

有限次退化特異点に対する Gauss-Bonnet の定理

横浜国立大学 大学院理工学府 数物・電子情報系理工学専攻 数学教育分野
福間友子 (Tomoko FUKUMA) *

概要

非退化特異点を持つフロントルに対して、Gauss-Bonnet 型定理が成り立つことが知られているが、退化特異点の場合は明らかになっていない。本講演では、非退化特異点を一般化する特異点のクラスとして有限次退化特異点を導入し、Gauss-Bonnet 型定理が成り立つことを紹介する。特に偶数次退化特異点の場合、フロントルが余向き付け可能であることと、2次元多様体が向き付け可能であることが同値であるとわかった。このことから、奇数次と偶数次で結果に違いがあることを紹介する。本稿の内容は、本田淳史氏 (横浜国立大学) との共同研究に基づく。

1 導入

閉波面は特異点としてカスプ辺とツバメの尾のみを許容するものとしたときに対する Gauss・ボンネの定理は、ランジュバン・レビット・ローゼンバーグ [2] より 1995 年に指摘され、コソフスキー [1] より 2002 年に示された。そして 2008, 2009 年に佐治, 梅原, 山田 [4] が閉波面の特異点を、フロントルの非退化特異点へ一般化し、Gauss・ボンネの定理を示した。

$$\frac{1}{2\pi} \int_{M^2} K dA + \frac{1}{\pi} \int_{\Sigma(f)} \kappa_s ds = \chi(M^2), \quad (1.1)$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{M^2} K d\hat{A} = \chi(M^+) - \chi(M^-) + \sum_{i=1}^n \text{sgn}(P_i). \quad (1.2)$$

この非退化特異点に対する Gauss・ボンネの定理は、退化特異点に対しても成り立つのかという疑問が生まれた。本講演では退化特異点の特別なクラスである有限次退化特異点を導入し、Gauss・ボンネの定理が成り立つことを紹介する。

2 有限次退化特異点

まずはフロントルと面積要素の定義を与える。ここでは M^2 を向き付けられた 2次元多様体とする。

定義 2.1 (フロントル). 2次元多様体 M^2 に対して、 C^∞ 級写像 $f: M^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ がフロントルであるとは、 M^2 上の任意の点 p に対して、 p の近傍 U から単位球面 $S^2 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$

* fukuma-tomoko-zv@ynu.jp

への C^∞ 級写像 $\nu : U \rightarrow S^2$ が存在し, U 上の任意の点 q と接空間 $T_q U$ の任意のベクトル \mathbf{v} に対して,

$$df(\mathbf{v}) \cdot \nu(q) = 0$$

をみたすときをいう. また ν を f の U 上における ガウス写像 とよぶ.

定義 2.2. 定義 2.1 において, \mathbb{R}^3 を $T_{f(p)}\mathbb{R}^3$ と同一視したときに定まる ν を f に関する 単位法線ベクトル場 とよぶ. また単位法線ベクトル場をなめらかに M^2 全体で定義されるように拡張できるとき, f は 余向き付け可能 であるという.

定義 2.3 (面積要素). フロント $f : M^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ が与えられたとき, M^2 の座標近傍 $(U; u, v)$ に対して,

$$\lambda := \det(f_u, f_v, \nu)$$

によって定義される実関数を U 上の 符号付き面積密度関数 とよぶ. また (u, v) が M^2 の向きに同調した座標であるとき, 2 次微分形式

$$d\hat{A} := \lambda du \wedge dv, \quad dA := |\lambda| du \wedge dv$$

をそれぞれ 符号付き面積要素, (符号なし) 面積要素 とよぶ.

この面積要素に対して

$$M^+ := \{p \in M^2; dA_p = d\hat{A}_p\}, \quad M^- := \{p \in M^2; dA_p = -d\hat{A}_p\}$$

と定め, ∂M^+ を M^+ の境界, ∂M^- を M^- の境界とする. このとき f の特異点集合 $\Sigma(f)$ は,

$$\Sigma(f) := M^+ \cap M^- = \partial M^+ = \partial M^-$$

と表される.

