時間に依存するポテンシャル付きシュレディンガー方程式の解について

東京理科大学 大学院理学研究科 数学専攻 (修士課程 2 年)
濱岡 小鈴 (Kosuzu HAMAOKA) *

概要

時間に依存するポテンシャルつきシュレディンガー方程式の解の評価は、ポテンシャルの増大度に依存する. 先行研究では, ポテンシャルが 1 次増大度を持つとき Modulation 空間での解のノルム評価が得られており, 証明にはポテンシャルの増大度が重要な役割を果たす. 本講演では、ポテンシャルが劣 2 次増大度を持つときの, 解の Modulation ノルムの評価を紹介する.

1 導入

本研究では以下のポテンシャルをもつシュレディンガー方程式の解について考える：

$$i\partial_t u(t,x) + \frac{1}{2}\Delta u(t,x) = V(t,x)u(t,x), \quad (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \tag{1}$$

ただし, $i = \sqrt{-1}$ で, $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ は未知関数, ポテンシャル $V : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ は既知関数, $\partial_t u = \frac{\partial}{\partial t}u$, $\partial_{x_j} u = \frac{\partial}{\partial x_j}u$ $(j = 1, \ldots, n)$, $\Delta = \sum_{j=1}^{n} \partial_{x_j}^2$ である. $V(t,x)$ に次の仮定を課す.

仮定 1. $V(t,x)$ は各 $t \in \mathbb{R}$ に対して $V(t,x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n_x)$ であり, $\epsilon > 0$ が存在して, 任意の多重指数 $\alpha \in \mathbb{Z}^n_+$ に対して

$$|\partial_x^\alpha V(t,x)| \leq C_\alpha \langle x \rangle^{2-\epsilon-|\alpha|}, \quad (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \tag{2}$$

をみたす $C_\alpha > 0$ が存在する.

また, 波束変換,Modulation 空間,Wiener-Amalgum 空間を以下で定義する.

定義 1. (波束変換)
$f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)\backslash\{0\}$ に対し, 窓関数 φ による f の波束変換を, 以下で定める.

$$W_{\varphi(t,\cdot)}f(x,\xi) := \int_{\mathbb{R}^n} \overline{\varphi(t, y-x)} f(t,y) e^{-iy\cdot\xi} dy \tag{3}$$

---

* 本講演は東京理科大学の加藤圭一氏と瀧澤駿氏との共同研究に基づく. E-mail:1122520@ed.tus.ac.jp

定義 2. (Modulation 空間)
$1 \le p, q \le \infty$, $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)\backslash\{0\}$, $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ に対して,

$$f \in M^{p,q} :\Leftrightarrow \quad \|f\|_{M^{p,q}_\varphi} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |W_\varphi f(x,\xi)|^p dx \right)^{\frac{q}{p}} d\xi \right)^{\frac{1}{q}} < \infty \tag{4}$$

定義 3. (Wiener-Amalgum 空間)
$1 \le p, q \le \infty$, $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)\backslash\{0\}$, $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ に対して,

$$f \in W^{p,q} :\Leftrightarrow \quad \|f\|_{W^{p,q}_\varphi} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |W_\varphi f(x,\xi)|^q d\xi \right)^{\frac{p}{q}} dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \tag{5}$$

また, $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, ϕ, $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ に対して, 反転公式

$$\frac{1}{\langle \psi, \phi \rangle} V_\psi^* V_\phi f = f \tag{6}$$

が成り立つ.([5], Corollary 11.2.7)

2 主定理

本研究では, 次の結果が得られた.

定理 1. 実数値関数 $V(t,x)$ は仮定 1 をみたすとする. また, $T > 0$, $C_T > 0$ が存在し, $\varphi_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)\backslash\{0\}$, $\varphi(t,x) = e^{\frac{1}{2}it\Delta}\varphi_0(x)$, $u(t,x)$ は (1) の $C(\mathbb{R}; L^2(\mathbb{R}^n))$ での解とする. このとき,

$$\|u(t,\cdot)\|_{M^{p,q}_{\varphi(t,\cdot)}} \le C_T \|u_0\|_{W^{p,q}_{\varphi_0}} \qquad (u_0(x) = u(0,x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \forall t \in [-T,T]) \tag{7}$$

が成り立つ. ただし, $1 \le p \le \infty$ とし, $p \ge \frac{n}{\epsilon}$ のとき $q \ge p$, $p < \frac{n}{\epsilon}$ のとき $p \le q < \frac{np}{n-p\epsilon}$ とする.

