

# 対合的カンドルの付随群とその2次カンドルホモロジーの計算への応用

北海道大学大学院理学院数学専攻  
長谷川 蒼 (Aoi HASEGAWA) \*

## 概要

カンドルとは結び目理論のライデマイスター移動を背景に導入された代数系である。カンドルは結び目理論のみならず, Yang-Baxter の方程式集合論的解, 対称空間等の研究で応用がなされている。任意のカンドル  $Q$  に対してその付随群  $As(Q)$  が群の表示を用いて定義される。付随群の構造を調べることはカンドルの構造を調べるのに有効であるが, 付随群は群の表示を用いて定義されているため, 付随群の構造を調べることは一般には難しい。また, カンドルホモロジーは状態和における結び目不変量を定義するために導入された概念である。Eisermann[4] によって2次カンドルホモロジーを計算するための定理が得られたが, それを使って2次カンドルホモロジーを計算する場合, 連結なカンドルの場合であっても, 付随群の安定化部分群と交換子部分群を調べる必要があるため, 2次カンドルホモロジーの具体的な計算を完遂することは一般には難しい。本稿では, 対合的なカンドル  $Q$  に対して  $As(Q)$  の剰余群である  $As_f(Q)$  を導入し, そこで得られた結果を用いて, 特定の Coxeter カンドルに対する2次カンドルホモロジー計算について紹介する。

## 1 カンドル

### 1.1 カンドルとその付随群

空でない集合  $Q$  とその二項演算  $\triangleleft: Q \times Q \rightarrow Q$  が以下の条件を満たすとき,  $(Q, \triangleleft)$  (単に  $Q$ ) はカンドルという:

1.  $x \triangleleft x = x$  ( $x \in Q$ ),
2. 任意の  $y \in Q$  に対して, 写像  $\bullet \triangleleft y: Q \rightarrow Q, x \mapsto x \triangleleft y$  が全単射,
3.  $(x \triangleleft y) \triangleleft z = (x \triangleleft z) \triangleleft (y \triangleleft z)$  ( $x, y, z \in Q$ ).

また, 全ての  $x, y \in Q$  に対して  $x \triangleleft^2 y = x$  が成り立つとき, カンドル  $Q$  は対合的 (involutive) であるという。  $\triangleleft$  をカンドル演算として持つカンドル  $Q$  の部分集合  $A$  が  $\triangleleft$  のもとでカンドルとなると,  $A$  を  $Q$  の部分カンドルという。

**Example 1.1 (自明カンドル)** 任意の空でない集合  $Q$  は  $x \triangleleft y = x$  ( $x, y \in Q$ ) という演算のもとで対合的カンドルとなる。これを自明カンドルという。

---

\* E-mail:hasegawa@math.sci.hokudai.ac.jp

**Example 1.2 (二面体カンドル)**  $R_n = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$  とする. 以下の演算のもとで  $R_n$  は対合的カンドルとなる. これを二面体カンドルという.

$$x \triangleleft y := 2y - x \quad (x, y \in R_n).$$

**Example 1.3 (Alexander カンドル)**  $\mathbb{Z}[T^{\pm 1}]$  を Laurent 多項式環<sup>\*1</sup> とする.  $\mathbb{Z}[T^{\pm 1}]$  加群  $M$  は以下の演算のもとでカンドルとなる. これを Alexander カンドルという:

$$x \triangleleft y := y + T(x - y) \quad (x, y \in Q).$$

全ての  $x \in M$  に対して  $T^2(x) = x$  が成り立つならば,  $M$  は対合的カンドルである.

**Example 1.4 (共役カンドル)** 任意の群  $G$  は,  $x \triangleleft y := y^{-1}xy$  ( $x, y \in Q$ ) という演算のもとでカンドルとなる. これを共役カンドルといい,  $\text{Conj}(G)$  とかく.

**Example 1.5 (Dehn カンドル)**  $G$  を群,  $S$  を  $G$  の生成系とする.  $D(S) := \cup_{g \in G} g^{-1}Sg$  は  $\text{Conj}(G)$  の部分カンドルである. これを  $S$  の Dehn カンドルといい,  $D(S)$  とかく. 全ての  $s \in S$  に対して  $s^2 = 1$  が成り立つならば,  $D(S)$  は対合的カンドルである.

**Example 1.6 (Coxeter カンドル)**  $(W, S)$  を Coxeter 系 (Coxeter 系の定義は後で行う) とする.  $S$  の Dehn カンドルを  $(W, S)$  に関する Coxeter カンドルといい,  $Q_W$  とかく. 全ての  $s \in S$  に対して  $s^2 = 1$  が成り立つため, Coxeter カンドルは対合的カンドルである.