定義 2.4 (オイラー形式). $Kd\hat{A}$ の拡張として, M^2 上で定義された滑らかな 2 次微分形式を $\hat{\Omega}$ と書き, これを f の (符号付き) オイラー形式 という. また $M^2 \setminus \Sigma(f)$ 上で定義された 2 次微分形式 $\Omega := KdA$ を f の 符号なしオイラー形式 とよぶ.

退化特異点の特別なクラスである有限次退化特異点の定義を次のように与える.

定義 2.5 (有限次退化特異点). n を正の整数とする. フロント $f : M^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, f の単位法線ベクトル場 ν , f の特異点 p に対して, p の座標近傍 $(U; u, v)$ 上で定義された符号付き面積密度関数を $\lambda = \det(f_u, f_v, \nu)$ とする. このとき, p が n 次退化特異点であるとは以下の条件をみたすときをいう.

$$(1) \text{rank}(df_p) = 1$$

(2) U 上で定義された C^∞ 級関数 $\hat{\lambda}$ と, U 上で定義された零でない C^∞ 級関数 α が存在し, 次をみたす.

$$\begin{cases} \lambda = \alpha \hat{\lambda}^n, \\ d\hat{\lambda}(p) \neq 0. \end{cases}$$

この n を退化次数とよぶ. 特に n が奇数のときは $\alpha = 1$ であると定める. フロントルの特異点 p が有限次退化特異点であるとは, ある正の整数 n が存在し, p が n 次退化特異点であるときをいう. また n が偶数のときは定義域 U において $\lambda \geq 0$ または $\lambda \leq 0$ であることに注意する.

注意. 一般に $n = 1$ であるとき p を非退化特異点とよび, それ以外の特異点を退化特異点とよぶ.

フロントル f の特異点が全て有限次退化特異点であるとする, 特異点集合 $\Sigma(f)$ は M^2 上の埋め込まれた曲線の和集合になる. なぜなら特異点において $\lambda = 0$ となることから, $\Sigma(f)$ は $\hat{\lambda} = 0$ で表される. また有限次退化特異点 p では $d\hat{\lambda}$ は零にならない. 従って陰関数定理より, 特異点集合は p の近くで正則曲線となる.

定義 2.6 (特異方向). これらの各曲線は **特異曲線** とよばれる. またその接ベクトルを **特異ベクトル** といい, そのベクトルが定める 1 次元ベクトル空間を **特異方向** という.

定義 2.7 (退化方向). 有限次退化特異点 p に対して, 1 次元ベクトル空間

$$N_p = \{v \in T_p M^2 \mid df_p(v) = 0\}$$

を **退化方向** といい, そのベクトルを **退化ベクトル** という.

定義 2.8 (第一種特異点, 第二種特異点). フロントル f の有限次退化特異点 p に対して, 退化方向と特異方向が異なるとき, p は **第一種特異点** であるという. また退化方向と特異方向が一致するとき, p は **第二種特異点** であるという.

定義 2.9. 第二種特異点が **許容的** であるとは, 定義域においてそれ自身が第二種特異点の集積点になっていないときをいう.

第一種有限次退化特異点は, [3] で導入された m -type edge であることがわかる.

3 特異曲率

第一種特異点からなる特異曲線の特異曲率を次のように定める.

定義 3.1 (特異曲率). $\gamma(t)$ を第一種特異点からなる特異曲線, $\eta(t)$ を γ に沿った退化ベクトル場とする. また $\hat{\gamma} := f \circ \gamma$, $\hat{\nu} := \nu \circ \gamma$ とおく. このとき,

$$\kappa_s(t) := \varepsilon_\gamma(t) \frac{\det(\hat{\gamma}'(t), \hat{\gamma}''(t), \hat{\nu}(t))}{|\hat{\gamma}'(t)|^3}$$

$$\varepsilon_\gamma(t) = \text{sgn}(\det(\gamma'(t), \eta(t))\hat{\lambda}_\eta)$$

で定まる値を, 第一種特異点からなる $\hat{\gamma}(t)$ 上の **特異曲率** とよぶ.

