点平等な q 超幾何方程式の解と接続問題

神戸大学 大学院理学研究科 数学専攻

藤井 大計 (Taikei Fujii) *

概要

3 次の変異版 q 超幾何方程式は量子可積分系を背景に持つ 2 階の q 差分方程式であり, Hatano-Matsunawa-Sato-Takemura によって導入された. この方程式を点平等な視点から考察することにより Euler 型積分解と超幾何型級数解を構成した. また, 解の間の線形関係についても述べる. 本講演の内容は神戸大学の信川喬彦氏との共同研究に基づく.

1 導入

Gauss の超幾何級数は次で定義される級数である.

$$ {}_2F_1\left(\begin{matrix}\alpha,\beta\\ \gamma\end{matrix};x\right)=1+\frac{\alpha\cdot\beta}{\gamma\cdot 1}x+\frac{\alpha(\alpha+1)\cdot\beta(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1)\cdot 1\cdot 2}x^2+\cdots. \tag{1.1}$$

この級数は, 数学, 物理学, 工学など様々な場面に登場する重要な特殊関数である. この級数は Gauss の超幾何方程式と呼ばれる次の微分方程式を満たす.

$$\left[x(1-x)\frac{d^2}{dx^2}+(\gamma-(\alpha+\beta+1)x)\frac{d}{dx}-\alpha\beta\right]f(x)=0, \tag{1.2}$$

この微分方程式は $\mathbb{P}^1$ 上に 3 点の特異点を持つ 2 階の Fuchs 型方程式の標準的な表示であり, 特異点の情報を並べた Riemann 図式と呼ばれる次のような図によって特徴づけられる:

$$\left\{\begin{matrix} x=0 & x=1 & x=\infty\\ 0 & 0 & \alpha\\ 1-\gamma & \gamma-\alpha-\beta & \beta\end{matrix}\right\}. \tag{1.3}$$

Gauss の超幾何方程式は, 次のような Euler 型積分解を持つ.

$$I_{p,q}=\int_p^q t^{\alpha-1}(1-t)^{\gamma-\alpha-1}(1-xt)^{-\beta}dt,\quad p,q\in\{0,1,\frac{1}{x},\infty\}. \tag{1.4}$$

適切に分枝を決めれば, この積分の間には次のような線形関係がある:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & -e^{2\pi i(\alpha-\gamma)} & 1\\ 0 & 0 & 1 & e^{2\pi i\alpha} & 0 & e^{2\pi i\beta}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_{0,1}\\ I_{1,\frac{1}{x}}\\ I_{0,\frac{1}{x}}\\ I_{\infty,0}\\ I_{1,\infty}\\ I_{\frac{1}{x},\infty}\end{pmatrix}=0. \tag{1.5}$$

* tfujii@math.kobe-u.ac.jp

解の間の線形関係を求めることは基本的で重要な問題であり接続問題と呼ぶ．また, このような線形関係のことを接続関係式という．

次の Riemann 図式を持つ 2 階の Fuchs 型微分方程式を Riemann-Papperitz の方程式という:

$$\left\{ \begin{array}{ccc} z = t_1 & z = t_2 & z = t_3 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{array} \right\}. \tag{1.6}$$

ただし, $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = 1$ である．Gauss の超幾何微分方程式と Riemann-Papperitz の方程式は一次分数変換とゲージ変換によって移り合う．そのため, Riemann-Papperitz の方程式の級数解, 積分解や接続問題は, (1.2), (1.4), (1.5) を適当に変数変換したもので得ることができる．例えば,

$$\left(\frac{z-t_1}{z-t_3}\right)^{\alpha_1} \left(\frac{z-t_2}{z-t_3}\right)^{\alpha_2} {}_2F_1\left(\begin{array}{c} \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3, \alpha_1+\alpha_2+\beta_3 \\ \alpha_1-\beta_1+1 \end{array} ; \frac{z-t_1}{z-t_3}\frac{t_2-t_3}{t_2-t_1}\right) \tag{1.7}$$

は Riemann-Papperitz の微分方程式の解となる．Riemann-Papperitz の微分方程式は, Gauss の超幾何微分方程式と等価ではあるが特異点を平等に扱っており, Gauss の超幾何微分方程式の ‘点平等版’ と考えられる．

