全スカラー曲率の極限定理

三菱電機 先端技術総合研究所
濱中翔太 (Shota HAMANAKA) *

2024 年 3 月 4 日〜8 日

概 要

本講演では，n 次元閉（つまり，コンパクト境界無し）多様体上のリーマン計量テンソルがあるリーマン計量に $W^{1,p}$ $(p > n)$ 級で収束するときの全スカラー曲率の振る舞いに関するある結果についてお話しする．

1 導入

リーマン幾何学の最初で学ぶように，主なリーマン計量の曲率はその情報量が多いほうから，断面曲率，リッチ曲率，スカラー曲率というものがある．また，これらの曲率は計量の 2 階微分までに依存することがその定義から直ちにわかる．これらは単なる関数やテンソル場であるだけでなく，何らかの空間の曲がり具合を反映しているものであると考えられる．従って，その幾何学的な構造を汲み取ることによって，種々の曲率の下（や上）からのバウンドを，計量の 2 階微分よりも弱い正則性の構造のみで特徴づけられることが知られている．例えば，Toponogov の三角形比較定理を経由することによって，もはや多様体ではない（測地的）距離空間に対して断面曲率の下からのバウンドの概念を拡張することができることが知られている．また，最適輸送理論を用いて，測度距離空間に対してはリッチ曲率の下からのバウンドの概念を拡張できることも知られている．これらのことから自然に湧く疑問として,「スカラー曲率に対しての “弱い意味での下からのバウンド” はどのように定義するべきか？」というものがある．この辺りの話題については，例えば Gromov の “Four Lectures [2]” を参照して頂ければと思う．リーマン計量が C^2 級よりも弱い位相に関して動く時の，スカラー曲率の下からのバウンドの振る舞いについて，Gromov は次の興味深い定理を示している．

定理 ([1, p.1118])**.** M を（コンパクトとは限らない）境界のない滑らかな多様体，$\kappa : M \to \mathbb{R}$ をその上のある連続関数とする．M 上の C^2 級のリーマン計量の列 (g_i) で，ある M 上の C^2 級リーマン計量 g に M 上 C^0-収束するものを考える．また，各計量 g_i のスカラー曲率 $R(g_i)$ について，M 上 $R(g_i) \geq \kappa$ が成り立つと仮定する．このとき，極限の計量 g についても M 上 $R(g) \geq \kappa$ が成り立つ．

雑な言い方をすると，スカラー曲率の下からのバウンドは計量の（C^2 収束であれば当たり前だが，実はそこまでは必要なくて）C^0 収束で保たれる，ということをこの定理は主張している．対して本講演では，この定理の全スカラー曲率版がどうなるかについて考える．

*E-mail:hamanaka1311558@gmail.com

2　主定理

本講演の内容は全て講演者自身によるプレプリント [4] の内容に基づく．本講演では特に，次の定理が成り立つことを紹介する．

主定理 1 ([4, Main Theorem 1])**.** M^n を n 次元閉多様体 $(n \geq 3)$，g_0 を M 上の C^2 リーマン計量とする．ここで閉多様体とは，境界なしコンパクト多様体のことである．また，$p > n$ とする．M 上の C^2 級計量の列 (g_i) が以下を満たすとする：

(1) $g_i \xrightarrow{W^{1,p}} g_0\ (i \to \infty)$,

(2) 全ての i に対して $R(g_i) \geq 0$,

(3) ある $\kappa \in \mathbb{R}$ が存在して，全ての i に対して，$\int_M R(g_i)\, d\mathrm{vol}_{g_i} \geq \kappa$.

ここで，$R(g_i)$ はリーマン計量 g_i のスカラー曲率を表す．この時，$\int_M R(g_0)\, d\mathrm{vol}_{g_0} \geq \kappa$ が成り立つ．また $n = 3$ の時，仮定 (2) は必要ない．

ユークリッド空間上のソボレフノルムと同様にして，閉リーマン多様体上のソボレフノルムが定義される．荒く言うと，$W^{1,p}$ の意味で収束するとは，弱い意味での 1 階導関数までが全て L^p の意味で収束することをいう．

注意. 上定理において閉多様体 M は固定しているから，$n = 2$ の時はガウス–ボンネの定理より全スカラー曲率は計量に依らない．従ってここでは，$n \geq 3$ の場合のみを考えている．

モレーの埋め込み定理から，$W^{1,p} \hookrightarrow C^{0,1-\frac{n}{p}}$ であるから，p を $p > n$ の範囲で色々動かすことによって，主定理 1 は仮定 (1) を

$$(1)' \quad g_i \xrightarrow{C^{0,\alpha}} g_0 \quad (0 < \alpha \leq 1)$$

に変えても成り立つことが分かる．一方で，次のような閉リーマン多様体上の計量列の例を作ることが出来る．この例は,（“$R(g_i) \geq 0$” という仮定を忘れると,）上定理 1 の収束性 $W^{1,p}$ を C^0（つまり，“$\alpha = 0$”）に弱めることは一般に出来ないことを示唆していることに注意する．