任意のカンドル  $Q$  に対して,  $Q$  の付随群  $\text{As}(Q)$  が以下のような表示で定義される:

$$\text{As}(Q) := \langle e_x \ (x \in Q) \mid e_y^{-1}e_xe_y = e_{x \triangleleft y} \ (x, y \in Q) \rangle.$$

任意のカンドル  $Q$  に対して,  $x \cdot e_y := x \triangleleft y$  ( $x, y \in Q$ ) となるような  $\text{As}(Q)$  の  $Q$  への右作用が定義できる.  $\text{As}(Q)$  の  $Q$  への右作用による軌道全体の集合を  $O(Q)$  とかく.  $\text{As}(Q)$  が  $Q$  に推移的に作用するとき,  $Q$  は連結であるという. 付随群のアーベル化の構造については, 以下の補題が成立する.

**Lemma 1.7 ([6], Lemma 2.7)**  $Q = \sqcup_{j \in O(Q)} Q_j$  をカンドル  $Q$  の  $\text{As}(Q)$  作用による軌道分解とする. 各  $Q_i \in O(Q)$  に対して, well-defined な準同型写像  $\eta_i: \text{As}(Q) \rightarrow \mathbb{Z}$  を以下のように定義する:  
 $\eta_i: \text{As}(Q) \rightarrow \mathbb{Z}$

$$\eta_i(e_x) = \begin{cases} 1 & (\text{if } x \in Q_i) \\ 0 & (\text{if } x \notin Q_i). \end{cases}$$

このとき,  $\oplus_{j \in O(Q)} \eta_j: \text{As}(Q) \rightarrow \mathbb{Z}^{\oplus O(Q)}$  は同型  $\text{As}(Q)_{ab} \cong \mathbb{Z}^{\oplus O(Q)}$  を誘導する. ただし,  $\mathbb{Z}^{\oplus O(Q)}$  は  $\mathbb{Z}$  の  $O(Q)$  の濃度分の直積とする.

$ab_{\text{As}(Q)}: \text{As}(Q) \rightarrow \text{As}(Q)_{ab}$  が全射になることと合わせると,  $\text{As}(Q)$  は無限群となる.

**Remark 1.8**  $Q$  をカンドル,  $R$  を  $O(Q)$  の完全代表系とする. Lemma 1.7 より, 以下の等式が成立する:

$$\text{As}(Q)_{ab} = \bigoplus_{x \in R} \langle [e_x] \rangle, \quad \langle [e_x] \rangle \cong \mathbb{Z} \quad (x \in R).$$

<sup>\*1</sup>  $T + T^{-1}$  のような負のべきを含む項が存在する多項式環である.

Remark 1.9  $Q \mapsto \text{As}(Q)$  によって定義されるカンドルの圏から群の圏への関手は,  $G \mapsto \text{Conj}(G)$  によって定義される群の圏からカンドルの圏への関手の左随伴となっている. すなわち, 以下のような自然な全単射が存在する:

$$\text{Hom}_{\text{groups}}(\text{As}(Q), G) \cong \text{Hom}_{\text{quandles}}(Q, \text{Conj}(G)).$$

これにより, 付随群はカンドルを理解するのに重要な役割を果たすが, 付随群は群の表示を用いて定義されているため, その構造を調べるのは一般には難しい.

そこで, 付随群より構造が単純になり得るような群を考える.  $Q$  を対合的カンドルとする.  $\text{As}_f(Q)$  を以下のような表示で定義する:

$$\text{As}_f(Q) = \langle \bar{e}_x \ (x \in Q) \mid \bar{e}_y^{-1} \bar{e}_x \bar{e}_y = \bar{e}_{x \triangleleft y}, \ \bar{e}_z^2 = 1 \ (x, y, z \in Q) \rangle.$$

また,  $\pi: \text{As}(Q) \rightarrow \text{As}_f(Q)$  を  $e_x$  を  $\bar{e}_x$  に写す準同型写像,  $Z_Q := \text{Ker}\pi$  とする.

Remark 1.10 実は  $Z_Q$  は  $\text{As}(Q)$  の中心に含まれ,  $\{e_x^2 \mid x \in Q\}$  で生成される  $\text{As}(Q)$  の部分群であることがわかる.  $\text{As}_f(Q)$  は  $\text{As}(Q)/Z_Q$  と同型となる. これにより,  $\text{As}_f(Q)$  は  $\text{As}(Q)$  の剰余群と思っても良い. さらに,  $Z_Q$  は  $\{e_x^2 \mid x \in Q\}$  を基底とする自由アーベル群であることが証明できる.

$\text{As}(Q)$  は常に無限群となるのに対し,  $\text{As}_f(Q)$  は有限群になることがある.

Proposition 1.11  $Q$  が有限カンドルであるならば,  $\text{As}_f(Q)$  は有限群である.

$G$  が特別な表示を持つとき, 以下の定理が成立する.