Heine の q 超幾何方程式と呼ばれる Gauss の超幾何方程式の ‘q 差分版’ が知られている:

$$[x(1-aT_x)(1-bT_x) - (1-T_x)(1-cq^{-1}T_x)]f(x) = 0. \tag{1.8}$$

ただし, $T_x h(x) = h(qx)$ である．この方程式にも, 級数解, 積分解や接続問題が明示的に知られている．例えば,

$${}_2\varphi_1\left(\begin{array}{c} a, b \\ c \end{array} ; x\right) = 1 + \frac{(1-a)(1-b)}{(1-c)(1-q)}x + \frac{(1-a)(1-aq)(1-b)(1-bq)}{(1-c)(1-cq)(1-q)(1-q^2)}x^2 + \cdots .$$

といった解を持つ．この級数を Heine の q 超幾何級数と呼ぶ．適当なパラメータのもと, $q \to 1$ という極限で (1.1) に退化する．このようなとき, Heine の q 超幾何級数は Gauss の超幾何級数の q 類似 (1 パラメータ拡張) であるという．

本稿では, 3 次の変異版 q 超幾何方程式と呼ばれる次の方程式を考える:

$$\mathcal{H}_3 f(x) = 0, \tag{1.9}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_3 = {} & \prod_{i=1}^{3}(x - q^{h_i+1/2}t_i)\cdot T_x^{-1} + q^{2\alpha+1}\prod_{i=1}^{3}(x - q^{l_i-1/2}t_i)\cdot T_x \\ & + q^{\alpha}\Bigg[-(q+1)x^3 + q^{1/2}\sum_{i=1}^{3}(q^{h_i}+q^{l_i})t_i x^2 \\ & - q^{(h_1+h_2+h_3+l_1+l_2+l_3+1)/2}t_1t_2t_3\sum_{i=1}^{3}((q^{-h_i}+q^{-l_i})/t_i)x \\ & + q^{(h_1+h_2+h_3+l_1+l_2+l_3)/2}(q+1)t_1t_2t_3\Bigg]. \end{aligned} \tag{1.10}$$

この方程式は, Hatano-Matsunawa-Sato-Takemura [5] によって導入され, Riemann-Papperitz の微分方程式に退化することが示されている．q 差分方程式の理論において, q シフト作用素 T_x の固

定点 $x=0,\infty$ は特別である．そのため, 1 次分数変換を行うことは非常に困難である．このことが理由で, 方程式 (1.9) の解を q 超幾何方程式からの変数変換によって得ることは難しい．しかし, Riemann-Papperitz の微分方程式の q 類似であるという視点は重要で, その考えを基にして解を構成し接続関係式を与える.

最後に, よく使う記号をまとめておく.

q 上昇階乗ベキ：

$$(a)_\infty=\prod_{i=0}^{\infty}(1-aq^i),\ (a)_n=\frac{(a)_\infty}{(aq^n)_\infty},\ (a_1,\dots,a_M)_n=(a_1)_n\cdots(a_M)_n.$$

テータ関数：

$$\theta(z)=(q,z,q/z)_\infty,\quad \theta(z_1,\dots,z_M)=\theta(z_1)\cdots\theta(z_M).$$

Jackson 積分：

$$\begin{aligned}
\int_0^{\sigma} f(t)d_qt&=(1-q)\sigma\sum_{i=0}^{\infty}f(\sigma q^i)q^i,\\
\int_0^{\sigma\infty} f(t)d_qt&=(1-q)\sigma\sum_{i=-\infty}^{\infty}f(\sigma q^i)q^i,\\
\int_{\sigma_1}^{\sigma_2} f(t)d_qt&=\int_0^{\sigma_2} f(t)d_qt-\int_0^{\sigma_1} f(t)d_qt.
\end{aligned}$$

q シフト作用素：$T_xf(x)=f(qx)$.