命題 3.2. 退化次数が奇数であるとする. 第一種特異点の特異曲率 κ_s は,

- (1) 特異曲線のパラメータの取り方
- (2) 曲面の向き

- (3) 単位法線ベクトル場の選び方
- (4) 退化ベクトル場の取り方

によらない。

一方で退化次数が偶数の場合, 第一種特異点の特異曲率は, (1) 特異曲線のパラメータと (4) 退化ベクトル場の取り方によらないが, (2) 曲面の向きと (3) 単位法線ベクトル場の向きに依存する。

証明. 奇数次の証明は非退化の場合と同様に示すことができる ([5], 命題 5.4.1).

u 軸が特異曲線である座標系 (u, v) を $(u, -v)$ に取り替える, もしくは単位法線ベクトル場 ν を $-\nu$ に取り替えると, 面積密度関数 λ は $-\lambda$ へ変化する. しかし偶数次退化ならば $\hat{\lambda}^n > 0$ となる為, 定義 2.5 より λ の変化に対する $\hat{\lambda}$ の変化がわからない. 従って偶数次ならば (1) と (4) については依存しないが, (2) と (3) には依存する. \square

ε を正の実数, $\gamma(t)$ を第一種特異点のみからなる特異曲線, U を uv 平面上の領域とする. また $|w| < \varepsilon$ に対して, $\gamma_w : [a, b] \rightarrow U$ を各 w によって決まる正則曲線の族とし, $\gamma_0(t) = \gamma(t)$ をみたとする. さらに対応

$$[a, b] \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U; (t, w) \mapsto \gamma_w(t)$$

は \mathbb{R}^2 のある領域から U への向きを保つ微分同相写像の制限になっているとする. すると γ_w は $w = 0$ のとき以外では, 特異点集合と交わらない. 一方で $\hat{\gamma}_w := f \circ \gamma_w$ とし, $\hat{\nu}$ を $\hat{\gamma}_w$ に沿った単位法線ベクトル場とする. さらに $\hat{e}(t) := \hat{\gamma}'(t)/|\hat{\gamma}'(t)|$, $\hat{n}(t) := \hat{\nu}(t) \times \hat{e}(t)$ と定める. また $\mathbf{n}_L^w : [a, b] \rightarrow U$ を次の条件をみたすように定める.

- (1) U 内で $\{\gamma_w'(t), \mathbf{n}_L^w(t)\}$ が正の向きにある.
- (2) $\hat{e}_w(t) := \hat{\gamma}'_w(t)/|\hat{\gamma}'_w(t)|$, $\hat{n}_L^w(t) := df(\mathbf{n}_L^w(t))$, $\hat{\nu}^w(t) := \nu(\gamma_w(t))$ とするとき, $\{\hat{e}_w(t), \hat{n}_L^w(t), \hat{\nu}^w(t)\}$ が正規直交基底となる.

このとき以下の命題が成り立つ.

命題 3.3. $w > 0$ のときは γ_w 上で $\hat{\lambda} > 0$ であるとし, $w < 0$ のときは γ_w 上で $\hat{\lambda} < 0$ とする. このとき

$$\kappa_g^w(t) := \frac{\hat{\gamma}''_w(t) \cdot \hat{\mathbf{n}}_L^w(t)}{\hat{\gamma}'_w(t) \cdot \hat{\gamma}'_w(t)}$$

と定めると, 退化次数が奇数のとき

$$\lim_{w \rightarrow +0} \kappa_g^w(t) = \kappa_s(t), \quad \lim_{w \rightarrow -0} \kappa_g^w(t) = -\kappa_s(t)$$

が成り立ち, 退化次数が偶数のとき

$$\begin{cases} \lim_{w \rightarrow 0} \kappa_g^w(t) = \kappa_s(t) & (\alpha > 0), \\ \lim_{w \rightarrow 0} \kappa_g^w(t) = -\kappa_s(t) & (\alpha < 0) \end{cases}$$

が成り立つ. この $\kappa_g^w(t)$ を $\gamma_w(t)$ の測地的曲率とよぶ.