Wiener-Amalgum 空間におけるシュレディンガー方程式の研究は,[3],[4] などがある. (1) の解の Modulation ノルムの評価については,[1] では, $p = q$ で, ポテンシャルが 2 次の増大度を持つときの Modulation ノルムが初期値の Modulation ノルムで上から評価することができている. また, 一般の p, q に対しては, ポテンシャルが 1 次の増大度を持つときの Modulation ノルムが初期値の Modulation ノルムで上から評価することができている. 本研究は, ポテンシャルが劣 2 次の増大度を持つときに, 解の Modulation ノルムが初期値の Wiener-Amalgum ノルムで上から評価できていることが新しい点である.

3 証明の概略

STEP1: **解の波束変換を用いた表現**
$t \in \mathbb{R}$, $\xi \in \mathbb{R}^n$ に対し, 特性曲線 $x(s) = x(s; t, x, \xi)$, $\xi = \xi(s; t, x, \xi)$ を

$$\begin{cases} \dot{x}(s) = \xi(s) \\ \dot{\xi}(s) = -\nabla_x V(s, x(s; t, x, \xi)) \end{cases} \tag{8}$$

の解とする．

　この特性曲線と波束変換を用いて，

$$|W_{\varphi(t,\cdot)}u(x,\xi)| \leq |W_{\varphi_0}u_0(x(0,t,x,\xi),\xi(0;t,x,\xi))| + \int_0^t |Ru(\tau,x(\tau;t,x,\xi),\xi(\tau;t,x,\xi))|d\tau \quad (9)$$

が得られる．ここで,$V_{jk}(t,x,y) = \int_0^1 \partial_{x_j}\partial_{x_k}V(t,x+(1-\theta)(y-x))(1-\theta)d\theta$ に対して，

$$Ru(t,x,\xi) = \sum_{j,k=1}^{\infty}\int_{\mathbb{R}^n}\overline{\varphi(t,y-x)}V_{jk}(t,x,y)(y_j-x_j)(y_k-x_k)u(t,y)e^{-iy\cdot\xi}dy \quad (10)$$

とする．

STEP2: **各項の評価**

次に, $C_T^1, C_T^2 > 0$ に対して,

$$\|\|W_{\varphi_0}u_0(x(0,t,x,\xi),\xi(0;t,x,\xi))\|_{L_x^p}\|_{L_\xi^q} \leq C_T^1\|\|W_{\varphi_0}u_0(x,\xi)\|_{L_\xi^q}\|_{L_x^p} \quad (11)$$

$$\|\|Ru(\tau,x(\tau;t,x,\xi),\xi(\tau,;t,x,\xi))\|_{L_x^p}\|_{L_\xi^q} \leq C_T^2\|\|W_{\varphi(\tau,\cdot)}u(x,\xi)\|_{L_x^p}\|_{L_\xi^q} \quad (12)$$

を示す．

これが示されれば,

$$\|u(t,\cdot)\|_{M^{p,q}_{\varphi(t,\cdot)}} \leq C_T^1\|u_0\|_{W^{p,q}_{\varphi_0}} + C_T^2\int_0^t \|u(\tau,\cdot)\|_{M^{p,q}_{\varphi(\tau,\cdot)}}d\tau \quad (13)$$

がわかるので,Gronwall の不等式を用いれば定理が示される．

証明には, 次の補題を用いる．

補題 1. $1 \leq p \leq \infty$, $1 \leq q \leq \infty$ とし, $1 \leq p' \leq p$, $1 \leq q' \leq q$ のとき, $u \in S'(\mathbb{R}^n)$, $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)\backslash\{0\}$ に対して,

$$\|u(t,\cdot)\|_{M^{p,q}_{\varphi(t,\cdot)}} \leq C_t\|u(t,\cdot)\|_{M^{p',q'}_{\varphi(t,\cdot)}} \quad (\forall t \in \mathbb{R}) \quad (14)$$