2　H_3 の Euler 型積分解

ここでは 3 次の変異版 q 超幾何方程式の積分解を導出する．Riemann-Papperitz の微分方程式は次の積分解を持つ.

$$(z-t_1)^{\alpha_1}(z-t_2)^{\alpha_2}(z-t_3)^{\alpha_3}\int_C(t-t_1)^{\alpha_2+\alpha_3+\beta_1-1}(t-t_2)^{\alpha_1+\alpha_3+\beta_2-1}(t-t_3)^{\alpha_1+\alpha_2+\beta_3-1}(t-z)^{-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3}dt. \tag{2.1}$$

積分 (2.1) の q 類似を考えれば良いので, 次の Jackson 積分を考える.

$$\int_C\frac{(q^{-\nu_0}xt)_\infty}{(xt)_\infty}\frac{(q^{-\nu_1}t_1t)_\infty}{(t_1t)_\infty}\frac{(q^{-\nu_2}t_2t)_\infty}{(t_2t)_\infty}\frac{(q^{-\nu_3}t_3t)_\infty}{(t_3t)_\infty}d_qt \tag{2.2}$$

ただし, $\nu_0=-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3,\nu_1=\alpha_2+\alpha_3+\beta_1-1,\nu_2=\alpha_1+\alpha_3+\beta_2-1,\nu_3=\alpha_1+\alpha_2+\beta_3-1$ とする．ここで均衡条件 $\nu_0+\nu_1+\nu_2+\nu_3=-2$ が入っていることに注意する．適当にパラメータを書き換えると,

$$\int_C\frac{(Axt)_\infty}{(Bxt)_\infty}\prod_{i=1}^{3}\frac{(a_it)_\infty}{(b_it)_\infty}d_qt. \tag{2.3}$$

という積分を考えれば良い．均衡条件は $Aa_1a_2a_3=q^2Bb_1b_2b_3$ となる.

Lemma 2.1. $T_x\tau = q^l\tau$, $l \in \mathbb{Z}$ と仮定すると, 積分

$$\varphi(x,\tau) = \int_0^{\tau\infty} \psi(x,t)\frac{d_qt}{t}, \quad \psi(x,t) = t^\alpha \frac{(Axt, a_1t, a_2t, \ldots, a_Mt)_\infty}{(Bxt, b_1t, b_2t, \ldots, b_Mt)_\infty} \tag{2.4}$$

は次の方程式を満たす.

$$\sum_{k=0}^{M}\big[(-1)^k x^{M-k}(e_k(a)T_x^{-1} - q^\alpha e_k(b))(B - AT_x)\cdots(B - Aq^{M-k-1}T_x) \times (1 - q^{-(k-1)}T_x)\cdots(1 - T_x)\big]\varphi = 0.$$

今の状況では, Lemma 2.1 において, $M = 3, Aa_1a_2a_3 = q^2Bb_1b_2b_3$ の場合である. このとき,

$$(B - Aq^{-1}T_x)(1 - q^{-2}T_x)H_3\varphi(x,\sigma) = 0, \tag{2.5}$$

$$\begin{aligned} H_3 &= x^3(B - AqT_x)(B - AT_x)T_x^{-1} - x^2(B - AT_x)(e_1(a)T_x^{-1} - qe_1(b)) \\ &\quad + x(e_2(a)T_x^{-1} - qe_2(b))(1 - T_x) - \frac{a_1a_2a_3}{B}(1 - q^{-1}T_x)(1 - T_x)T_x^{-1}. \end{aligned} \tag{2.6}$$

この作用素 H_3 は適当なゲージ変換とパラメータの置き換えにより $\mathcal{H}_3$ になる. (2.5) より, $H_3\varphi(x,\sigma) = C_1x^\lambda + C_2x^2$ となる. 特別な積分路の時には, C_1, C_2 は計算できる.

Lemma 2.2. $\tau \in \{q/a_1, q/a_2, q/a_3, q/(Ax)\}$ であり, $B/A \notin q^{\mathbb{Z}}$ とする. このとき, 積分 *(2.4)* は次を満たす.

$$H_3\varphi(x,\tau) = q(1-q)(A-B)x^2. \tag{2.7}$$

Lemma 2.2 より, 積分の差をとれば, 方程式 $H_3y = 0$ の解を得る.

Theorem 2.3. $\sigma_1, \sigma_2 \in \{q/a_1, q/a_2, q/a_3, q/(Ax)\}$ のとき,

$$\varphi_3(x,\sigma_1,\sigma_2) = \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \frac{(Axt)_\infty}{(Bxt)_\infty}\prod_{i=1}^{3}\frac{(a_it)_\infty}{(b_it)_\infty}d_qt \tag{2.8}$$

は方程式 $H_3y = 0$ を満たす. ただし, $Aa_1a_2a_3 = q^2Bb_1b_2b_3$ であり $B/A \notin q^{\mathbb{Z}}$ とする.

