

境界付き曲面上の Whitney 計量に関する Gauss-Bonnet 型公式について

北海道大学 大学院理学院 数学専攻
橋堀恭矢 (Kyoya HASHIBORI) *

概要

Hasegawa-Honda-Naokawa-Saji-Umehara-Yamada は、交叉帽子の内的不変量に注目し、内在的交叉帽子と呼ばれる半正定値計量の特異点を定義した (2015). Whitney 計量とは、内在的交叉帽子を許容する半正定値計量のことである. さらに、Hasegawa らは、閉曲面上の Whitney 計量に関する Gauss-Bonnet 型公式を導出した. 本講演では、内在的交叉帽子を通過する正則曲線の測地的曲率測度の有界性、内在的交叉帽子における接ベクトルの角度について解説し、Hasegawa らによる Gauss-Bonnet 型公式を境界付き曲面の場合に一般化した結果を紹介する.

1 導入

Hasegawa-Honda-Naokawa-Saji-Umehara-Yamada は、滑らかな写像の特異点である交叉帽子特異点の一般化として、内在的交叉帽子を定義した ([2, Definition 4.1]). 滑らかな写像芽 $f : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^3, 0)$ が交叉帽子であるとは、 f が次の式で与えられる滑らかな写像芽 $f_{CC} : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^3, 0)$ に A 同値であることである.

$$f_{CC}(u, v) := (u, uv, v^2). \quad (1.1)$$

ここで、2つの滑らかな写像芽 $f_i : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^3, 0)$, $i = 1, 2$ が A 同値であるとは、2つの微分同相写像芽 $\varphi : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$, $\Phi : (\mathbb{R}^3, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^3, 0)$ が存在して、 $f_2 = \Phi \circ f_1 \circ \varphi^{-1}$ が成り立つことである. つまり、 f の領域と余域のそれぞれに適当な座標変換を施して f_{CC} に一致させることができるとき、 f を交叉帽子と呼ぶのである.

さて、古典的な Gauss-Bonnet の定理は、コンパクトで向きづけられた境界付き 2次元 Riemann 多様体 (M, g) に対して、次の公式で述べられる定理のことである.

$$\int_M K dA + \int_{\partial M} \kappa_g d\tau = 2\pi\chi(M). \quad (1.2)$$

ここで、 K は Riemann 計量 g の Gauss 曲率、 dA ($\chi(M)$) は M の面積形式 (Euler 標数)、 κ_g は境界 ∂M の測地的曲率、 $d\tau$ は g に関する弧長測度を表している. Kuiper は \mathbb{R}^3 の中の交叉帽子特異点を許容する閉曲面 (境界のないコンパクトな曲面) に対する Gauss-Bonnet 型公式を導出し、交叉帽子特異点は式 (1.2) の $\partial M = \emptyset$ の場合に影響を与えないことを示した ([4, (7a)]). その後、Kuiper

* E-mail: hashibori.kyoya.a7@elms.hokudai.ac.jp

による公式の一般化として、Hasegawa らは 2 次元閉多様体上の内在的交叉帽子を許容する半正定値計量（Whitney 計量と呼ばれる）に関する Gauss-Bonnet 型公式を導出した ([2, Theorem 5.1]). 本稿では、内在的交叉帽子を通過する滑らかな正則曲線の測地的曲率測度の有界性に関する結果を示し（定理 2.3）、Hasegawa らによる公式を境界付き 2 次元多様体の場合に一般化した結果を示す（定理 3.1）.

本稿は次のように構成されている. §2 では、内在的交叉帽子の理論を簡単に説明し、内在的交叉帽子を通過する滑らかな正則曲線の測地的曲率測度の有界性に関する結果を示す. §3 では、内在的交叉帽子を始点とする初期ベクトルの存在性について言及し、境界付き 2 次元多様体上の Whitney 計量に関する Gauss-Bonnet 型公式を示す.

2 内在的交叉帽子における測地的曲率測度の有界性

M を（境界を持ちうる）滑らかな 2 次元多様体、 ds^2 を M 上の半正定値計量とする. 点 $p \in M$ が ds^2 の特異点であるとは、 $(0, 2)$ テンソル $(ds^2)_p : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ が退化することである. 一方、 ds^2 の特異点でない点を ds^2 の正則点と呼ぶ.

