})$ は $\widetilde{X}$ 上の緊密な C^*-環となる. さらに, $C^*(E)(12344) \simeq C^*(\widetilde{E})$ が成り立つ. $FK'(C^*(E))$ は次の図式で表すことができる (K_1-群はすべて 0 である).

$$\begin{tikzcd}
& (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2 \arrow[dr] & & (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3 \arrow[dr] & & \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \arrow[dr, "\circ" marking] & \\
\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[ur] \arrow[dr] & (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2 \arrow[r] & (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^5 \arrow[r] \arrow[ur] \arrow[dr] & (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3 \arrow[r] & (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^4 \arrow[r] \arrow[ur] \arrow[dr] & \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \arrow[r, "\circ" marking] & 0 \\
& (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2 \arrow[ur] & & (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3 \arrow[ur] & & \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \arrow[ur, "\circ" marking] &
\end{tikzcd}$$

この例で示した結果はもっと抽象的なグラフに対して示すことができる.

最後に, X 上のグラフ C^*-環の特徴づけを示す. 次の補題が重要である.

補題 3.2. X 上の C^*-環 A に対し, 次の 3 つの 6 項完全列が存在する:

$$\begin{array}{ccccc} K_0(A(4)) & \longrightarrow & K_0(A) & \to & K_0(A(1)) \oplus K_0(A(2)) \oplus K_0(A(3)) \\ \uparrow & & & & \downarrow \\ K_1(A(1)) \oplus K_1(A(2)) \oplus K_1(A(3)) & \leftarrow & K_1(A) & \longleftarrow & K_1(A(4)), \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} K_0(A(4)) & \longrightarrow & K_0(A(14)) \oplus K_0(A(24)) \oplus K_0(A(34)) & \to & K_0(A(12344)) \\ \uparrow & & & & \downarrow \\ K_1(A(12344)) & \leftarrow & K_1(A(14)) \oplus K_1(A(24)) \oplus K_1(A(34)) & \longleftarrow & K_1(A(4)), \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} K_0(A(12344)) & \to & K_0(A(124)) \oplus K_0(A(134)) \oplus K_0(A(234)) & \longrightarrow & K_0(A) \\ \uparrow & & & & \downarrow \\ K_1(A) & \longleftarrow & K_1(A(124)) \oplus K_1(A(134)) \oplus K_1(A(234)) & \leftarrow & K_1(A(12344)). \end{array}$$

この補題を示すためには, 新しく 12344 が付け加わったことで現れた群準同型を詳細に調べる必要がある. この補題と [ABK14a, Proposition 7.17] の議論から次の命題が得られる.

命題 3.3. A, B を X 上の C^*-環とする. $x \in \{1, 2, 3\}$ に対し, 次の条件を仮定する:

(i) $K_1(A(x)), K_1(B(x))$ は自由アーベル群である;

(ii) 境界写像 $K_0(A(x)) \to K_1(A(4)), K_0(B(x)) \to K_1(B(4))$ は 0 である.

このとき, 任意の準同型 $\alpha : FK_{\mathcal{R}}(A) \to FK_{\mathcal{R}}(B)$ は準同型 $\widetilde{\alpha} : FK'(A) \to FK'(B)$ に拡張される. さらに, α が同型ならば, $\widetilde{\alpha}$ も同型にできる.

この命題は, グラフ C^*-環と類似の K-理論的性質をもつ C^*-環に対し, [MN12] によって改良された filtrated K-theory FK' は, より小さな不変量である $FK_{\mathcal{R}}$ から復元可能であることを主張している. 次が主定理である.

定理 3.4. 安定, 純無限, 可分, 緊密な X 上の C^*-環 A があるグラフ E のグラフ C^*-環 $C^*(E)$ と X-同変に同型であるための必要十分条件は, A が次の条件をみたすことである:

(i) A は核型, 実次元 0 である;

(ii) 各点 $x \in X$ に対し, $K_1(A(x))$ は自由アーベル群である;

(iii) 各点 $x \in X$ に対し, $A(x)$ は bootstrap class に属する.

必要性はグラフ C^*-環の性質から成り立つ. 十分性がこの定理の本質である. この定理が一般の有限 T_0-空間に対して成り立つかどうかは未解決問題である.

References

[ABK14a] Sara E. Arklint, Rusmus Bentmann, and Takeshi Katsura, *Reduction of filtered K-theory and a characterization of Cuntz-Krieger algebras*, Journal of K-Theory **14** (2014), no. 3, 570–613.

[ABK14b] ______, *The K-theoretical range of Cuntz-Krieger algebras*, Journal of Functional Analysis **266** (2014), no. 8, 5448–5466.

[BK11] Rusmus Bentmann and Manuel Köhler, *Universal coefficient theorems for C^*-algebras over finite topological spaces*, 2011.

[Bla98] Bruce Blackadar, *K-theory for operator algebras*, 2nd ed., Mathematical Sciences Research Institute publications, vol. 5, Cambridge University Press, 1998.

[Bla06] ______, *Operator algebras: theory of C^*-algebras and von Neumann algebras*, vol. 122, Springer Science & Business Media, 2006.

[Kir94] Eberhard Kirchberg, *The classification of purely infinite C^*-algebras using Kasparov's theory*, 1994.

[MN09] Ralf Meyer and Ryszard Nest, *C^*-algebras over topological spaces: the bootstrap class*, Muenster Journal of Mathematics **2** (2009), 215–252.

[MN12] ______, *C^*-algebras over topological spaces: filtrated K-theory*, Canadian Journal of Mathematics **64** (2012), no. 2, 368–408.

[Phi00] N. Christopher Phillips, *A classification theorem for nuclear purely infinite simple C^*-algebras.*, Documenta Mathematica **5** (2000), 49–114.

[Rae05] Iain Raeburn, *Graph algebras*, no. 103, American Mathematical Society, 2005.

[Res06] Gunnar Restorff, *Classification of Cuntz-Krieger algebras up to stable isomorphism*, Journal für die reine und angewandte Mathematik **2006** (2006), no. 598, 185–210.

[RS87] Jonathan Rosenberg and Claude Schochet, *The Künneth theorem and the universal coefficient theorem for Kasparov's generalized K-functor*, Duke Mathematical Journal **55** (1987), no. 2, 431–474.