Remark 2.4. 3 次の変異版 q 超幾何方程式の積分解は [2] において, q-middle convolution [8] を使った別の手法からも導出されている.

3 H_3 の超幾何型級数解

次の級数は very-well-poised q 超幾何級数と呼ばれる.

$${}_{r+1}W_r(a_1; a_4, a_5, \ldots, a_{r+1}; z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1 - a_1q^{2n}}{1 - a_1}\frac{(a_1, a_4, a_5, \ldots, a_{r+1})_n}{(q, qa_1/a_4, qa_1/a_5, \ldots, qa_1/a_{r+1})_n}z^n. \tag{3.1}$$

次の Balliy の公式と呼ばれる変換公式が知られている [4].

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{(qt/a, qt/b, ct, dt)_\infty}{(et, ft, gt, ht)_\infty}d_qt &= b(1-q)\frac{(q, bq/a, a/b, cd/eh, cd/fh, cd/gh, bc, bd)_\infty}{(ae, af, ag, be, bf, bg, bh, bcd/h)_\infty} \\ &\quad \times {}_8W_7(bcd/hq; be, bf, bg, c/h, d/h; ah) \quad . \end{aligned} \tag{3.2}$$

ただし, $d = abefgh$ である. この Balliy の公式と Theorem 2.3 から次が示せる.

Theorem 3.1. $Aa_1a_2a_3 = q^2Bb_1b_2b_3$ であり, $B/A \notin q^{\mathbb{Z}}$ のとき, 次の関数

$$\frac{(Axq/a_2)_\infty}{(Bxq/a_2)_\infty} {}_8W_7\left(\frac{a_3A}{a_2B}; \frac{qb_1}{a_2}, \frac{qb_2}{a_2}, \frac{qb_3}{a_2}, \frac{a_3}{Bx}, \frac{A}{B}; \frac{qBx}{a_1}\right), \tag{3.3}$$

$$\frac{(a_3Ax/(b_1b_3), a_3Ax/(b_2b_3), qAx/a_2)_\infty}{(qBx/a_1, qBx/a_2, qa_3Ax/(a_2a_3))_\infty} {}_8W_7\left(\frac{a_3Ax}{a_2b_3}; \frac{qBx}{a_2}, \frac{qb_1}{a_2}, \frac{qb_2}{a_2}, \frac{a_3}{b_3}, \frac{Ax}{b_3}; \frac{qb_3}{a_1}\right), \tag{3.4}$$

$$\frac{1}{x}\frac{(qa_1/(Ax), Ax/a_1, a_2a_3/(b_3Bx), qa_2/(Ax), qa_3/(Ax))_\infty}{(qBx/a_1, qb_1/(Ax), qb_2/(Ax), qb_3/(Ax), qa_2a_3/(b_3Ax))_\infty}$$
$$\times {}_8W_7\left(\frac{a_2a_3}{b_3Ax}; \frac{qb_1}{Ax}, \frac{qB}{A}, \frac{qb_2}{Ax}, \frac{a_2}{b_3}, \frac{a_3}{b_3}; \frac{qb_3}{a_1}\right), \tag{3.5}$$

$$\frac{1}{x}\frac{(qa_1/(Ax), qa_2/(Ax), qa_3/(Ax), Ax/a_1, a_2a_3/(b_1Bx), a_2a_3/(b_2Bx), a_2a_3/(b_3Bx))_\infty}{(qb_1/(Ax), qb_2/(Ax), qb_3/(Ax), qa_2a_3/(ABx^2))_\infty}$$
$$\times {}_8W_7\left(\frac{a_2a_3}{ABx^2}; \frac{qb_1}{Ax}, \frac{qb_2}{Ax}, \frac{qb_3}{Ax}, \frac{a_2}{Bx}, \frac{a_3}{Bx}; \frac{qBx}{a_1}\right), \tag{3.6}$$

$$\frac{(qAx/a_1, a_1/(Ax), a_2a_3/(b_3Bx))_\infty}{(qb_1/(Ax), qb_2/(Ax), qBx/a_1)_\infty} {}_8W_7\left(\frac{a_2a_3}{a_1b_3}; \frac{qBx}{a_1}, \frac{qb_1}{a_1}, \frac{qb_2}{a_1}, \frac{a_2}{b_3}, \frac{a_3}{b_3}; \frac{qb_3}{Ax}\right), \tag{3.7}$$