定義 2.1 ([2, Definition 4.1]) ds^2 の特異点 p が内在的交叉帽子であるとは、次の条件を満たすような p を中心とする座標系 (u, v) をとれることである.

(1) 原点で

$$F = G = G_u = G_v = 0, \quad E_v = 2F_u$$

が成り立つ. ここで、 $ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$ と表している.

(2) 滑らかな関数 $EG - F^2 (\geq 0)$ のヘシアンが原点で消えないことである.

ds^2 が内在的交叉帽子だけを許容するとき、 ds^2 は **Whitney 計量** と呼ばれる.

定義より、内在的交叉帽子 p は $EG - F^2$ の極小値であることがわかるから、 p は ds^2 の孤立特異点である. また、 p は階数 1 の特異点、つまり、 p における退化空間 $\{v \in T_p M \mid \langle v, w \rangle = 0, \forall w \in T_p M\}$ は $T_p M$ の 1 次元部分ベクトル空間であることが確かめられる. ここで、任意の $p \in M$ と $v, w \in T_p M$ に対して、 $\langle v, w \rangle := (ds^2)_p(v, w)$ とおいた ([2, Proposition 4.3]). さらに、滑らかな写像 $f : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ の交叉帽子特異点は f の第一基本形式の内在的交叉帽子であることが確かめられる. つまり、内在的交叉帽子は交叉帽子特異点の一般化の概念である ([2, Corollary 4.5]).

事実 2.2 ([2, Definition 4.9, Theorem 4.11]) 次の 3 つの式を満たすような内在的交叉帽子を中心とする座標系 (u, v) と 3 つの定数 $\alpha_{02} (> 0)$, α_{11} , α_{20} が存在する.

$$E(u, v) = 1 + (\alpha_{20})^2 u^2 + 2\alpha_{11}\alpha_{20}uv + \left(1 + (\alpha_{11})^2\right) v^2 + O(u, v)^3,$$

$$F(u, v) = \alpha_{11}\alpha_{20}u^2 + \left(1 + (\alpha_{11})^2 + \alpha_{02}\alpha_{20}\right) uv + \alpha_{02}\alpha_{11}v^2 + O(u, v)^3,$$

$$G(u, v) = \left(1 + (\alpha_{11})^2\right) u^2 + 2\alpha_{02}\alpha_{11}uv + (\alpha_{02})^2 v^2 + O(u, v)^3.$$

ここで、 $ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$ と表していて、 $O(u, v)^3$ は (u, v) に関する階数 3 以上の項を表している。(このような座標系を **2 階の West 型座標系** と呼ぶ.)

West によって導かれた交叉帽子の標準形の領域の座標系は 2 階の West 型座標系になっていることが確かめられる ([2, Proposition 4.10], [7, Proposition 3.1.1], [1, Proposition 2.1]). また, 定数 $\alpha_{02}, |\alpha_{11}|, \alpha_{20}$ は 2 階の West 型座標系の選び方に依存しない定数であることが確かめられ, α_{11} は M の向きに同調する 2 階の West 型座標系の選び方に依存しないことが確かめられる ([2, Proposition 4.6, Theorem 4.17]).

次の結果は, 本稿における主結果の 1 つである.

定理 2.3 ([3]) M を (境界を持ちうる) 滑らかな 2 次元多様体, $\gamma : [0, \varepsilon) \rightarrow M$ を M 上の半正定値計量 ds^2 の内在的交叉帽子を始点とする滑らかな正則曲線とする. ここで, $\varepsilon > 0$ は $\gamma((0, \varepsilon))$ が ds^2 の正則点だけからなるような十分に小さい数である. このとき, 測地的曲率測度 $\kappa_g d\tau$ は $[0, \varepsilon)$ 上の連続な 1 次微分形式である. ここで, $d\tau$ は弧長測度, つまり, $d\tau := |\dot{\gamma}(t)| dt$ ($\dot{\gamma}(t) := d\gamma/dt(t)$, $|\dot{\gamma}(t)| := \sqrt{\langle \dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t) \rangle}$) を表している.