命題 3.4. 許容的な第二種特異点の近傍上で

$$ds := |\dot{\gamma}'(t)|dt$$

とすると, $\kappa_s ds$ は特異曲線上の滑らかな 1 次微分形式を与える. また曲線 $\gamma : [a, b] \rightarrow M^2$ を特異曲線とし, 以下の条件をみたすとする.

- (1) $\gamma(a)$ は許容的な第二種特異点である
- (2) $\gamma((a, b])$ は第一種特異点で構成される

このとき積分

$$\Theta_\gamma := \int_a^b \kappa_s ds$$

は well-defined である.

4 局所版ガウス・ボンネの定理

M^2 はコンパクトで境界をもたない向きづけられた 2 次元多様体とする. またフロント $f : M^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ の特異点は全て有限次退化特異点であり, 第一種または許容的な第二種特異点であるとする. さらに f が偶数次退化特異点をもつならば, $M^2 = M^+$ と仮定して良い (定理 5.1).

定義 4.1. \mathbb{R}^2 上の一般の位置にある相異なる点 A, B, C をとる. 線分 AB, BC, CA によって囲まれる有界閉領域を 線形三角形 または 線形三角形領域 といい, $\triangle ABC$ と書く.

定義 4.2. 2 次元多様体 M^2 上の閉領域 T が 三角形 であるとは, $\varphi(T)$ が \mathbb{R}^2 の線形三角形となるような, 局所座標系 $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ が存在するときをいう.

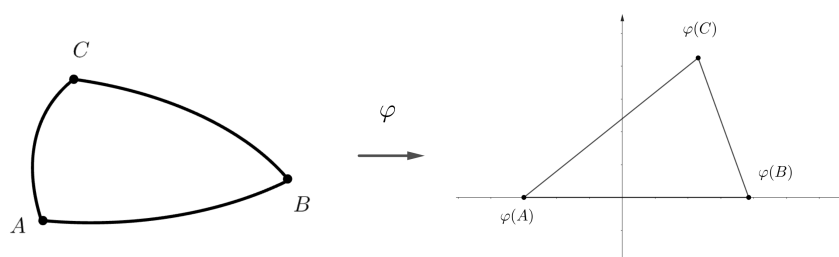


図 1 2 次元多様体上の三角形

D を M^2 上の領域, \bar{D} を D のコンパクトな閉包とする. 境界 $\partial D (\neq \emptyset)$ が互いに共通部分をもたない有限個の単純正則曲線の和集合であるとする.

定義 4.3. M^2 上にある有限個の三角形の族 $\{T_i\}_{i=1, \dots, N}$ が \bar{D} の 三角形分割 であるとは, 以下をみたすときをいう.

- (1) $\bar{D} = T_1 \cup \dots \cup T_N$ かつ, ∂D が空でない限り ∂D は三角形の辺と頂点だけで成り立つ.
- (2) 任意の異なる三角形 T_i, T_j に対して, $T_i \cap T_j$ は空集合でない限り, T_i と T_j の共通の 1 辺であるか共通の 1 つの頂点となる.

f が奇数次退化特異点のみもつならば M^+ または M^- に対して, 偶数次のみならば M^2 に対して, 三角形分割を施す. このとき以下の 5 つの条件をみたす三角形分割が存在する.

- (1) 特異点は三角形の辺上にしか存在しない. 特に各三角形の内点は正則点のみからなる. また三角形のある辺において, その端点がどちらも特異点であるか, 辺の内点に 1 点でも特異点を含むとき, その辺上の全ての点は特異点からなる.
- (2) 第二種特異点は三角形の頂点になっている.
- (3) 準正則三角形または特異三角形の特異点である頂点において, 特異辺でない辺の接ベクトルは全て退化方向と一致しない.
- (4) 各三角形は高々 1 つの特異辺しかもたない.
- (5) 全ての辺は高々 1 つの第二種特異点しかもたない.

