非可換確率論とランダム行列モデル

北海道大学　大学院理学院　数学専攻
藤江克徳 (Katsunori FUJIE) *

概要

確率論を代数的な枠組みで捉えなおしたとき，自然に定まる独立性の概念は 5 種類のみに限られることがよく知られている．ここで気になるのは—独立な GUE の族が満たす漸近的自由独立性のように，それぞれの独立性に対応する自然なランダム行列モデルが存在するのか—という問題である．本講演ではその一つの具体例として，GUE の摂動モデルを考えた場合，とくに単調独立性の概念が現れ，外れ固有値の解析に応用できることを紹介する．そして，それらの独立性が関係し合う，新たな代数的確率空間の枠組みについて解説する．

1　導入

1980 年代に Voiculescu が自由確率論—代数的確率空間上に自由独立性を定めたもの—を創始して以来，当該分野はランダム行列をはじめとする諸分野との関わりを強めながら発展を続けてきている．現代の測度論に依拠した確率論は標本空間 Ω，σ-加法族 $\mathcal{F}$, 確率測度 $\mathbb{P}$ の三つ組を確率空間として定式化し議論を展開していく．一方，代数的確率空間という異なるアプローチをとることで確率論の既知の結果を（やや弱い形にはなるけれど）再構成することができる．

Definition 1.1. いま $\mathcal{A}$ を $\mathbb{C}$-代数で $1_{\mathcal{A}}$ を単位元に持つものとする．また $\varphi : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ を線型写像で $\varphi(1_{\mathcal{A}}) = 1$ なるものとする．このとき，$(\mathcal{A}, \varphi)$ の組を代数的確率空間（または非可換確率空間）と呼ぶ．

たとえば $\mathcal{A}$ として $L^{\infty-}(\Omega) := \bigcap_{p \geqslant 1} L^p(\Omega)$，$\varphi$ として期待値 $\mathbb{E}[X] := \int_\Omega X(\omega)\mathbb{P}(d\omega)$ $(X \in \mathcal{A})$ を採用することにすれば，これは代数的確率空間の一例となる．すなわち基礎となっている確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ を忘れてしまい，確率変数のなす環と期待値のみを用いて議論を展開していこうという発想が代数的確率空間の出発点である．この文脈で確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ による通常の確率論を，対比のため古典確率論と呼ぶことが多い．たとえば $\varphi(1_{\mathcal{A}}) = 1$ という規約は古典確率論における確率測度の条件 $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ と合致している．さらに $\mathcal{A}$ に $*$-構造を仮定して正値性 $\varphi(a^*a) \geqslant 0$ $(a \in \mathcal{A})$ を要求するのも自然であり，追加して $\mathcal{A}$ に C^* 環であるというような位相的な構造を要求する場合も多いが，紙数の都合のためここで詳細に述べることはしない．興味ある読者は分野への入門的なテキストである [13] などを参照することを勧める．

* E-mail: kfujie@eis.hokudai.ac.jp

Example 1.2. 古典確率論の例 $(L^{\infty-}(\Omega), \mathbb{E})$ の他，たとえば次のようなものを非可換確率空間の例として挙げることができる．

1. 自然数 $N \in \mathbb{N}$ に対して，$\mathrm{M}_N(\mathbb{C})$ を複素数からなる $N \times N$ 行列の全体とし，tr_N を正規化トレース（行列 $A = (a_{ij})_{i,j=1}^N$ について $\mathrm{tr}_N(A) := \sum_{i=1}^N a_{ii}/N$ として定められる）とすると，$(\mathrm{M}_N(\mathbb{C}), \mathrm{tr}_N)$ は代数的確率空間となる．
2. 自然数 $N \in \mathbb{N}$ に対して，$\mathrm{M}_N(L^{\infty-}(\Omega))$ を成分として $L^{\infty-}(\Omega)$ にもつ $N \times N$ 行列の全体とし，$\mathbb{E} \circ \mathrm{tr}_N$ を期待値 $\mathbb{E}$ と正規化トレースの合成とすると，$(\mathrm{M}_N(L^{\infty-}(\Omega)), \mathbb{E} \circ \mathrm{tr}_N)$ は代数的確率空間になる．

さて，代数的確率空間 $(\mathcal{A}, \varphi)$ を用いて確率論を展開したいのだが，その際に問題になるのは独立性をどのように定めるのかということである．古典確率論における通常の独立性に対応する概念は以下のようにして定めることができ，古典独立性あるいは tensor 独立性と呼ばれる．簡単のため以下の定義中では $\mathcal{A}$ を可換と仮定する（一般に定義できるが記法の準備がいるため）．