をみたす $C_t > 0$ が存在する．

補題 2. $T > 0$ が存在し, $\tau, t \in [-T,T]$, $x, \xi \in \mathbb{R}^n$ に対し, 特性曲線 $x(s) = x(s;t,x,\xi)$, $\xi = \xi(s;t,x,\xi)$ を

$$\begin{cases} \dot{x}(s) = \xi(s) \\ \dot{\xi}(s) = -\nabla_x V(s,x(s;t,x,\xi)) \end{cases} \quad (15)$$

の解とする．このとき,

$$\left|\frac{\partial x(\tau,t,x,\xi)}{\partial x}\right| \geq C$$

を満たす定数 $C > 0$ が存在する．

補題 3. $T > 0$ が存在し, $\tau, t \in [-T, T]$, $x, \xi \in \mathbb{R}^n$ に対し, 特性曲線 $x(s) = x(\tau; t, x, \xi)$, $\xi = \xi(\tau; t, x, \xi)$ を

$$\begin{cases} \dot{x}(s) = \xi(s) \\ \dot{\xi}(s) = -\nabla_x V(s, x(s; t, x, \xi)) \end{cases} \tag{16}$$

の解とする. このとき, $X = x(\tau; t, x, \xi)$ とおく. x から X への変数変換を行い, $X = \Phi(\tau, t, x, \xi)$ とすると, $x = \Phi^{-1}(\tau, t, X, \xi)$ に対し,

$$\left| \frac{\partial \xi(\tau, t, \Phi^{-1}(\tau, t, X, \xi), \xi)}{\partial \xi} \right| \geq C \tag{17}$$

を満たす定数 $C > 0$ が存在する.

補題 2,3 の証明は [2] を参考にした.

まずは,(11) 式を示す. ここでは, $X = x(0, t, x, \xi)$ とし, x から X への変数変換を行う. すると, 補題 2 を用いることにより,$|\frac{\partial x}{\partial X}|$ が有界なので, 上から評価することができる. その後,Minkowski の不等式を用い, 積分順序を入れ替え, 補題 3 を用いることにより, 以下のように評価することができる.

$$\begin{aligned}
&\| \| W_{\varphi_0} u_0(x(0; t, x, \xi), \xi(0; t, x, \xi)) \|_{L^p_x} \|_{L^q_\xi}. \\
&= \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |W_{\varphi_0} u_0(x(0; t, x, \xi), \xi(0; t, x, \xi))|^p dx \right)^{\frac{q}{p}} d\xi \right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |W_{\varphi_0} u_0(X, \xi(0; t, \Phi^{-1}(0, t, X, \xi), \xi))|^p \left| \frac{\partial x}{\partial X} \right| dX \right)^{\frac{q}{p}} d\xi \right)^{\frac{1}{q}} \\
&\lesssim \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |W_{\varphi_0} u_0(X, \xi(0; t, \Phi^{-1}(0, t, X, \xi), \xi))|^p dX \right)^{\frac{q}{p}} d\xi \right)^{\frac{1}{q}} \\
&\leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |W_{\varphi_0} u_0(X, \xi(0; t, \Phi^{-1}(0, t, X, \xi), \xi))|^q d\xi \right)^{\frac{p}{q}} dX \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |W_{\varphi_0} u_0(X, \Xi)|^q \left| \frac{\partial \xi}{\partial \Xi} \right| d\Xi \right)^{\frac{p}{q}} dX \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\lesssim \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |W_{\varphi_0} u_0(X, \Xi)|^q d\Xi \right)^{\frac{p}{q}} dX \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \| \| W_{\varphi_0} u_0(x, \xi) \|_{L^q_\xi} \|_{L^p_x}
\end{aligned}$$

これで (11) 式を示すことができた.

次に,(12) 式を示す.