この三角形分割では次の 4 種類の三角形が現れる.

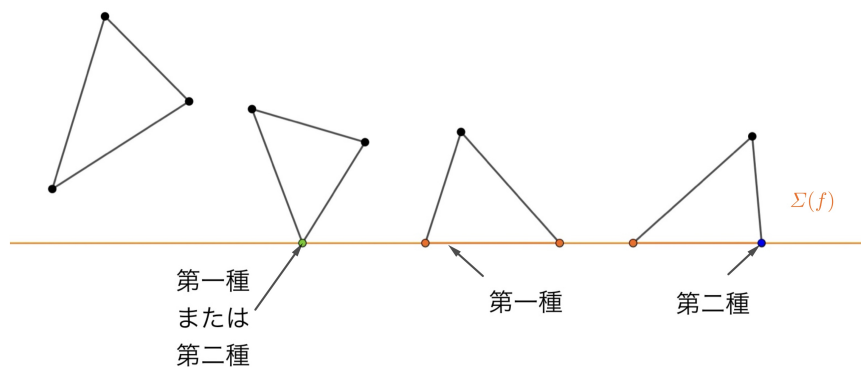


図 2 三角形分割に現れる 4 つの三角形

三角形 $\triangle ABC$ に対して, 頂点 A は第一種特異点であるとする. また辺 CA と AB の 2 つは正則曲線 $\gamma_3(t), \gamma_1(t)$ ($0 \leq t \leq 1$) で表され, $A = \gamma_3(1) = \gamma_1(0)$ をみたすとする. $\mathbf{c} := -\gamma_3'(1), \mathbf{b} := \gamma_1'(0)$ とおくと, どちらのベクトルも A において $\mathbf{0}$ にならない. このことから頂点 A における内角 $\angle A$ を

$$\angle A := \arccos \left(\frac{df(\mathbf{c}) \cdot df(\mathbf{b})}{|df(\mathbf{c})| |df(\mathbf{b})|} \right)$$

と定める. するとこの角度は連続性を持ち, 以下の補題が成り立つ.

補題 4.4. uv 平面の領域 U 上の点 P を f の第一種特異点とし, 曲線 γ_1, γ_2 は P を通るとする. また P における γ_1, γ_2 の接ベクトルをそれぞれ \mathbf{a}, \mathbf{b} とし, これらは一次独立であり, どちらも退化方向を向いていないとする. このとき \mathbf{a}, \mathbf{b} が退化方向を挟んで反対側にあるならば \mathbf{a} と \mathbf{b} の角度は π であり, 同じ側ならば角度は 0 である.

また許容的な第二種特異点に対して、次のような局所座標系が取れる。

補題 4.5. P を許容的な第二種特異点とし、 γ を P を通る特異曲線とする。また M^2 の向きに同調した局所座標系 $(U; u, v)$ で、 P は uv 平面の原点と一致し、 $\partial_u := \partial/\partial u$ が γ に沿った退化ベクトル場となるようなものを考える。さらに $\gamma(0) = (0,0)$, $\gamma'(0) = (1,0)$ であるとする。このとき γ は uv 平面上で次をみたとす。

- (1) 接ベクトル $\gamma'(t)$ は十分小さな t に対して、 $t = 0$ のときを除いて水平にならない。
- (2) $\gamma(t)$ は十分小さな t に対して u 軸と交わらない。

三角形 $\triangle ABC$ の頂点 A が第二種特異点であるとする。補題 4.5 の局所座標系を使って、頂点 A の内角を次のように定義する。

$$\angle A := \begin{cases} \pi & (u \text{ 軸の正の部分が } A \text{ の近傍において三角形の内部に含まれるとき), \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases} \quad (4.1)$$