証明. 内在的交叉帽子 $p = \gamma(0)$ を中心とする 2 階の West 型座標系 (u, v) をとり, $\gamma(t) = (u(t), v(t))$ と書いて, $\gamma(t)$, $t \in (0, \varepsilon)$ の測地的曲率 κ_g を $ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$ の係数 E, F, G を用いて表すことから始める. γ に沿う接ベクトル場 $\dot{\gamma}$, $\{\dot{\gamma}(t)/|\dot{\gamma}(t)|, n(t)\}$ が $T_{\gamma(t)}M$ の正の正規直交基底となるような γ に沿う単位法線ベクトル場 n , γ に沿う共変微分 $\nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma}$ は, それぞれ次のように表される.

$$\dot{\gamma}(t) = \dot{u}(t) \left(\frac{\partial}{\partial u} \right)_{\gamma(t)} + \dot{v}(t) \left(\frac{\partial}{\partial v} \right)_{\gamma(t)}, \quad (2.1)$$

$$n(t) = \frac{-(\dot{u}(t)F + \dot{v}(t)G)}{\sqrt{EG - F^2} \sqrt{\dot{u}(t)^2 E + 2\dot{u}(t)\dot{v}(t)F + \dot{v}(t)^2 G}} \left(\frac{\partial}{\partial u} \right)_{\gamma(t)} + \frac{\dot{u}(t)E + \dot{v}(t)F}{\sqrt{EG - F^2} \sqrt{\dot{u}(t)^2 E + 2\dot{u}(t)\dot{v}(t)F + \dot{v}(t)^2 G}} \left(\frac{\partial}{\partial v} \right)_{\gamma(t)}, \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} \nabla_{\dot{\gamma}(t)}\dot{\gamma} = & \left\{ \ddot{u}(t) + \frac{\dot{u}(t)^2 (GE_u - 2FF_u + FE_v)}{2(EG - F^2)} + \frac{\dot{u}(t)\dot{v}(t)(GE_v - FG_u)}{EG - F^2} \right. \\ & \left. + \frac{\dot{v}(t)^2 (2GF_v - GG_u - FG_v)}{2(EG - F^2)} \right\} \left(\frac{\partial}{\partial u} \right)_{\gamma(t)} \\ & + \left\{ \ddot{v}(t) + \frac{\dot{u}(t)^2 (2EF_u - EE_v - FE_u)}{2(EG - F^2)} + \frac{\dot{u}(t)\dot{v}(t)(EG_u - FE_v)}{EG - F^2} \right. \\ & \left. + \frac{\dot{v}(t)^2 (EG_v - 2FF_v + FG_u)}{2(EG - F^2)} \right\} \left(\frac{\partial}{\partial v} \right)_{\gamma(t)}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

ここで, $E := E(\gamma(t))$ などとおいた. また, ∇ は ds^2 の正則点集合上の Levi-Civita 接続を表している. なお, 式 (2.3) を得るために, 次で与えられる Christoffel の記号 Γ_{ij}^k , $i, j, k = 1, 2$ を使って

いることに注意する.

$$\begin{aligned}\Gamma_{11}^1 &= \frac{GE_u - 2FF_u + FE_v}{2(EG - F^2)}, & \Gamma_{11}^2 &= \frac{2EF_u - EE_v - FE_u}{2(EG - F^2)}, \\ \Gamma_{12}^1 &= \Gamma_{21}^1 = \frac{GE_v - FG_u}{2(EG - F^2)}, & \Gamma_{12}^2 &= \Gamma_{21}^2 = \frac{EG_u - FE_v}{2(EG - F^2)}, \\ \Gamma_{22}^1 &= \frac{2GF_v - GG_u - FG_v}{2(EG - F^2)}, & \Gamma_{22}^2 &= \frac{EG_v - 2FF_v + FG_u}{2(EG - F^2)}.\end{aligned}$$

式 (2.1)-(2.3) を用いて, $\gamma(t)$, $t \in (0, \varepsilon)$ の測地的曲率 κ_g は次の式で与えられる.