最初に, $\varphi(t, y) = y_j y_k \overline{\varphi(t, y)}$, $N \in \mathbb{N}$ とし, $d\bar{\eta} = (2\pi)^{-n} d\eta$, $2N > n$ に対し, 反転公式, 部分積分

を用いて評価すると, 以下のようになる.

$$
\begin{aligned}
&\|\|Ru(\tau,x(\tau;t,x,\xi),\xi(\tau;t,x,\xi))\|_{L^p_x}\|_{L^q_\xi}\\
&=\frac{1}{\|\varphi(\tau,\cdot)\|_{L^2}^2}\sum_{j,k=1}^{\infty}\left\|\left\|\int\int\int|(1-\Delta)^N\varphi_{jk}(\tau,y-x(\tau;t,x,\xi))\right.\right.\\
&\qquad\left.\left.\times V_{jk}(\tau,x(\tau;t,x,\xi),y)\varphi(\tau,y-z)|\frac{|W_{\varphi(\tau,\cdot)}u(\tau,z,\eta)|}{\langle\eta-\xi(\tau;t,x,\xi)\rangle^{2N}}dzd\bar{\eta}dy\right\|_{L^p_x}\right\|_{L^q_\xi}\\
&=\frac{1}{\|\varphi(\tau,\cdot)\|_{L^2}^2}\sum_{j,k=1}^{\infty}\sum_{|\beta_1|+|\beta_2|+|\beta_3|\le 2N}\left\|\left\|\int\int\int|\partial_y^{\beta_1}\varphi_{jk}(\tau,y-x(\tau;t,x,\xi))\right.\right.\\
&\qquad\left.\left.\times\partial_y^{\beta_2}V_{jk}(\tau,x(\tau;t,x,\xi),y)\partial_y^{\beta_3}\varphi(\tau,y-z)|\frac{|W_{\varphi(\tau,\cdot)}u(\tau,z,\eta)|}{\langle\eta-\xi(\tau;t,x,\xi)\rangle^{2N}}dzd\bar{\eta}dy\right\|_{L^p_x}\right\|_{L^q_\xi}
\end{aligned}
$$

ここで, ポテンシャルが劣 2 次の増大度を持つことから,

$$
\begin{aligned}
|V_{jk}(\tau,x(\tau;t,x,\xi),y)|&\lesssim\langle x(\tau;t,x,\xi)+(1-\theta)(y-x(\tau;t,x,\xi))\rangle^{-\epsilon}\\
&\lesssim\langle x(\tau;t,x,\xi)\rangle^{-\epsilon}\langle y-x(\tau;t,x,\xi)\rangle^{\epsilon}
\end{aligned}
$$

と評価できるので, (11) 式と同様に, 変数変換を用いて,Minkowski の不等式を用いて評価すると, 以下のようになる.

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{\|\varphi(\tau,\cdot)\|_{L^2}^2}\sum_{j,k=1}^{\infty}\sum_{|\beta_1|+|\beta_2|+|\beta_3|\le 2N}\left\|\left\|\int\int\int|\partial_y^{\beta_1}\varphi_{jk}(\tau,y-x(\tau;t,x,\xi))\right.\right.\\
&\qquad\left.\left.\times\partial_y^{\beta_2}V_{jk}(\tau,x(\tau;t,x,\xi),y)\partial_y^{\beta_3}\varphi(\tau,y-z)|\frac{|W_{\varphi(\tau,\cdot)}u(\tau,z,\eta)|}{\langle\eta-\xi(\tau;t,x,\xi)^{2N}}dzd\bar{\eta}dy\right\|_{L^p_x}\right\|_{L^q_\xi}\\
&\lesssim\frac{1}{\|\varphi(\tau,\cdot)\|_{L^2}^2}\sum_{j,k=1}^{\infty}\sum_{|\beta_1|+|\beta_2|+|\beta_3|\le 2N}\left\|\left\|\int\int\int|\langle y-x(\tau;t,x,\xi)\rangle^{1-\epsilon}\partial_y^{\beta_1}\varphi_{jk}(\tau,y-x(\tau;t,x,\xi))\right.\right.\\
&\qquad\left.\left.\times\partial_y^{\beta_2}V_{jk}(\tau,x(\tau;t,x,\xi),y)\partial_y^{\beta_3}\varphi(\tau,y-z)|\frac{|W_{\varphi(\tau,\cdot)}u(\tau,z,\eta)|}{\langle\eta-\xi(\tau;t,x,\xi)^{2N}}\langle x(\tau;t,x,\xi)\rangle^{-\epsilon}dzd\bar{\eta}dy\right\|_{L^p_x}\right\|_{L^q_\xi}
\end{aligned}
$$