例. (M^n, g_0) を任意の n 次元 $(n \geq 3)$ 閉リーマン多様体とする．これに対して，$\left(M^n,\ g_i := u_i^{\frac{4}{n-2}} \cdot g_0\right)$ $(i = 2, 3, \cdots)$ を考える．ここで，$u_i : M \to \mathbb{R}$ は以下で定義される M 上の正の滑らかな関数である．

$$u_i = \phi\left(i^{-1} \sin(ih^2)\right) + 1.$$

ここでさらに $\phi : M \to [0, 1]$ は，ある点 $p \in M$ の十分小さい近傍内にのみサポートを持つような M 上の適当なカットオフ関数で，$h := d_{g_0}(\cdot, p) : M \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ は g_0 に関する p からの距離関数である．この時，ある定数 $C \in \mathbb{R}$ と十分大きい i_0 が存在して，全ての $i \geq i_0$ に対して，

$$\int_M R(g_i)\, d\mathrm{vol}_{g_i} \geq C > \int_M R(g_0)\, d\mathrm{vol}_{g_0}$$

が成り立つ．しかしこの例では g_i のスカラー曲率 $R(g_i)$ の符号が変わることに注意する．つまり，各 i に対してある点 $x_i, y_i \in M$ が存在して，$R(g_i)(x_i) < 0 < R(g_i)(y_i)$ が成り立つ．(一方，主定理 1 では “$R(g_i) \geq 0$” を仮定していた.)

$W^{1,p}$ の p を n に比べて（主定理 1 のそれに比べて）更に大きく取ると，上定理の "重み付き版" である次も示すことができる．

主定理 2 ([4, Main Theorem 2])**.** M^n を n 次元閉多様体 $(n \geq 2)$，g_0 を M 上の C^2 リーマン計量とする．また，$p > n^2/2$ とする．M 上の C^2 級計量の列 (g_i) とある M 上の測度 m が存在して，$e^{-f}d\mathrm{vol}_g := dm =: e^{-f_i}d\mathrm{vol}_{g_i}$ の形 (f, f_i は M 上のある関数) で表されているとする．さらに次を仮定する：

(1) $g_i \xrightarrow{W^{1,p}} g_0$ $(i \to \infty)$,

(2) ある正定数 $\Lambda > 0$ が存在して，f, f_i $(i \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$ は M 上 Λ-リプシッツ,

(3) $f_i \xrightarrow{C^0} f$; M 上一様 $(i \to \infty)$,

(4) 全ての i について，M 上で $R(g_i) \geq 0$,

(5) 全ての i について，$\int_M R(g_i)\, dm \geq \kappa$ $(\kappa \in \mathbb{R})$.

この時,

$$\int_M R(g)\, dm \geq \kappa.$$

主定理 1 の仮定に対し，主定理 2 において p をより大きく取ることの必要性は，通常の全スカラー曲率が微分同相不変であることに対して重み付きの全スカラー曲率はそうではないことに起因する．

この定理 2 の系として，"超関数の意味でのスカラー曲率の下からのバウンド ([6, Definition 2.1])" に関する次の極限定理を得ることが出来る．

系. $p > n^2/2$ とする．M を n 次元閉多様体 $(n \geq 2)$, g を M 上の C^2 級リーマン計量とする．κ を M 上の正値連続関数とする．また，(g_i) を $g_i \in W^{1,p}$ で $W^{1,p}$ の意味で g に M 上収束する計量の列とする．さらに，$R(g_i) \geq \kappa$ が超関数の意味 ([6, Definition 2.1]) で成り立つと仮定する．このとき，$R(g) \geq \kappa$ が超関数の意味で成り立つ．

注意. 計量 g が C^2 級の時，超関数の意味で $R(g) \geq \kappa$ が成り立つことと通常の意味で $R(g) \geq \kappa$ が成り立つことは同値である．従って，この系の結論部分は,「$R(g) \geq \kappa$ が通常の意味で成り立つ」ということを主張している．