Definition 1.3 (古典独立性)**.** いま $(\mathcal{X}_i)_{i \in I}$ を $\mathcal{A}$ の部分集合族とし, $\mathcal{X}_i$ から生成される単位的部分代数を $\mathcal{A}_i := \mathrm{alg}(1_\mathcal{A}, \mathcal{X}_i)$ とする．このとき，$(\mathcal{X}_i)_{i \in I}$ が古典独立であるとは，次が成り立つこととして定める．任意の自然数 $n \in \mathbb{N}$, $i_1, \ldots, i_n \in I$ で $i_j \neq i_{j+1}$ $(j = 1, \ldots, n-1)$, $a_j \in \mathcal{A}_{i_j}$ $(j = 1, \ldots, n)$ に対して，

$$\varphi(a_1 \cdots a_n) = \prod_{i \in I} \varphi \left(\prod_{\substack{j=1,\ldots,n \\ i_j = i}} a_j \right).$$

ここで，代数的確率空間 $(\mathcal{A}, \varphi)$ 上に定まる独立性の概念について，次のような公理を与えることができる．以下では簡単のため大雑把に述べる（詳しくは [2, 12] を参照）．いま $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ を $\mathcal{A}$ の部分代数であり，$\mathcal{A}_1 \bigsqcup \mathcal{A}_2$ を $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ から生成される部分代数とする．独立性とは以下の 2 条件を満たし $\varphi|_{\mathcal{A}_1}$ および $\varphi|_{\mathcal{A}_2}$ から $\varphi|_{\mathcal{A}_1 \bigsqcup \mathcal{A}_2}$ を決定する計算規則のことである．

(可換性) 2 つの部分代数 A_1 と A_2 について $\varphi|_{\mathcal{A}_1 \bigsqcup \mathcal{A}_2} = \varphi|_{\mathcal{A}_2 \bigsqcup \mathcal{A}_1}$.
(結合性) 3 つの部分代数 $\{\mathcal{A}_i\}_{i=1}^3$ について，$\varphi|_{(\mathcal{A}_1 \bigsqcup \mathcal{A}_2) \bigsqcup \mathcal{A}_3} = \varphi|_{\mathcal{A}_1 \bigsqcup (\mathcal{A}_2 \bigsqcup \mathcal{A}_3)}$.

興味深いことに，上記の公理を満たす独立性は古典独立性の他には，自由独立性およびブール独立性の 2 つしかないことが知られている．

Definition 1.4 (自由独立性)**.** いま $(\mathcal{X}_i)_{i \in I}$ を $\mathcal{A}$ の部分集合族とし，$\mathcal{X}_i$ から生成される単位的部分代数を $\mathcal{A}_i := \mathrm{alg}(1_\mathcal{A}, \mathcal{X}_i)$ とする．このとき，$(\mathcal{X}_i)_{i \in I}$ が自由独立であるとは，次が成り立つこととして定める．任意の自然数 $n \in \mathbb{N}$，$i_1, \ldots, i_n \in I$，$i_j \neq i_{j+1}$ $(j = 1, \ldots, n-1)$，$a_j \in \mathcal{A}_{i_j}$ かつ $\varphi(a_j) = 0$ $(j = 1, \ldots, n)$ に対して，

$$\varphi(a_1 \cdots a_n) = 0.$$

Definition 1.5 (ブール独立性)**.** いま $(\mathcal{X}_i)_{i \in I}$ を $\mathcal{A}$ の部分集合族とし，$\mathcal{X}_i$ から生成される部分代数を $\mathcal{A}_i := \mathrm{alg}(\mathcal{X}_i)$ とする．このとき，$(\mathcal{X}_i)_{i \in I}$ がブール独立であるとは，次が成り立つこととして定める．任意の自然数 $n \in \mathbb{N}$，$i_1, \ldots, i_n \in I$，$i_j \neq i_{j+1}$ $(j = 1, \ldots, n-1)$，$a_j \in \mathcal{A}_{i_j}$ $(j = 1, \ldots, n)$

に対して，

$$\varphi(a_1\cdots a_n)=\prod_{j=1}^{n}\varphi(a_j).$$

さらに，可換性の条件を外しても独立性は本質的には 1 つしか増えないことが村木によって示された [12]．新しく増えるその独立性を単調独立性と呼ぶ．その定義を簡単に述べるため，以下では $|I|=2$ の場合に限って述べる．