Theorem 1.12 (H.)  $G = \langle S \mid R \rangle$  を群,  $D(S)$  を  $S$  の Dehn カンドルとする. 全ての  $s \in S$  に対して  $s^2 \in R$  であり,  $R$  内の他の関係は  $w^{-1} s w t^{-1}$  の形をしているとする. このとき, 全射  $\text{As}(D(S)) \rightarrow G$  は well-defined な同型  $\text{As}_f(D(S)) \rightarrow G$ ,  $\bar{e}_x \mapsto x$  を誘導する.

Remark 1.8 と同様の主張が  $\text{As}_f(Q)_{ab}$  の場合でも成立する.

Lemma 1.13 対合的カンドル  $Q$  に対して, 以下の等式が成立する:

$$\text{As}_f(Q)_{ab} = \bigoplus_{x \in R} \langle [\bar{e}_x] \rangle, \ \langle [\bar{e}_x] \rangle \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

Theorem 1.14 は, 新たな 2 次カンドルホモロジーの計算公式を与えることに対して重要な役割を果たす.

Theorem 1.14 (H.)  $\pi$  の  $\text{As}(Q)$  の交換子部分群への制限

$$\pi|_{[\text{As}(Q), \text{As}(Q)]}: [\text{As}(Q), \text{As}(Q)] \rightarrow [\text{As}_f(Q), \text{As}_f(Q)]$$

は同型写像である.

この同型写像によって以下の結果が得られる.

Theorem 1.15 (H.) 任意の対合的カンドル  $Q$  に対して、以下の可換図式はプルバックになる:

$$\begin{array}{ccc} \text{As}(Q) & \xrightarrow{ab_{\text{As}(Q)}} & \text{As}(Q)_{ab} \\ \pi \downarrow & & \pi_{ab} \downarrow \\ \text{As}_f(Q) & \xrightarrow{ab_{\text{As}_f(Q)}} & \text{As}_f(Q)_{ab}. \end{array}$$

さらに、上の可換図式から誘導されて得られる Eilenberg-MacLane 空間<sup>\*2</sup> からなる可換図式はホモトピープルバック<sup>\*3</sup>になる:

$$\begin{array}{ccc} K(\text{As}(Q), 1) & \longrightarrow & K(\text{As}(Q)_{ab}, 1) \\ \downarrow & & \downarrow \\ K(\text{As}_f(Q), 1) & \longrightarrow & K(\text{As}_f(Q)_{ab}, 1). \end{array}$$

Remark 1.16  $I$  を単位閉区間、 $C(K(\text{As}_f(Q)_{ab}, 1))$  を  $I$  から  $K(\text{As}_f(Q)_{ab}, 1)$  への連続写像全体の集合、 $Bab_{\text{As}_f(Q)}$ ,  $B\pi_{ab}$  をそれぞれ  $ab_{\text{As}_f(Q)}$ ,  $\pi_{ab}$  から誘導された連続写像とする。上記のプルバックによって  $\text{As}(Q)$  は  $\{(\alpha, \beta) \in \text{As}_f(Q) \times \text{As}(Q)_{ab} \mid ab_{\text{As}_f(Q)}(\alpha) = \pi_{ab}(\beta)\}$  と群同型となり、ホモトピープルバックによって  $K(\text{As}(Q), 1)$  は  $\{(x, \gamma, y) \in K(\text{As}(Q), 1) \times C(K(\text{As}_f(Q)_{ab}, 1)) \times K(\text{As}(Q)_{ab}, 1) \mid \gamma(0) = Bab_{\text{As}_f(Q)}(x), \gamma(1) = B\pi_{ab}(y)\}$  とホモトピー同値となる。

## 1.2 カンドルホモロジー

$Q$  をカンドルとする。  $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$  に対して、 $C_n^R(Q)$  を  $Q^n$  を基底とする自由アーベル群とする。  $n = 0$  のときは、 $C_0^R(Q)$  を  $Q^0 := \{(\ )\}$  を基底とする自由アーベル群とする。  $n < 0$  のときは、 $C_n^R(Q)$  を自明な群とする。  $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$  に対して、 $C_n^R(Q)$  の部分群  $C_n^D(Q)$  を以下のように定義する:

$$C_n^D(Q) := \text{Span}_{\mathbb{Z}}\{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in Q^n \mid x_{i-1} = x_i \text{ for some } i \in \{2, 3, \dots, n\}\}.$$

$C_n(Q) := C_n^R(Q)/C_n^D(Q)$  とする。 また、  $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$  に対してバウンダリ写像  $\partial_n^R: C_n^R(Q) \rightarrow C_{n-1}^R(Q)$  を以下のように定義する:

$$\begin{aligned} \partial_n^R(x_1, x_2, \dots, x_n) &:= \sum_{1 \leq i \leq n} (-1)^i ((x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) \\ &\quad - (x_1 \triangleleft x_i, x_2 \triangleleft x_i, \dots, x_{i-1} \triangleleft x_i, x_{i+1}, \dots, x_n)). \end{aligned}$$