$$\frac{(qAx/a_1, a_1/(Ax), a_2a_3/(b_1Bx), a_2a_3/(b_2Bx))_\infty}{(qb_1/(Ax), qb_2/(Ax), qb_3/(Ax), qBx/a_1, qa_2a_3/(a_1Bx))_\infty}$$
$$\times {}_8W_7\left(\frac{a_2a_3}{a_1Bx}; \frac{qb_1}{a_1}, \frac{qb_2}{a_1}, \frac{qb_3}{a_1}, \frac{a_2}{Bx}, \frac{a_3}{Bx}; \frac{qB}{A}\right), \tag{3.8}$$

は方程式 $H_3y = 0$ を満たす.

これらの級数解は (1.7) の自然な q 類似となっている. 例えば, $A = q^\nu, B = 1, a_i = t_iq^{h_i+1/2}, b_i = t_iq^{l_i-1/2+\nu}, \nu = (h_1+h_2+h_3-l_1-l_2-l_3+1)/2$ とおけば, $q \to 1$ の極限において方程式 $H_3y = 0$ は Riemann-Papperitz の微分方程式に退化し, 級数解 (3.3) は次のような超幾何級数に退化する.

$$\frac{(Axq/a_2)_\infty}{(Bxq/a_2)_\infty} {}_8W_7\left(\frac{a_3A}{a_2B}; \frac{qb_1}{a_2}, \frac{qb_2}{a_2}, \frac{qb_3}{a_2}, \frac{a_3}{Bx}, \frac{A}{B}; \frac{qBx}{a_1}\right)$$
$$= \frac{(q^{1/2+\nu-h_2}x/t_2)_\infty}{(q^{1/2-h_2}x/t_2)_\infty} {}_8W_7\left(\frac{q^{\nu-h_2+h_3}t_3}{t_2}; \frac{q^{\nu-h_2+l_1}t_1}{t_2}, q^{\nu-h_2+l_2}, \frac{q^{\nu-h_2+l_3}t_3}{t_2}, \frac{q^{1/2+h_3}t_3}{x}, q^\nu; \frac{q^{1/2-h_1}x}{t_1}\right)$$
$$\to (1-\frac{x}{t_2})^\nu {}_2F_1\left(\begin{matrix} h_2-l_2-\nu, \nu \\ l_3-h_3-1 \end{matrix}; \frac{x-t_3}{x-t_2}\frac{t_1-t_2}{t_1-t_3}\right).$$

Remark 3.2. very-well-poised q 超幾何級数 ${}_8W_7$ のみたす q 差分方程式については, [1] でも述べられている. その方程式と 3 次の変異版 q 超幾何方程式は同値であると思われる.

4 Euler 型積分解の間の線形関係

Theorem 2.3 において 6 個の積分解を作った. これらの間の線形関係を求める. Jackson 積分の定義から

$$\varphi_3(x, \sigma_1, \sigma_2) + \varphi_3(x, \sigma_2, \sigma_3) + \varphi_3(x, \sigma_3, \sigma_1) = 0 \tag{4.1}$$

が示せる. Mimachi の接続公式 [6] と Lemma 2.2 から次の線形関係式を証明することができる.

Theorem 4.1. $Aa_1a_2a_3 = q^2Bb_1b_2b_3$ であり $B/A \notin q^{\mathbb{Z}}$ とする．このとき，

$$C_1\varphi_3(x,q/a_1,q/a_2) + C_2\varphi_3(x,q/a_1,q/a_3) + C_3\varphi_3(x,q/a_1,q/(Ax)) = 0. \tag{4.2}$$

ただし，

$$C_1 = \left(\frac{a_2}{a_1}\right)^2 \frac{\theta\left(\frac{a_2}{q^2b_1},\frac{a_1}{a_2},\frac{a_1}{a_3},\frac{qb_2}{a_2},\frac{qb_3}{a_2},\frac{a_1}{Ax},\frac{qBx}{a_2}\right)}{\theta\left(\frac{a_1}{q^2b_1},\frac{a_2}{a_1},\frac{a_2}{a_1},\frac{a_2}{Ax},\frac{qb_2}{a_1},\frac{qb_3}{a_1},\frac{qBx}{a_1}\right)}, \tag{4.3}$$