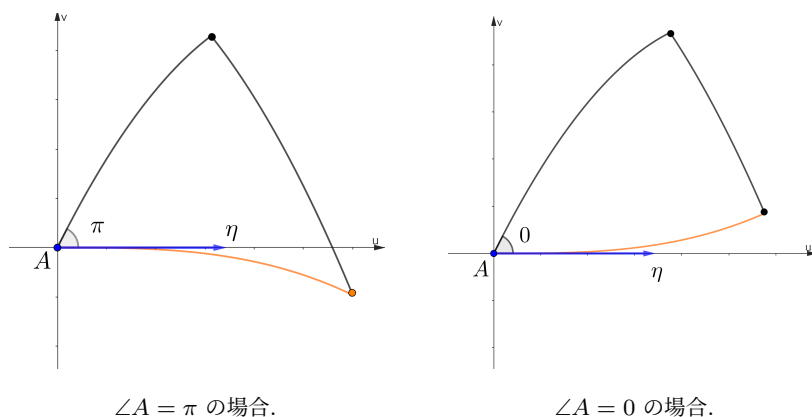


図 3 II 型の特異三角形の第二種特異点における内角

この角度の定義は局所座標の取り方に依存するが、補題 4.5 をみたとすような座標系の取り方には依存しない。

$\gamma(t)$ ($0 \leq t \leq 1$) は $\triangle ABC$ の辺 AB を表すものとする。辺 AB が特異辺でないとき、 M^2 上の γ に沿った余法線ベクトル場に関する測地的曲率 $\kappa_g(t)$ を用いて全測地的曲率を

$$\Theta_{AB} := \int_0^1 \kappa_g(t) ds \quad (ds := |\hat{\gamma}'(t)| dt)$$

と定義する。一方で AB が特異辺であるときは測地的曲率が定義されないが、特異曲率 $\kappa_s(t)$ を定義することができる。全測地的曲率を

$$\Theta_{AB} := \int_0^1 \kappa_s(t) ds \quad (ds := |\hat{\gamma}'(t)| dt)$$

と定義する。

命題 4.6 (フロントルに対する局所版ガウス・ボンネの定理). 三角形 $\triangle ABC$ を M^+ の三角形分割

に現れる三角形とする. また $\triangle ABC$ の特異点は第一種のみであるとする. このとき

$$\angle A + \angle B + \angle C - \pi = \Theta_{AB} + \Theta_{BC} + \Theta_{CA} + \int_{\triangle ABC} \Omega \quad (4.2)$$

が成り立つ. さらに補題 4.5 の座標系を用いると, $\triangle ABC$ が第二種特異点をもつ場合も, (4.2) が成り立つ.

5 主結果

主結果は以下の定理 2 つである.

定理 5.1. フロント f の特異点は全て偶数次退化特異点であるとする. このとき 2 次元多様体 M^2 が向き付け可能であることと, f が余向き付け可能であることが同値である.

定理 5.1 は偶数次退化の定義 2.5 より, M^2 の各局所座標系 $(U; u, v)$ に対して, $\lambda \geq 0$ が成り立つと仮定してよいことから示せた.

第二種奇数次退化特異点 P における M^+ の内角とは, M^+ を三角形分割したときにできる, P を頂点にもつ n 個の三角形 T_1, T_2, \dots, T_n に対して, P における n 個の内角の和をいう. (4.1) より M^+ の内角は $0, \pi, 2\pi$ のいずれかである.