$n \leq 0$  のときは、 $\partial_n^R: C_n^R(Q) \rightarrow C_{n-1}^R(Q)$  を零写像と定義する。  $\partial(C_n^D(Q)) \subset C_{n-1}^D(Q)$  であることから、バウンダリ写像  $\partial_n: C_n(Q) \rightarrow C_{n-1}(Q)$  が誘導され、 $(C_n(Q), \partial_n)$  はチェイン複体となる。このとき、 $H_n(Q) := H_n((C_n(Q), \partial_n))$  と定義し、 $Q$  の  $n$  次カンドルホモロジーという。

0 次と 1 次のカンドルホモロジーについてはよく知られている。

<sup>\*2</sup> 群  $G$  に対して、 $(G, 1)$  型の Eilenberg-MacLane 空間  $K(G, 1)$  とは、その基本群が  $G$  と同型で、 $n (\geq 2)$  次ホモトピー群が自明になるような位相空間である。

<sup>\*3</sup> ホモトピープルバックとは対象が位相空間で射が連続写像のホモトピー類となる圏におけるプルバックである。プルバックの定義に現れる射の等号の代わりにホモトピックを表す記号を使ったものだと思えばよい。

Proposition 1.17  $Q$  をカンドルとする. このとき,

$$H_0(Q) \cong \mathbb{Z}, H_1(Q) \cong \mathbb{Z}^{\oplus O(Q)},$$

ただし,  $\mathbb{Z}^{\oplus O(Q)}$  は  $\mathbb{Z}$  の  $O(Q)$  の濃度分の直積とする.

2 次のカンドルホモロジーについては, 以下の事実が知られている.

Theorem 1.18 (Eisermann [4], Theorem 9.9)  $Q$  を連結なカンドル,  $x_0 \in Q$  とする. このとき, 以下の同型が成立する:

$$H_2(Q) \cong (\text{Stab}_{\text{As}(Q)}(x_0) \cap [\text{As}(Q), \text{As}(Q)])_{ab},$$

ただし,  $\text{Stab}_{\text{As}(Q)}(x_0)$  は  $\text{As}(Q)$  の  $Q$  への右作用に関する安定化部分群,  $[\text{As}(Q), \text{As}(Q)]$  は  $\text{As}(Q)$  の交換子部分群である.

以下の例は 2 次カンドルホモロジーに関する既知の結果である.

Example 1.19 (Alexander カンドル, [6], Proposition 5.29)  $M$  を  $\mathbb{Z}[T^{\pm 1}]$  加群とし, Alexander カンドルとみなす.  $M$  が連結であるとき,

$$H_2(M) \cong (M \otimes_{\mathbb{Z}} M) / (x \otimes y - Ty \otimes x)_{x, y \in M}.$$

Example 1.20 (互換全体の集合に関する Dehn カンドル, [4], Example 1.15)  $\mathfrak{S}_n$  ( $n \geq 3$ ) を  $n$  次対称群,  $T_n \subset \mathfrak{S}_n$  を互換全体の集合とする. このとき,

$$H_2(D(T_n)) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & (n \geq 4) \\ 0 & (n = 3). \end{cases}$$

Example 1.21 (二面体カンドル  $R_n$ , [4], Example 1.14)  $n(\geq 3)$  奇数とする. このとき,  $H_2(R_n) = 0$ .

Remark 1.22 2 次のカンドルホモロジーを計算するための公式は与えられているが,  $\text{Stab}_{\text{As}(Q)}(x_0)$  と  $[\text{As}(Q), \text{As}(Q)]$  を決定することは一般には難しいため, 2 次のカンドルホモロジーを具体的に求めることは容易ではない. また, 連結でないカンドルについてもその 2 次のカンドルホモロジーを求めるための公式は存在するが, 形がより複雑になる. 詳細は [6] を参照.

対合的カンドル  $Q$  に対して, well-defined な  $Q$  への  $\text{As}_f(Q)$  の右作用が  $y \cdot \bar{e}_x := y * x$  ( $x, y \in Q$ ) と定義できる. Theorem 1.18 の  $\text{As}(Q)$  を  $\text{As}_f(Q)$  に変えたものが成立する.

Theorem 1.23 (H.)  $Q$  を連結なカンドル,  $x_0 \in Q$  とする. このとき, 以下の同型が成立する:

$$H_2(Q) \cong (\text{Stab}_{\text{As}_f(Q)}(x_0) \cap [\text{As}_f(Q), \text{As}_f(Q)])_{ab},$$

ただし,  $\text{Stab}_{\text{As}(Q)}(x_0)$  は  $\text{As}_f(Q)$  の  $Q$  への右作用に関する安定化部分群である.