$$C_2 = \left(\frac{a_3}{a_1}\right)^2 \frac{\theta\left(\frac{a_3}{q^2b_1},\frac{a_1}{a_2},\frac{a_1}{a_3},\frac{qb_2}{a_3},\frac{qb_3}{a_3},\frac{a_1}{Ax},\frac{qBx}{a_3}\right)}{\theta\left(\frac{a_1}{q^2b_1},\frac{a_3}{a_1},\frac{a_3}{a_1},\frac{a_3}{Ax},\frac{qb_2}{a_1},\frac{qb_3}{a_1},\frac{qBx}{a_1}\right)}, \tag{4.4}$$

$$C_3 = \left(\frac{Ax}{a_1}\right)^2 \frac{\theta\left(\frac{Ax}{q^2b_1},\frac{a_1}{a_2},\frac{a_1}{a_3},\frac{qb_2}{Ax},\frac{qb_3}{Ax},\frac{a_1}{Ax},\frac{qB}{A}\right)}{\theta\left(\frac{a_1}{q^2b_1},\frac{Ax}{a_1},\frac{Ax}{a_1},\frac{Ax}{a_3},\frac{qb_2}{a_1},\frac{qb_3}{a_1},\frac{qBx}{a_1}\right)}. \tag{4.5}$$

Theorem 4.1 の C_i は擬定数と呼ばれ，$T_xC_i = C_i$ を満たす．(4.1) と Theorem 4.1 を合わせて (Theorem 4.1 の証明の中で得られるテータ関数の関係式も使う) 次を得る．

Theorem 4.2. $Aa_1a_2a_3 = q^2Bb_1b_2b_3$ であり $B/A \notin q^{\mathbb{Z}}$ とする．このとき，積分解

$$\begin{aligned} v = {}^t(&\varphi_3(x,q/a_1,q/a_2),\varphi_3(x,q/a_1,q/a_3),\varphi_3(x,q/a_2,q/a_3),\\ &\varphi_3(x,q/a_1,q/(Ax)),\varphi_3(x,q/a_2,q/(Ax)),\varphi_3(x,q/a_3,q/(Ax))) \end{aligned} \tag{4.6}$$

は次の階数 4 の方程式系を満たす．

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ C_1 & C_2 & 0 & -C_3 & 0 & 0 \end{pmatrix} v = 0. \tag{4.7}$$

さらに，任意の 4×4 小行列の階数は 4 である．

Remark 4.3. 2 次の変異版 q 超幾何方程式 [5] においても，同様の手法によって，積分解，級数解，接続関係式を得ることができる．

参考文献

[1] Aomoto, K., & Ito, M. (2008). Structure of Jackson Integrals of BC_n Type. Tokyo Journal of Mathematics, 31(2), 449-477.

[2] Arai, Y., & Takemura, K. (2023). On q-middle convolution and q-hypergeometric equations. SIGMA. Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications, 19, 037.

[3] Fujii, T., & Nobukawa, T. (2022). Hypergeometric solutions for variants of the q-hypergeometric equation. arXiv preprint arXiv:2207.12777.

[4] Gasper, G., & Rahman, M. (2011). Basic hypergeometric series (Vol. 96). Cambridge university press.

[5] Hatano, N., Matsunawa, R., Sato, T., & Takemura, K. (2022). Variants of q-hypergeometric equation. Funkcialaj Ekvacioj, 65(2), 159-190.

[6] Mimachi, K. (1989). Connection problem in holonomic q-difference system associated with a Jackson integral of Jordan-Pochhammer type. Nagoya Mathematical Journal, 116, 149-161.

[7] Sasaki, S., Takagi, S., & Takemura, K. (2023). g-Heun equation and initial-value space of g-Painlevé equation. Recent Trends in Formal and Analytic Solutions of Diff. Equations, 782, 119.

[8] Sakai, H., & Yamaguchi, M. (2017). Spectral types of linear q-difference equations and q-analog of middle convolution. International Mathematics Research Notices, 2017(7), 1975-2013.

[9] Takemura, K., Degenerations of Ruijsenaars-van Diejen operator and q-Painlevé equations, J. Integrable Syst. **2**, no. 1, xyx008, 27pp (2017).

[10] Takemura, K., On q-deformations of the Heun Equation, SIGMA **14**, 061, 16 pages (2018).