$$\begin{aligned}\kappa_g(t) &:= \frac{\langle \nabla_{\dot{\gamma}(t)} \dot{\gamma}, n(t) \rangle}{|\dot{\gamma}(t)|^2} \\ &= \frac{(\dot{u}(t)\ddot{v}(t) - \dot{v}(t)\ddot{u}(t))\sqrt{EG - F^2}}{\left(\dot{u}(t)^2 E + 2\dot{u}(t)\dot{v}(t)F + \dot{v}(t)^2 G\right)^{3/2}} \\ &\quad + \frac{\dot{u}(t)^3(2EF_u - EE_v - FE_u)}{2\sqrt{EG - F^2}\left(\dot{u}(t)^2 E + 2\dot{u}(t)\dot{v}(t)F + \dot{v}(t)^2 G\right)^{3/2}} \\ &\quad - \frac{\dot{v}(t)^3(2GF_v - GG_u - FG_v)}{2\sqrt{EG - F^2}\left(\dot{u}(t)^2 E + 2\dot{u}(t)\dot{v}(t)F + \dot{v}(t)^2 G\right)^{3/2}} \\ &\quad + \frac{\dot{u}(t)^2\dot{v}(t)(2EG_u - 3FE_v - GE_u + 2FF_u)}{2\sqrt{EG - F^2}\left(\dot{u}(t)^2 E + 2\dot{u}(t)\dot{v}(t)F + \dot{v}(t)^2 G\right)^{3/2}} \\ &\quad - \frac{\dot{u}(t)\dot{v}(t)^2(2GE_v - 3FG_u - EG_v + 2FF_v)}{2\sqrt{EG - F^2}\left(\dot{u}(t)^2 E + 2\dot{u}(t)\dot{v}(t)F + \dot{v}(t)^2 G\right)^{3/2}}.\end{aligned}\tag{2.4}$$

また, $d\tau = \sqrt{\dot{u}(t)^2 E + 2\dot{u}(t)\dot{v}(t)F + \dot{v}(t)^2 G} dt$ と表されるから, $\gamma(t)$, $t \in (0, \varepsilon)$ の測地的曲率測度 $\kappa_g d\tau$ は次の式で与えられる.

$$\begin{aligned}\kappa_g(t) d\tau &= \left\{ \frac{(\dot{u}(t)\ddot{v}(t) - \dot{v}(t)\ddot{u}(t))\sqrt{EG - F^2}}{\dot{u}(t)^2 E + 2\dot{u}(t)\dot{v}(t)F + \dot{v}(t)^2 G} \right. \\ &\quad + \frac{\dot{u}(t)^3(2EF_u - EE_v - FE_u)}{2\sqrt{EG - F^2}\left(\dot{u}(t)^2 E + 2\dot{u}(t)\dot{v}(t)F + \dot{v}(t)^2 G\right)} \\ &\quad - \frac{\dot{v}(t)^3(2GF_v - GG_u - FG_v)}{2\sqrt{EG - F^2}\left(\dot{u}(t)^2 E + 2\dot{u}(t)\dot{v}(t)F + \dot{v}(t)^2 G\right)} \\ &\quad + \frac{\dot{u}(t)^2\dot{v}(t)(2EG_u - 3FE_v - GE_u + 2FF_u)}{2\sqrt{EG - F^2}\left(\dot{u}(t)^2 E + 2\dot{u}(t)\dot{v}(t)F + \dot{v}(t)^2 G\right)} \\ &\quad \left. - \frac{\dot{u}(t)\dot{v}(t)^2(2GE_v - 3FG_u - EG_v + 2FF_v)}{2\sqrt{EG - F^2}\left(\dot{u}(t)^2 E + 2\dot{u}(t)\dot{v}(t)F + \dot{v}(t)^2 G\right)} \right\} dt.\end{aligned}\tag{2.5}$$

さて, 式 (2.4) と (2.5) を使って, p における測地的曲率測度 $\kappa_g d\tau$ の有界性を調べよう.