## 2 2次カンドルホモロジー

### 2.1 Coxeter 群

$(S, m)$  を有限集合  $S$  と写像  $m : S \times S \rightarrow \mathbb{N} \cup \{\infty\}$  の組で、以下の条件を満たすとする：

1. 任意の  $s \in S$  に対して  $m(s, s) = 1$ ,
2. 任意の異なる 2 つの元  $s, t \in S$  に対して  $2 \leq m(s, t) = m(t, s) \leq \infty$ .

このとき、群の表示を用いて定義された群

$$W := \langle s \ (s \in S) \mid (st)^{m(s,t)} = 1 \ (s, t \in S, m(s, t) < \infty) \rangle \quad (2.1)$$

を Coxeter 群といい、 $(W, S)$  を Coxeter 系という。 $(W, S)$  の Coxeter グラフ (単に  $W$  の Coxeter グラフ) とは、頂点集合が  $S$  で、辺集合が  $m(s, t) \geq 3$  であるような非順序対  $\{s, t\} \subset S$  であり、 $m(s, t) \geq 4$  である辺には  $m(s, t)$  がラベル付けされているような、部分的にラベル付けされている無向グラフである。さらに、Coxeter グラフが連結であるとき Coxeter 群が既約であるといい、Coxeter 群が既約でないときは加約であるという。

(2.1) 内の関係式は以下の 2 つの関係式と同値である：

$$(st)_{m(s,t)} = (ts)_{m(s,t)} \ (s, t \in S, s \neq t, m(s, t) < \infty), \ s^2 = 1 \ (s \in S), \quad (2.2)$$

ただし  $(st)_{m(s,t)}$  は以下のように定義される：

$$(st)_{m(s,t)} := \underbrace{ststst \cdots}_{m(s,t)}$$

例えば、 $(st)_2 = st, (st)_3 = sts, (st)_4 = stst$  である。(2.2) 内の関係式  $(st)_{m(s,t)} = (ts)_{m(s,t)}$  ( $m(s, t) < \infty$ ) は以下のように共役を用いて書き換えることができる：

$$(st)_{m(s,t)-1}^{-1} t (st)_{m(s,t)-1} = \begin{cases} s & \text{if } m(s, t) \text{ odd,} \\ t & \text{if } m(s, t) \text{ even.} \end{cases} \quad (2.3)$$

Remark 2.1 Coxeter 群は有限鏡映群 (鏡映で生成されている有限群) を一般化した概念である。有限 Coxeter 群であることと有限鏡映群であることは同値であることが知られている。また、任意のルート系に対して、有限鏡映群  $W(\Phi)$  と単純ルート系  $\Delta \subset \Phi$  が存在して、 $\{s_\alpha \mid s_\alpha \text{ は } \alpha \in \Delta \text{ の鏡映}\}$  が  $W(\Phi)$  の生成系となるようにできる。任意の有限鏡映群  $W$  に対して  $W = W(\Phi)$  となるようなルート系  $\Phi$  と単純ルート系  $\Delta \subset \Phi$  が存在する。ルート系と単純ルート系の定義や詳細については [5] を参照。

既約な有限 Coxeter 群は 10 種類<sup>\*4</sup>に分類されることが知られている。 $X$  型である既約な有限 Coxeter 群を  $W(X)$  とかく。

<sup>\*4</sup>  $A_n, B_n, D_n, E_6, E_7, E_8, F_4, H_3, H_4, I_2(n)$  型の 10 種類の型がある。

Remark 2.2  $W$  が加約な有限 Coxeter 群は既約な有限 Coxeter 群の直積で表せることが知られている。  $W$  が  $W(X_1), W(X_2), \dots, W(X_n)$  の直積であるとき,  $W$  は  $X_1 \sqcup X_2 \sqcup \dots \sqcup X_n$  <sup>\*5</sup>型であるとい  
い,  $W(X_1 \sqcup X_2 \sqcup \dots \sqcup X_n)$  とかく。

$(W, S)$  を  $W$  が有限群である Coxeter 系,  $\Phi$  を  $W$  のルート系とする。  $\Gamma \subset \Phi$  に対して,  $W_\Gamma$  を  $\{s_\gamma \in W \mid \gamma \in \Gamma\}$  で生成された  $W$  の部分群とする。 また,  $s \in S$  に対し,  $\alpha_s$  を,  $s$  が  $\alpha_s$  の鏡映になるような  $\Phi$  に属するルートとし,  $\Gamma(s)$  を  $\langle \gamma, \alpha_s \rangle = 0$  となるようなルート  $\gamma$  全体の集合とする。 さらに,  $W$  の奇 Coxeter グラフとは, 頂点集合が  $S$ , 辺集合が  $\{\{s, t\} \mid s, t \in S \text{ は } s \neq t \text{ かつ } m(s, t) \text{ が奇数である.}\}$  ようなグラフとする。