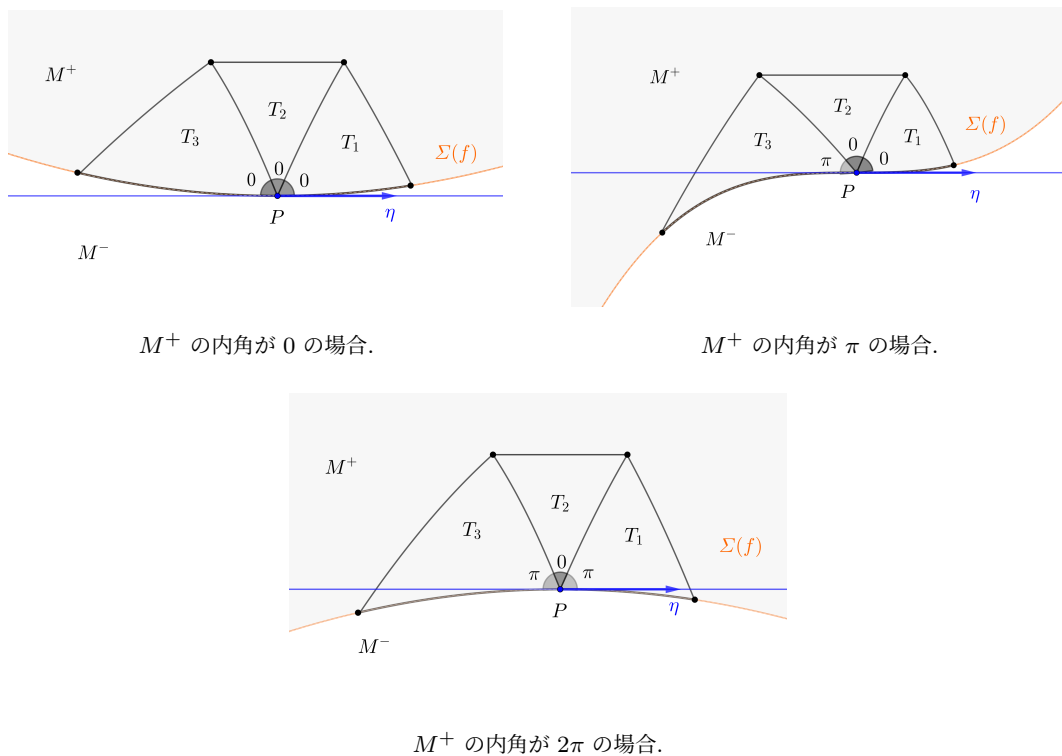


図 4 許容的な第二種特異点 P における M^+ の内角

このとき有限次退化特異点に対する Gauss・Bonnet の定理は次のようになるとわかった.

定理 5.2. M^2 をコンパクトで境界をもたない向き付け可能な 2 次元多様体とする. また $f: M^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ をフロントルとし, f の特異点は全て有限次退化特異点であり, 第一種特異点または許容的な第二種特異点であるとする. さらに ν を大域的に定義された f の単位法線ベクトル場とし, $\chi(M^2)$ を M^2 のオイラー標数とする. 一方で $d\hat{A}$ を ν に関する符号付き面積要素, dA を符号なし面積要素とし, ガウス曲率 K に対して $\hat{\Omega} = Kd\hat{A}$, $\Omega = KdA$ と定める. このとき f の特異点が全て奇数次退化ならば, 次の 2 つの等式が成り立つ.

$$\frac{1}{2\pi} \int_{M^2} \Omega + \frac{1}{\pi} \int_{\Sigma(f)} \kappa_s ds = \chi(M^2),$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{M^2} \hat{\Omega} = \chi(M^+) - \chi(M^-) + \sum_{i=1}^n \text{sgn}(P_i).$$

また偶数次退化ならば, 次の 1 つの等式が成り立つ.

$$\frac{1}{2\pi} \int_{M^2} \Omega = \chi(M^2).$$

ただし

$$\int_{M^2} \Omega := \int_{M^+} \hat{\Omega} - \int_{M^-} \hat{\Omega},$$

$$\text{sgn}(P) := \begin{cases} 1 & (P \text{ における } M^+ \text{ の内角が } 2\pi \text{ のとき}) \\ 0 & (P \text{ における } M^+ \text{ の内角が } \pi \text{ のとき}) \\ -1 & (P \text{ における } M^+ \text{ の内角が } 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

と定める.

f の特異点が全て偶数次退化であるとき, 以下の補題が成り立つ.