まず、 γ が p における退化空間、つまり、 v 軸に横断的である場合を考える。このとき、 γ を次のようにパラメータ表示することができる。

$$\gamma(t) = (t, v(t)), \quad v(0) = 0. \quad (2.6)$$

式 (2.6) に関して E, F, G とそれらの偏微分を計算し、これらの結果を (2.4) に代入すると、 $t > 0$ について次の式を得る。

$$\kappa_g(t) = \frac{(\alpha_{11} + \alpha_{02}\dot{v}(0))(\alpha_{20} + \dot{v}(0)(2\alpha_{11} + \alpha_{02}\dot{v}(0))) + 2\dot{v}(0)}{\sqrt{(\alpha_{11} + \alpha_{02}\dot{v}(0))^2 + 1}} + O(t).$$

したがって、 κ_g は $[0, \varepsilon)$ 上の連続な関数であり、特に、 $d\tau = (1 + O(t)) dt$ が得られるから、 $\kappa_g d\tau$ は $[0, \varepsilon)$ 上の連続な 1 次微分形式である。

次に、 γ が p における退化空間に接している場合を考える。このとき、 γ を次のようにパラメータ表示することができる。

$$\gamma(t) = (u(t), t), \quad u(0) = \dot{u}(0) = 0. \quad (2.7)$$

式 (2.7) に関して E, F, G とそれらの偏微分を計算し、これらの結果を (2.4) に代入すると、 $t > 0$ について次の式を得る。

$$\begin{aligned} \kappa_g(t) = & \frac{3\alpha_{11}\ddot{u}(0)^2 - \alpha_{02}u^{(3)}(0)}{2t((\alpha_{02})^2 + \ddot{u}(0)^2)^{3/2}} - \frac{\alpha_{02}u^{(4)}(0)}{3\sqrt{(\alpha_{02})^2 + \ddot{u}(0)^2}} \\ & + \frac{\ddot{u}(0) \begin{pmatrix} 9(\alpha_{02})^2 u^{(3)}(0)^2 + \alpha_{02}\alpha_{11}u^{(3)}(0)(43(\alpha_{02})^2 - 11\ddot{u}(0)^2) \\ + 3 \begin{pmatrix} -6(\alpha_{02})^4 \\ + (-27(\alpha_{11})^2 + 4\alpha_{02}\alpha_{20} - 3)(\alpha_{02})^2 \ddot{u}(0)^2 \\ + (4\alpha_{02}\alpha_{20} + 3)\ddot{u}(0)^4 \end{pmatrix} \end{pmatrix}}{12\alpha_{02}((\alpha_{02})^2 + \ddot{u}(0)^2)^{5/2}} + O(t). \quad (2.8) \end{aligned}$$

また、 $d\tau = \left(t\sqrt{(\alpha_{02})^2 + \ddot{u}(0)^2} + O(t^2)\right) dt$ が得られるから、測地的曲率測度 $\kappa_g d\tau$ は $t > 0$ について次の式で与えられる。

$$\kappa_g(t) d\tau = \left(\frac{3\alpha_{11}\ddot{u}(0)^2 - \alpha_{02}u^{(3)}(0)}{2((\alpha_{02})^2 + \ddot{u}(0)^2)} + O(t) \right) dt.$$

いま、 (u, v) は 2 階の West 型座標系であるから、 $\alpha_{02} > 0$ であることに注意する (事実 2.2)。したがって、 $\kappa_g d\tau$ は $[0, \varepsilon)$ 上の連続な 1 次微分形式である。□

式 (2.8) を観察してみると、次の主張が得られる。

系 2.4 内在的交叉帽子 $p \in M$ を始点とする滑らかな正則曲線 $\gamma : [0, \varepsilon) \rightarrow M$ が p における退化空間に接しているならば、 γ の測地的曲率が p において有界であることと、 p を中心とする 2 階の West 型座標系 (u, v) に関して γ が次の式でパラメータ付けされることは同値である。

$$\gamma(t) = (u(t), t), \quad u(0) = \dot{u}(0) = 0, \quad 3\alpha_{11}\ddot{u}(0)^2 - \alpha_{02}u^{(3)}(0) = 0. \quad (2.9)$$

注意 2.5 式 (2.6) において $\gamma(t) = (t, 0)$ とおいた場合に、内在的交叉帽子を中心とする極座標に関する測地的曲率測度の公式が [2, Theorem 5.1] の証明の中で導かれている。

例 2.6 $f_{CC} : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^3, 0)$ を式 (1.1) で定義される交叉帽子とすると, f_{CC} の領域の座標系は 2 階の West 型座標系であり, 原点における退化空間は v 軸である. いま, 次の f_{CC} の領域内の 4 つの曲線 γ_i , $i = 1, 2, 3, 4$ を考える.