ここで,

$$
\phi_1(z,\eta)=\frac{|\partial_y^{\beta_3}\varphi(\tau,z)|}{\langle\eta\rangle},\phi_2(y)=|\langle y\rangle\partial_y^{\beta_1}\varphi_{jk}(\tau,y)|
$$

とおき,(11) 式のときと同様に,$1\le r,r'\le\infty$ を $\frac{1}{r}+\frac{1}{r'}=\frac{1}{p}$ を満たす実数とし, 変数変換, Hölder の

不等式, 補題 1,2,3 を用いると以下のように評価できる.

$$
\begin{aligned}
&\|\|Ru(\tau, x(\tau;t,x,\xi), \xi(\tau;t,x,\xi))\|_{L^p_x}\|_{L^q_\xi} \\
&\lesssim \sum_{j,k=1}^{\infty} \sum_{|\beta_1|+|\beta_2|+|\beta_3|\le 2N} \|\|\langle x(\tau;t,x,\xi)\rangle^{-\epsilon}\phi_2 * (\phi_1 * W_{\varphi(\tau,\cdot)}u)(x(\tau;t,x,\xi), \xi(\tau;t;x,\xi))\|_{L^p_x}\|_{L^q_\xi} \\
&\lesssim \sum_{j,k=1}^{\infty} \sum_{|\beta_1|+|\beta_2|+|\beta_3|\le 2N} \|\|\langle X\rangle^{-\epsilon}\phi_2 * (\phi_1 * W_{\varphi(\tau,\cdot)}u)(X, \xi(\tau;t;x,\xi)\|_{L^p_X}\|_{L^q_\xi} \\
&\lesssim \sum_{j,k=1}^{\infty} \sum_{|\beta_1|+|\beta_2|+|\beta_3|\le 2N} \|\langle X\rangle^{-\epsilon}\|\phi_2 * (\phi_1 * W_{\varphi(\tau,\cdot)}u)(X, \Xi)\|_{L^q_\Xi}\|_{L^p_X} \\
&\lesssim \sum_{j,k=1}^{\infty} \sum_{|\beta_1|+|\beta_2|+|\beta_3|\le 2N} \|\langle X\rangle^{-\epsilon}\|_{L^r_X}\|\|\phi_2 * (\phi_1 * W_{\varphi(\tau,\cdot)}u)(X, \Xi)\|_{L^q_\Xi}\|_{L^{r'}_X} \\
&\lesssim \|\|W_{\varphi(\tau,\cdot)}u(\tau,\cdot)\|_{L^{r'}_X}\|_{L^q_\Xi} \\
&\lesssim \|\|W_{\varphi(\tau,\cdot)}u(\tau,\cdot)\|_{L^p_X}\|_{L^q_\Xi}
\end{aligned}
$$

これで (12) 式が証明できた.

参考文献

[1] K. Kato, M. Kobayashi and S. Ito, Estimates on modulation spaces for Schrödinger evolution operators with quadratic and sub-quadratic potentials, J. Funct. Anal., 266, 733–753 (2014).

[2] 谷島 賢二: シュレディンガー方程式 II, 朝倉書店, (2014)

[3] Elena Cordero, Fabio Nicola, and Luigi Rodino Schrödinger Equations in Modulation Spaces, Studies in Phase Space Analysis with Applications to PDEs,Birkhäuser/Springer, 81-90(2013)

[4] K. Kato, M. Kobayashi and S. Ito,Remarks on Wiener amalgam space type estimates for Schrödinger equation. Harmonic analysis and nonlinear partial differential equations, RIMS Kokyuroku Bessatsu ,B33 41-48(2012)

[5] K. GRÖCHENIG, Foundations of time-frequency analysis, Appl. Numer. Harmon. Anal., Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA(2001)