Definition 1.6 (単調独立性)**.** いま $\mathcal{X}_1,\mathcal{X}_2$ を $\mathcal{A}$ の部分集合とする．このとき $\mathcal{X}_1,\mathcal{X}_2$ が単調独立であるとは，次が成り立つこととして定める．任意の自然数 $n\in\mathbb{N}$, $x_1,x_2,\ldots,x_n\in\mathrm{alg}(\mathcal{X}_1)$ および $y_0,y_1,\ldots,y_n\in\mathrm{alg}(1_{\mathcal{A}},\mathcal{X}_i)$ に対して，

$$\varphi(y_0x_1y_1x_2y_2\cdots x_ny_n)=\varphi(x_1x_2\cdots x_n)\varphi(y_0)\varphi(y_1)\cdots\varphi(y_n).$$

なお，$\mathcal{X}_2,\mathcal{X}_1$ が単調独立のとき，$\mathcal{X}_1,\mathcal{X}_2$ は反単調独立であると呼ぶ．

これまで述べてきた，代数的確率空間上に定まる 3 つないし 5 つの独立性はそれぞれ特徴があり，非可換確率論としてさまざまな性質が調べられている．たとえば独立な 2 つの非可換確率変数 a,b の和 $a+b$ が与える分布（ここでモーメントと同一視していることに注意）として畳み込み演算が定められ，対応するそれぞれの大数の法則や中心極限定理，および正規分布が存在する．

とくに自由独立性は非可換確率論の先駆けとして現れた概念であり，ランダム行列との関係が深いことから最も興味が持たれ，よく研究されている．その関わりを非常に大雑把に述べると，多くの場合で独立なランダム行列のモデルは次数を上げていった際に漸近的に自由独立性を満たすことが知られている（この性質は漸近自由独立性と呼ばれる）．

なお，$(\mathcal{A},\varphi)$ において定まるある意味自然な独立性の概念は 5 種類に限られることを述べたが，代数について条件を変えると異なる独立性を定められることが知られている．多くの独立性が知られているが，ここでとくに注目したいのは，組み合わせ論的な観点から Biane, Goodman, Nica らによって定義された type B 非可換確率空間である．

Definition 1.7 (Definition in Section 6.1 of [5])**.** Type B 非可換確率空間とは $(\mathcal{A},\varphi,\mathcal{V},f)$ の 4 つ組のことである．ここで

1. $(\mathcal{A},\varphi)$ は代数的確率空間.
2. $\mathcal{V}$ は両側 $\mathcal{A}$-加群であって $f\colon\mathcal{V}\to\mathbb{C}$ は $\mathbb{C}$-線型写像.

後に type B 非可換確率空間は無限小非可換確率空間として統一的に扱えることがわかった [8]．自由確率論はランダム行列理論へ漸近的自由独立性の概念を通して，よく応用されていることを述べたが，Type B 非可換確率空間は Shlyakhtenko によって，BBP phase transition と呼ばれるランダム行列の摂動問題へ応用できることが示唆された [1, 14]．なお，BBP phase transition そのものは free subordination function のような自由確率論の技術を用いてかなり一般の場合で解決されている [4]．しかし，それはかなり高度な解析的アプローチであり，素朴なモーメントを用いた方法ではなかった．2018 年に Collins，長谷部，佐久間らは非正規化トレースを合わせて考えると，GUE のような自然なランダム行列と有限次元行列との間に，単調独立性に類似した計算規則が漸近的に成り立つことを指摘した [7]．以下では，それを抽象化し，整理した最新の形で定義を述べる．

Definition 1.8 (Definition 2.1 of [10]). (i) いま $\mathcal{F}$ を $\mathbb{C}$-代数で $\Phi\colon \mathcal{F} \to \mathbb{C}$ を線形写像とする．このとき $(\mathcal{F}, \Phi)$ を非可換測度空間と呼ぶ．

(ii) いま $(\mathcal{A}, \varphi)$ を非可換確率空間，$(\mathcal{F}, \Phi)$ を非可換測度空間とし $\mathcal{F}$ を $\mathcal{A}$-代数であると仮定する．このとき 4 つ組を $(\mathcal{A}, \varphi, \mathcal{F}, \Phi)$ を type B$'$ 非可換確率空間と呼ぶ．

Definition 1.9 (Definition 2.4 of [10]). いま $(\mathcal{A}, \varphi, \mathcal{F}, \Phi)$ を type B$'$ 非可換確率空間とし，$\mathcal{A}_1$ を $\mathcal{A}$ の部分代数，$\mathcal{F}_1$ を $\mathcal{F}$ の部分代数とする．このとき $(\mathcal{A}_1, \mathcal{F}_1)$ が巡回的反単調独立であるとは，次が成り立つことをいう．任意の $n \in \mathbb{N}$, $a_0, \ldots, a_n \in \mathcal{A}_1$, $f_1, \ldots, f_n \in \mathcal{F}_1$. に対して

$$\Phi(a_0 f_1 a_1 f_2 \cdots a_{n-1} f_n a_n) = \varphi(a_0 a_n) \left[\prod_{1 \leqslant i \leqslant n-1} \varphi(a_i) \right] \Phi(f_1 f_2 \cdots f_n).$$

なお 2022 年に Cébron–Dahlqvist–Gabriel らはこれをさらに推し進め，巡回的反単調独立性から単調独立性が導かれることを指摘し，さらに摂動によって生じる外れ固有値の位置をモーメント法を用いて決定できることを示している [6].