ここで，"超関数の意味でのスカラー曲率の下からのバウンド" の定義を与えておく．

定義 1 (Distributional scalar curvature ([6, Definition 2.1], [5, Section 2]))**.** M を滑らかな多様体でその上の滑らかなリーマン計量 h を一つ固定しておく．M 上のリーマン計量 $g \in L^\infty_{loc}(M) \cap W^{1,2}_{loc}(M)$ で局所有界な逆 $g^{-1} \in L^\infty_{loc}(M)$[1]を持つものに対して，そのスカラー曲率超関数 R_g を次で定義する：任意のコンパクト台を持つ滑らかな関数 $u : M \to \mathbb{R}$ に対し,

$$\langle R_g, u\rangle := \int_M \left(-V \cdot \overline{\nabla}\left(u\frac{d\mathrm{vol}_g}{d\mathrm{vol}_h}\right) + Fu\frac{d\mathrm{vol}_g}{d\mathrm{vol}_h}\right) d\mathrm{vol}_h,$$

ここで，$V = (V^k) \in \Gamma(M)$ を $V^k := \sum_{i,j=1}^n g^{ij}\Gamma^k_{ij} - g^{ik}\Gamma^j_{ji}$, F は,

$$F := R_h - \sum_{i,j,k=1}^n \overline{\nabla}_k g^{ij}\Gamma^k_{ij} + \overline{\nabla}_k g^{ik}\Gamma^j_{ji} + \sum_{i,j,k,l=1}^n g^{ij}\left(\Gamma^k_{kl}\Gamma^l_{ij} - \Gamma^k_{jl}\Gamma^l_{ik}\right)$$

[1] このような計量に対して通常の意味でスカラー曲率を定義することはできない．

で与えられる関数，また，$\Gamma_{ij}^k := \sum_{l=1}^n \frac{1}{2} g^{kl} \left(\overline{\nabla}_i g_{jl} + \overline{\nabla}_j g_{il} - \overline{\nabla}_l g_{ij} \right)$ である．また，$\overline{\nabla}$ はリーマン計量 h の Levi-Civita 接続である．

κ を M 上の連続関数とする．超関数の意味で $R_g \geq \kappa$ であるとは，任意の非負値の滑らかなテスト関数 $u \in C_+^\infty(M) \cap C_0^\infty(M)$ に対して，

$$\langle R_g, u \rangle - \int_M \kappa u \, d\mathrm{vol}_g \geq 0$$

が成り立つことをいう．

上の系から，ある n 次元閉多様体 M 上の $W^{1,p}$ $(p > n^2/2)$ 計量 g に対して次のようにスカラー曲率の下からのバウンドを新たに定義することが出来る（つまり，g が C^2 級の時この定義は，通常の意味でのスカラー曲率の下からのバウンドと一致する.）：

定義 2. κ を M 上の正値連続関数とする．ある $W^{1,p}$ $(g \in W^{1,p}$ と同じ $p)$ 計量の列 (g_i) であって

- $W^{1,q}$ $(q > n^2/2)$-位相で g_i が g に収束,
- 超関数の意味で $R(g_i) \geq \kappa$

を満たすものが存在するとき，$R(g) \geq \kappa$ が成り立つという．

Gromov の C^0-極限定理 [1] から，この定義 2 と同様に，通常の意味でスカラー曲率の下からのバウンドを満たす計量列の C^0-極限として実現されるものとして，C^0 級計量のスカラー曲率の下からのバウンドを定義することが出来た．この Gromov の定義と上の定義 2 の異なる点は，上の定義 2 では近似列の各計量が特異点を許容し得る点である ([5, Lemma A.1] を参照のこと)．例えば，$\kappa > 0$ に対して，トーラス上に Gromov の意味で $R(g) \geq \kappa$ を満たすような C^0 級計量 g は存在しない ([3, 7, 8]) が，上の定義 2 の意味で存在する可能性はある．

参考文献

[1] M. Gromov, Dirac and Plateau billiards in domains with corners, Cent. Eur. J. Math. **12** (2014), 1109–1156.

[2] M. Gromov, Four lectures on scalar curvature, arXiv:1908.10612 (2019).

[3] M. Gromov and H. Blaine Lawson Jr., Spin and scalar curvature in the presence of a fundamental group. I, Ann. of Math. **111** (1980), 209–230.

[4] S. Hamanaka, Limit theorems for the total scalar curvature (old version: C^0, C^1-limit theorems for total scalar curvatures), Preprint at `https://arxiv.org/abs/2208.01865` (2022).

[5] W. Jiang, W. Sheng and H. Zhang, Weak scalar curvature lower bounds along Ricci flow, Science China Mathematics (2023), 1–20.

[6] D. A. Lee and P. G. LeFloch, The positive mass theorem for manifolds with distributional curvature, Comm. Math. Phys. **339** (2015), 99-120.

[7] R. Schoen and S.-T. Yau, Existence of incompressible minimal surfaces and the topology of three dimensional manifolds with non-negative scalar curvature, Ann. of Math. **110** (1979), 127–142.

[8] R. Schoen and S.-T. Yau, On the structure of manifolds with positive scalar curvature, Manuscripta Math. **28** (1979), 159–183.