$$\gamma_1(t) := (t, t), \quad \gamma_2(t) := \left(\frac{t^2}{2}, t\right), \quad \gamma_3(t) := \left(\frac{t^3}{6}, t\right), \quad \gamma_4(t) := \left(\frac{t^4}{24}, t\right).$$

曲線 γ_1 は v 軸に横断的であり, γ_i , $i = 2, 3, 4$ は v 軸に接している. これらの曲線の像 $\hat{\gamma}_i := f_{CC} \circ \gamma_i$ はそれぞれ次のように表される (図.2.1).

$$\hat{\gamma}_1(t) = (t, t^2, t^2), \quad \hat{\gamma}_2(t) = \left(\frac{t^2}{2}, \frac{t^3}{2}, t^2\right), \quad \hat{\gamma}_3(t) = \left(\frac{t^3}{6}, \frac{t^4}{6}, t^2\right), \quad \hat{\gamma}_4(t) = \left(\frac{t^4}{24}, \frac{t^5}{24}, t^2\right).$$

曲線 $\hat{\gamma}_i$ の測地的曲率 κ_g^i はそれぞれ次のように計算される.

$$\begin{aligned} \kappa_g^1(t) &= \frac{6}{\sqrt{4t^2 + 5}(8t^2 + 1)^{3/2}} \rightarrow \frac{6}{\sqrt{5}} \quad (t \rightarrow 0), \\ \kappa_g^2(t) &= \frac{-\operatorname{sgn}(t) 84}{(9t^2 + 20)^{3/2} \sqrt{17t^2 + 16}} \rightarrow \mp \frac{21}{40\sqrt{5}} \quad (t \rightarrow \pm 0), \\ \kappa_g^3(t) &= \frac{72(t^4 - 96t^2 - 36)}{t\sqrt{t^4 + 144t^2 + 144}(16t^4 + 9t^2 + 144)^{3/2}} \rightarrow -\infty \quad (t \rightarrow 0), \\ \kappa_g^4(t) &= \frac{\operatorname{sgn}(t) 96(5t^6 - 8640t^2 - 4608)}{\sqrt{t^6 + 2304t^2 + 2304}(25t^6 + 16t^4 + 2304)^{3/2}} \rightarrow \mp \frac{1}{12} \quad (t \rightarrow \pm 0). \end{aligned}$$

ここで, $\kappa_g^3(t)$ は $t \rightarrow 0$ とすると $-\infty$ に発散していることに注意する. 実際, γ_3 は条件 (2.9) を満たしていない. また, $\hat{\gamma}_i$ の測地的曲率測度 $\kappa_g^i d\tau_i$ はそれぞれ次のように計算される.

$$\begin{aligned} \kappa_g^1(t) d\tau_1 &= \frac{6dt}{\sqrt{4t^2 + 5}(8t^2 + 1)^{3/2}} \rightarrow \frac{6dt}{\sqrt{5}} \quad (t \rightarrow 0), \\ \kappa_g^2(t) d\tau_2 &= \frac{-\operatorname{sgn}(t) 42tdt}{(9t^2 + 20)\sqrt{17t^2 + 16}} \rightarrow 0dt \quad (t \rightarrow 0), \\ \kappa_g^3(t) d\tau_3 &= \frac{12(t^4 - 96t^2 - 36) dt}{\sqrt{t^4 + 144t^2 + 144}(16t^4 + 9t^2 + 144)} \rightarrow -\frac{dt}{4} \quad (t \rightarrow 0), \\ \kappa_g^4(t) d\tau_4 &= \frac{\operatorname{sgn}(t) 4t(5t^6 - 8640t^2 - 4608) dt}{\sqrt{t^6 + 2304t^2 + 2304}(25t^6 + 16t^4 + 2304)} \rightarrow 0dt \quad (t \rightarrow 0). \end{aligned}$$

故に, 1 次微分形式 $\kappa_g^i d\tau_i$ は原点において連続である.

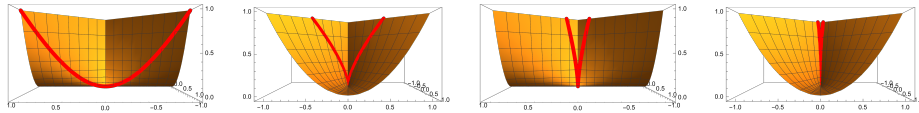


図.2.1 左から右に, 赤線はそれぞれ $\hat{\gamma}_i$, $i = 1, 2, 3, 4$ を表している.