補題 5.3. M^2 上の三角形 $\triangle ABC$ に対して, 辺 AB は特異辺でない, または偶数次退化特異点からなる辺とする. このとき

$$\Theta_{AB} = -\Theta_{BA} \tag{5.1}$$

が成り立つ.

補題 5.4. $P \in M^2$ が正則点または偶数次退化特異点であるとき, P における内角の総和は 2π である.

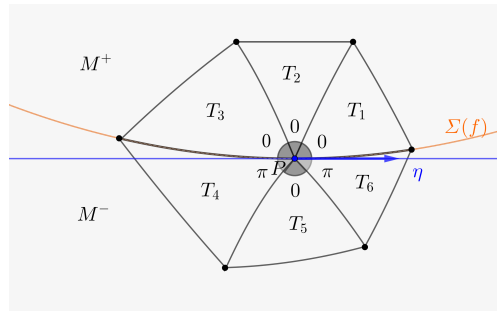


図 5 偶数次退化特異点 P における内角の総和

補題 5.3 は命題 3.3 の偶数次退化の場合を利用して示すことができる。また補題 5.4 は $M^2 = M^+$ であることと、角度の定義からわかる。これらの補題を用いると定理 5.2 を証明できる。

証明. 定理 5.2 の奇数次退化に対する証明は、非退化の場合 ([5], 定理 6.7.5) と同様の議論より示せる。

f の特異点は偶数次退化のみであると仮定する。 $\{V_1, \dots, V_N\}$ を三角形分割に現れる三角形の頂点の集合とし、 m_j 個の三角形 $T_{j,1}, \dots, T_{j,m_j}$ は j 番目の頂点 V_j を共有しているとする。補題 5.3 より各辺において全測地的曲率は打ち消し合う。また補題 5.4 より、 V_i が特異点である場合とそうでない場合の両方で、 V_i における内角の総和は 2π となる。三角形分割に現れる三角形 $\triangle ABC$ に対して (4.2) が成り立つ。ここで三角形分割に現れる全ての三角形の頂点の数を \mathcal{V} 、辺の数を \mathcal{E} 、面の数を \mathcal{F} とおく。 M^2 は境界をもたないことから $2\mathcal{E} = 3\mathcal{F}$ が成り立つ。このことから各三角形に対して (4.2) を両辺足し合わせることで、

$$\begin{aligned} \int_{M^2} \Omega &= 2\pi\mathcal{V} - \pi\mathcal{F} \\ &= 2\pi\mathcal{V} - 3\pi\mathcal{F} + 2\pi\mathcal{F} \\ &= 2\pi\mathcal{V} - 2\pi\mathcal{E} + 2\pi\mathcal{F} \\ &= 2\pi\chi(M^2) \end{aligned}$$

が成り立つ。 □

参考文献

- [1] M. Kossowski, *The Boy-Gauss-Bonnet theorems for C^∞ -singular surfaces with limiting tangent bundle*, Ann. Global Anal. Geom. **21** (2002), 19–29.
- [2] R. Langevin, G. Levitt, and H. Rosenberg, *Classes d'homotopie de surfaces avec rebroussements et queues d'aronde dans R^3* , Canad. J. Math. **47** (1995), 544–572.
- [3] Luciana F. Martins, Kentaro Saji, Samuel P. dos Santos, and Keisuke Teramoto, *Boundedness of geometric invariants near a singularity which is a suspension of a singular curve*, arXiv:2206.11487, to appear in Revista de la Unión Matemática Argentina.
- [4] K. Saji, M. Umehara and K. Yamada, *The geometry of fronts*, Ann. of Math. **169** (2009), 491–529.
- [5] M. Umehara, K. Saji, and K. Yamada, *Differential geometry of curves and surfaces with singularities*. Translated from the Japanese by Wayne Rossman. Series in Algebraic and Differential Geometry 1. Singapore: World Scientific. xvi, 370 p. (2022).