2 主定理

私と長谷部は Biane–Goodman–Nica によって定められていた type B 非可換確率空間の定義を修正することによって，新しく type B$'$ 非可換確率空間というものを定めた（上記の定義 1.8）．これはランダム行列モデルを構成し，BBP phase transition への応用を考えたとき，積構造も合わせて考えるべきであるという自然な要請から定まるものである．実際，type B$'$ 非可換確率空間はランダム行列の摂動モデルの自然な抽象化とみなすことができる．さらに私たちは type B$'$ 非可換確率空間上に，自明な独立性，弱い type B$'$ 独立性という定義を与え，GUE や有限次元行列のクラスが漸近的にそれらの独立性を満たすことを示した [10, Theorem 2.15, 2.18]．これらは大雑把に述べると，上で述べた自由独立性と巡回的反単調独立性を合わせて考えた際に定まる独立性である．つづいて，弱い type B$'$ 独立性のもとでは自明な独立性と無限小独立性 [8] が同値となることを示した [10, Theorem 4.1]．この類似として，弱い type B$'$ 独立性のもとでベクトル状態にあたる適切な線型汎函数を定めると，ブール独立性と条件付き自由独立性 [3] が同値となることを示した [10, Theorem 5.1].

非常に興味深いのは，type B$'$ 非可換確率空間という枠組みを用いることで自由独立性を除いた独立性に対して，ある意味自然な形で漸近的なランダム行列モデルを構成できた点である．しかも，これまで別個に提案され，研究されていたさまざまな独立性の概念が，それぞれ関係し合う形で現れている．

私たちは一つの応用例として，GUE のようなユニタリ不変性を持つランダム行列の系列について，その主小行列の固有値の解析をこの枠組みを用いることで行えることを示した [10, Theorem 6.1]. なお，この結果は私たちの以前の成果である [9, Theorem 1.3] を拡張したものになっている．

参考文献

[1] J. Baik, G. Ben Arous and S. Péché, Phase transition of the largest eigenvalue for nonnull complex sample covariance matrices, Ann. Probab. 33 (2005), 1643–1697.

[2] A. Ben Ghorbal and M. Schürmann, Non-commutative notions of stochastic independence, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 133 (2002), 531–561.

[3] M. Bożejko, M. Leinert and R. Speicher, Convolution and limit theorems for conditionally free random variables, Pacific J. Math. 175 (1996), no. 2, 357–388.

[4] S. T. Belinschi, H. Bercovici, M. Capitaine, and M. Février, Outliers in the spectrum of large deformed unitarily invariant models. Ann. Probab. 45 (2017), 3571–3625.

[5] P. Biane, F. Goodman, and A. Nica, Non-crossing cumulants of type B, Trans. Amer. Math. Soc. 355 (2003), no. 6, 2263–2303.

[6] G. Cébron, A. Dahlqvist, and F. Gabriel, Freeness of type B and conditional freeness for random matrices. arXiv:2205.01926

[7] B. Collins, T. Hasebe, and N. Sakuma, Free probability for purely discrete eigenvalues of random matrices, J. Math. Soc. Japan 70 (2018), no. 3, 1111–1150.

[8] M. Février and A. Nica, Infinitesimal non-crossing cumulants and free probability of type B, J. Funct. Anal. 258 (2010), no. 9, 2983–3023.

[9] K. Fujie and T. Hasebe, The spectra of principal submatrices in rotationally invariant Hermitian random matrices and the Markov-Krein correspondence, ALEA Lat. Am. J. Probab. Math. Stat. 19 (2022), no. 1, 109–123.

[10] K. Fujie, T. Hasebe, Type B prime free probability, arXiv: 2310.14582.

[11] N. Muraki, Monotonic convolution and monotonic Lévy-Hinčin formula, preprint, 2000.

[12] N. Muraki, The five independences as natural products, Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top. 6 (2003), no. 2, 337–371.

[13] A. Nica and R. Speicher, Lectures on the combinatorics of free probability, London Mathematical Society Lecture Note Series, 335. Cambridge University Press, Cambridge, 2006.

[14] D. Shlyakhtenko, Free probability of type-B and asymptotics of finite-rank perturbations of random matrices, Indiana Univ. Math. J. 67 (2018), no. 2, 971–991.