3 境界付き曲面上の Whitney 計量に関する Gauss-Bonnet 型公式

M を (境界を持ちうる) 滑らかな 2 次元多様体, $\gamma : [0, \varepsilon) \rightarrow M$ を M 上の半正定値計量 ds^2 の内在的交叉帽子 $p \in M$ を始点とする滑らかな正則曲線とする. p を中心とする 2 階の West 型座標系 (u, v) をとる. γ が p における退化空間, つまり, v 軸に横断的であるならば, γ を式 (2.6) のようにパラメータ表示することができ, このとき $t > 0$ について $\dot{\gamma}(t) / |\dot{\gamma}(t)| = (1, \dot{v}(0)) + O(t)$ を得る. したがって, γ の p における初期ベクトルは存在する. 一方, γ が p における退化空間に接しているならば, γ を式 (2.7) のようにパラメータ表示することができ, このとき $t > 0$ について $\dot{\gamma}(t) / |\dot{\gamma}(t)| = (0, 1/(\alpha_{02}t)) + O(t)$ を得る. 故に, 極限 $\lim_{t \rightarrow +0} \dot{\gamma}(t) / |\dot{\gamma}(t)|$ は発散する.

上の考察により, 次の境界付き 2 次元多様体上の Whitney 計量に関する Gauss-Bonnet 型公式が得られ, 本稿におけるもう 1 つの主結果である. これは, [2, Theorem 5.1] の境界付き 2 次元多様体の場合への一般化である.

定理 3.1 ([3]) M をコンパクトで向きづけられた滑らかな境界付き 2 次元多様体, ds^2 を M 上の Whitney 計量とする. いま, 境界 ∂M は ∂M 上の各特異点における退化空間に横断的であると仮定する. このとき,

$$\int_M K dA + \int_{\partial M} \kappa_g d\tau = 2\pi\chi(M)$$

が成り立つ.

証明. ds^2 の特異点 $p \in M$ が内部 $M \setminus \partial M$ にある場合の公式は, [2, Theorem 5.1] と全く同じ方法で証明できる. 以下, p は境界 ∂M の上にあると仮定する. p の正に向きづけられた 2 階の West 型座標系傍 $(U; u, v)$ をとる. $D(r)$ を U に含まれる中心 p , 半径 $r > 0$ の閉円板, $\{P_1, P_2\}$ を境界 $\partial D(r)$ と ∂M の交わりとする. p が頂点になるように, そして p を始点とする辺たちが p における退化空間に横断的になるように $D(r)$ を三角形分割する. すると, 次の式が得られる.

$$\int_{D(r)} K dA + \int_{\partial D(r)} \kappa_g d\tau = 2\pi - \sum_{i=1,2} (\pi - \angle P_i). \quad (3.1)$$

ここで, 式 (3.1) の左辺の第 1 項 (第 2 項) は [2, Corollary 4.18] (定理 2.3) により well-defined である. こうして主張が証明された. \square

参考文献

- [1] Fukui. T, Hasegawa. M, *Fronts of Whitney umbrella—a differential geometric approach via blowing up*. J. Singul. **4** (2012), 35–67.
- [2] Hasegawa. M, Honda. A, Naokawa. K, Saji. K, Umehara. M, Yamada. K, *Intrinsic properties of surfaces with singularities*. Internat. J. Math. **26** (2015), no. 4, 1540008, 34 pp.
- [3] Hashibori. K, *Behavior of curves through intrinsic cross caps*, preprint.
- [4] Kuiper. N. H, *Stable surfaces in euclidean three space*. Math. Scand. **36** (1975), 83–96.

- [5] Saji. K, Umehara. M, Yamada. K, *Behavior of corank-one singular points on wave fronts.* Kyushu J. Math. **62** (2008), no. 1, 259–280.
- [6] Umehara. M, Yamada. K, *Differential geometry of curves and surfaces.* World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack, NJ, 2017. xii + 312 pp.
- [7] West. J. M, *The differential geometry of the cross-cap*, Ph. D. thesis, Liverpool Univ. (1995).