以下の2つの定理は, Coxeter カンドルの2次カンドルホモロジーを計算する際に有用な定理である。

Theorem 2.3 (Brink [2], p.466, Theorem)  $(W, S)$  を  $W$  が有限群であるような Coxeter 系,  $\alpha_s$  を  $s \in S$  が  $\alpha_s$  の鏡映であるようなルート,  $Z_W(s)$  を  $s$  の中心化部分群とする。 このとき,

$$Z_W(s) = W_{\Gamma(s) \cup \{\pm\alpha_s\}}$$

であり,  $W_{\Gamma(s) \cup \{\pm\alpha_s\}}$  は  $\Gamma(s) \cup \{\pm\alpha_s\}$  をルート系として持つ Coxeter 群である。

Remark 2.4  $W_{\Gamma(s)}$  を  $X$  型の Coxeter 群とすると,  $W_{\Gamma(s) \cup \{\pm\alpha_s\}}$  は  $X \sqcup A_1$  型の Coxeter 群となる。

Theorem 2.5 (Brenti-Reiner-Roichman [3], Proposition 2.1.1)  $(W, S = \{s_0, s_1, \dots, s_n\})$  を Coxeter 系,  $R = \{r_1, r_2, \dots, r_n\}$ ,  $\epsilon: W \rightarrow \{\pm 1\}$  を全ての  $s \in S$  に対して  $\epsilon(s) = -1$  と定義することで一意に定まる準同型写像とし,  $f: R \rightarrow W$  を  $f(r_i) = s_0 s_i$  ( $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ ) で定まる写像とする。 このとき,  $f$  は以下のような同型写像を誘導する:

$$\text{Ker} \epsilon \cong \langle R \mid r_i^{m(s_0, s_i)} = (r_i^{-1} r_j)^{m(s_i, s_j)} = 1 (1 \leq i < j \leq n) \rangle.$$

Remark 2.6  $W$  の奇 Coxeter グラフが連結ならば,  $\text{Ker} \epsilon$  は  $W$  の交換子部分群となる。

(2.3) と Theorem 1.12 から, 以下の命題が成立する。

Proposition 2.7  $(W, S)$  を Coxeter 系,  $\phi: \text{As}(Q_W) \rightarrow W$  を  $\phi(e_s) = s (s \in S)$  となるような準同型写像とする。 このとき,  $\phi$  は well-defined な同型写像  $\bar{\phi}: \text{As}_f(Q_W) \rightarrow W$ ,  $\bar{e}_x \mapsto x$  を誘導する。

同型写像  $\bar{\phi}$  の定義域を  $\text{As}_f(Q_W)$  の交換子部分群に制限することで, 次の定理が得られる。

Theorem 2.8  $W$  Coxeter 群,  $\bar{\phi}$  を Proposition 2.7 で現れた同型写像とする。 このとき,  $\bar{\phi}$  の定義域を  $\text{As}_f(Q_W)$  の交換子部分群に制限した写像は以下のような同型写像である:

$$[\text{As}_f(Q_W), \text{As}_f(Q_W)] \cong [W, W].$$

命題 2.7 と  $\text{As}_f(Q_W)$  の  $Q_W$  への作用の定義と Coxeter カンドルの演算の定義から,  $\text{Stab}_{\text{As}_f(Q)}(x_0)$  は  $x_0$  の中心化部分群と同型になる。 Theorem 2.8 と合わせると, 次の定理が得られる:

\*5 この記号の使い方は一般的ではないので注意する。

Theorem 2.9 (H.)  $W$  をその奇 Coxeter グラフが木になるような Coxeter 群,  $Q_W$  をその Coxeter カンドル,  $x_0 \in Q_W$  とする. このとき, 以下の同型が成立する

$$H_2(Q_W) \cong (Z_W(x_0) \cap [W, W])_{ab},$$

ただし,  $Z_W(x_0)$  は  $x_0$  の中心化部分群である.

$(W, S)$  をその奇 Coxeter グラフが木になるような Coxeter 系,  $s_0 \in S$  とする. Theorem 2.3 により  $Z_W(s_0) = W_{\Gamma(s_0) \cup \{\pm\alpha_{s_0}\}}$  が成立し  $W_{\Gamma(s_0) \cup \{\pm\alpha_{s_0}\}}$  は Coxeter 群となる. さらに, Theorem 2.5 と Remark 2.6 により, 以下の等式が成立する:

$$Z_W(s_0) \cap [W, W] = \text{Ker} \epsilon|_{W_{\Gamma(s_0) \cup \{\pm\alpha_{s_0}\}}}.$$

したがって Theorem 2.5 から  $(Z_W(s_0) \cap [W, W])_{ab}$  の表示が得られ, 2 次カンドルホモロジーが計算できる.

## 2.2 Coxeter カンドルの 2 次カンドルホモロジー

Theorem 2.10 (H.)  $W(X)$  を  $X$  型の既約な有限 Coxeter 群とする. このとき,  $H_2(Q_{W(X)})$  の計算結果は表 2.1 の通りとなる.

Type	$A_n (n \geq 1)$	$D_n (n \geq 4)$	$E_6$	$E_7$	$E_8$	$I_2(n) (n \geq 3)$	$H_4$	$H_3$
$H_2(Q)$	$0 (n \leq 2)$ $\mathbb{Z}_2 (n \geq 3)$	$\mathbb{Z}_2^3 (n = 4)$ $\mathbb{Z}_2^2 (n \geq 5)$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$0 (n \text{ is odd})$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2^2$

表 2.1  $Q$  が Coxeter カンドル  $Q_{W(X)}$  であるときの  $H_2(Q)$  の計算結果

Remark 2.11  $A_n (n \geq 2)$  と  $I_2(n) (n \geq 3 \text{ は奇数})$  の場合はそれぞれ Example 1.20 と Example 1.21 の結果である.

$W$  を Coxeter 群とする.  $H_2(Q_{W(X)})$  の計算方法の手順は以下のようになる.

1.  $W$  のルート系と単純ルート系  $\Delta$  を選び,  $\alpha \in \Delta$  を 1 つ取って固定する.
2.  $\Gamma(s_\alpha)$  を決定する. ただし,  $s_\alpha$  は  $\alpha$  の鏡映とする.
3.  $W_{\Gamma(s_\alpha) \cup \{\pm\alpha\}}$  を決定する.
4.  $(\text{Ker} \epsilon|_{W_{\Gamma(s_\alpha) \cup \{\pm\alpha\}}})_{ab}$  の表示を求める.

Example 2.12 ( $D_n$  型)  $n \geq 4$  とする.  $W(D_n)$  のルート系  $\Phi(D_n)$  および単純ルート系  $\Delta(D_n)$  はそれぞれ以下ようになる:

$$\begin{aligned} \Phi(D_n) &= \{\pm(e_i - e_j), \pm(e_i + e_j) \in \mathbb{R}^n \mid 1 \leq i < j \leq n\}, \\ \Delta(D_n) &= \{e_i - e_{i+1}, e_{n-1} + e_n \in \mathbb{R}^n \mid 1 \leq i \leq n-1\}. \end{aligned}$$

ただし,  $e_1, e_2, \dots, e_n$  は  $\mathbb{R}^n$  の標準基底である.  $s$  を  $e_{n-1} + e_n$  の鏡映としたとき,

$$\Gamma(s) = \{\pm(e_i - e_j), \pm(e_i + e_j) \mid 1 \leq i < j \leq n-2\} \cup \{\pm(e_{n-1} - e_n)\}.$$



が成立する. このとき,  $s$  の中心化部分群  $Z_{W(D_n)}(s)$  は以下のようになる:

$$Z_{W(D_n)}(s) = \begin{cases} W(A_1 \sqcup A_1 \sqcup A_1 \sqcup A_1) & (n = 4) \\ W(A_3 \sqcup A_1 \sqcup A_1) & (n = 5) \\ W(D_{n-2} \sqcup A_1 \sqcup A_1) & (n \geq 6). \end{cases}$$

また,  $Z_{W(D_n)}(s)$  の単純ルート系  $\Delta(Z_{W(D_n)}(s))$  は以下のようになる:

$$\Delta(Z_{W(D_n)}(s)) = \begin{cases} \{e_1 - e_2, e_1 + e_2, e_3 - e_4, e_3 + e_4\} & (n = 4) \\ \{e_2 + e_3, e_1 - e_2, e_2 - e_3, e_4 - e_5, e_4 + e_5\} & (n = 5) \\ \{e_i - e_{i+1}, e_{n-3} + e_{n-2}, e_{n-1} - e_n, e_{n-1} + e_n \in \mathbb{R}^n \mid 1 \leq i \leq n-3\} & (n \geq 6). \end{cases}$$

$s_0 = s_{e_{n-1}+e_n}$ ,  $s_1 = s_{e_{n-1}-e_n}$  とする.

$n = 4$  と仮定する.  $s_2 = s_{e_1-e_2}$ ,  $s_3 = s_{e_1+e_2}$  とおき, Theorem 2.5 を使うことで以下の同型が成立する:

$$\text{Ker}\epsilon \mid_{W(A_1 \sqcup A_1 \sqcup A_1 \sqcup A_1)} \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3.$$

したがってそのアーベル化は  $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$  と同型である.

$n = 5$  と仮定する.  $s_2 = s_{e_2+e_3}$ ,  $s_3 = s_{e_1-e_2}$ ,  $s_4 = s_{e_2-e_3}$  とおくと,  $\text{Ker}\epsilon \mid_{W(A_3 \sqcup A_1 \sqcup A_1)}$  は  $\{r_i \mid i = 1, 2, 3, 4\}$  で生成され, 以下のような関係式を持つ:

$$\begin{aligned} r_i^2 &= 1 \quad (i = 1, 2, 3, 4) \\ (r_1^{-1}r_j)^2 &= (r_2^{-1}r_4)^2 = 1 \quad (j = 2, 3, 4) \\ (r_2^{-1}r_3)^3 &= (r_3^{-1}r_4)^3 = 1. \end{aligned}$$

$(r_2^{-1}r_3)^3 = (r_3^{-1}r_4)^3 = 1$  は  $[r_2]^*6 = [r_3] = [r_4] \in (\text{Ker}\epsilon \mid_{W(A_3 \sqcup A_1 \sqcup A_1)})_{ab}$  となる. したがって,

$$(\text{Ker}\epsilon \mid_{W(A_3 \sqcup A_1 \sqcup A_1)})_{ab} = \langle r_1, r_2 \mid r_1^2 = r_2^2 = 1, r_1r_2 = r_2r_1 \rangle \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2.$$

が成立し, Theorem 2.9 より,  $H_2(Q_{W(D_5)}) \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$  が成立する.

$n \geq 6$  と仮定する.  $s_i = s_{e_{i-1}-e_i}$  ( $i = 2, 3, \dots, n-2$ ) and  $s_{n-1} = s_{e_{n-3}+e_{n-2}}$  とおくと,  $\text{Ker}\epsilon \mid_{W(D_{n-2} \sqcup A_1)}$  は  $\{r_i \mid i = 1, 2, \dots, n-1\}$  で生成され, 以下のような関係式を持つ:

$$\begin{aligned} r_i^2 &= 1 \quad (i = 1, 2, \dots, n-1) \\ (r_1^{-1}r_j)^2 &= (r_2^{-1}r_4)^2 = 1 \quad (j = 2, 3, \dots, n-1) \\ (r_k^{-1}r_{k+1})^3 &= (r_{n-3}^{-1}r_{n-1})^3 = 1 \quad (k = 2, 3, \dots, n-3) \\ (r_{n-1}^{-1}r_l)^2 &= 1 \quad (l = 2, 3, \dots, n-4, n-2) \\ (r_p^{-1}r_q)^2 &= 1 \quad (p, q = 2, \dots, n-2 \text{ and } |p-q| \geq 2). \end{aligned}$$

$(r_k^{-1}r_{k+1})^3 = (r_{n-3}^{-1}r_{n-1})^3 = 1$  ( $k = 2, 3, \dots, n-3$ ) は  $[r_i] = [r_{i+1}] \in (\text{Ker}\epsilon \mid_{W(D_{n-2} \sqcup A_1)})_{ab}$  ( $i = 2, 3, \dots, n-2$ ) となる. したがって,

$$(\text{Ker}\epsilon \mid_{W(D_{n-2} \sqcup A_1)})_{ab} = \langle r_1, r_2 \mid r_1^2 = r_2^2 = 1, r_1r_2 = r_2r_1 \rangle \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$$

が成立し, Theorem 2.9 より,  $H_2(Q_{W(D_n)}) \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$  が成立する.

\*6 群  $G$  の元  $g$  に対し,  $[g] := g[G, G] \in G_{ab}$  と定義する.

## 参考文献

- [1] Nicolas Bourbaki, *Lie groups and Lie algebras. Chapters 4–6*, Elements of Mathematics (Berlin), Springer-Verlag, Berlin, 2002. Translated from the 1968 French original by Andrew Pressley. MR1890629 ↑
- [2] Brigitte Brink, *On centralizers of reflections in Coxeter groups*, Bull. London Math. Soc. **28** (1996), no. 5, 465–470, DOI 10.1112/blms/28.5.465. MR1396145 ↑7
- [3] Francesco Brenti, Victor Reiner, and Yuval Roichman, *Alternating subgroups of Coxeter groups*, J. Combin. Theory Ser. A **115** (2008), no. 5, 845–877, DOI 10.1016/j.jcta.2007.10.004. MR2417024 ↑7
- [4] Michael Eisermann, *Quandle coverings and their Galois correspondence*, Fund. Math. **225** (2014), no. 1, 103–168, DOI 10.4064/fm225-1-7. MR3205568 ↑1, 5
- [5] James E. Humphreys, *Reflection groups and Coxeter groups*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 29, Cambridge University Press, Cambridge, 1990. MR1066460 (92h:20002) ↑6
- [6] Takefumi Nosaka, *Quandles and topological pairs*, SpringerBriefs in Mathematics, Springer, Singapore, 2017. Symmetry, knots, and cohomology. MR3729413 ↑2, 5