Bounded cohomology and Amenability

東京大学大学院　数理科学研究科　数理科学専攻
粟津光 (Hikaru AWAZU) *

概要

群が amenable であるとは、左移動不変な群上の mean を持つことであり、平たくいうと可換群に近い、解析的な扱いがしやすいという性質のことである。Amenability は数学の様々な分野に関連する膨大な特徴づけを持つが、本講演では群の cohomology (の変種) による特徴づけに注目する。この特徴づけは位相空間への群作用、Banach 環などの他の数学的対象の amenability や、relative amenability などへも適切に拡張されてきた。これらを概観し、講演者の研究との関連性を述べる。

1　導入; 離散群の amenability

以下では断りのない限り、線型空間の係数体は $\mathbb{R}$ とし、Banach 空間 V に対して V^* を V 上の $\mathbb{R}$-値有界線型汎函数と書く。

また、$\mathbb{B}(V)$ を V から V への有界線形写像全体のなす Banach 環とする。

amenable(従順) という離散群のクラスは、1920 年代に von Neumann が導入して以来、広範かつ扱いやすいクラスとして研究されてきた。離散群の amenability の特徴づけは無数に存在するが、よく知られているのは次の定義である；

Definition 1.

離散群 G が **amenable** $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\exists m \in (\ell^\infty(G))^*$ s.t.

1. $\forall g \in G; \quad m = g.m$
2. $m(1_G) = 1$
3. $\forall f \geq 0 \in \ell^\infty(G); \quad m(f) \geq 0.$
   ただし、$g \in G$ と $f \in \ell^\infty(G)$ に対して、$g.m(f) := m(g^{-1}.f)$ と定める。

つまり、amenable な群というのは、群の元で左移動不変な、有限加法的正測度を持つことである。

このため、amenable な群では大体、「群の部分集合の良い平均を取って、解析的な議論ができる」と言える。

* E-mail:a-hikaru@g.ecc.u-tokyo.ac.jp

amenable な群全体のクラスは、有限群、可換群を含む。

さらに部分群を取る操作、quotient を取る操作、群の拡大を取る操作などで amenability は保たれるため、可解群などを含む広範なクラスである。

群が amenable であると様々な数学的側面から解析しやすいため、しばしば構造の強い一意性が現れる。例えば確率測度空間への群作用のある種の一意性を述べる次の定理が知られている。

Theorem. (Weiss, Ornstein, Connes, Schmidt; [1] [2])
離散群 G が有限群でないとき、次が同値；

1. G は amenable
2. 任意の standard な確率測度空間 (X, μ) 上の G 作用 α ;$G \curvearrowright X$ について
   α が測度を保ち、自由で ergodic な作用 なら、
   α と、 $\mathbb{Z}$ の無理数回転作用 $\mathbb{Z} \curvearrowright \mathbb{T}$ は軌道同値な作用となる。

他にも、作用素環論に関連した良い性質と同値になることが知られている；
一般に離散群 G から reduced C*-環と呼ばれる作用素環 $C_r^*(G)$ を作ることができるが、
このとき、G が amenable $\Longleftrightarrow$ $C_r^*(G)$ が nuclear であることが知られている [3]。
C*-環の nuclear という性質は、C*-環のテンソル積の一意性で定義される性質で、
ここでも群の amenability が構造を一意に決めてしまう。

また amenable な群であれば、$\mathbb{Z}$ 上で展開できる、集合の密度や大きさに関する組み合わせ論的な議論がある程度移植できることが知られている;

Theorem. (Beiglboeck, Bergelson, Fish, Nasso, Lupini ;[4])
G を 離散 amenable 群とする。
$A, B \subset G$ が 0 でない Banach 密度を持つならば、
$AB = \{ab \in G \mid a \in A, b \in B\}$ は piecewise-syndetic となる。

群の部分集合が piecewise-syndetic であることはここでは定義しないが、全ての G の有限集合を弱い意味で含むというような性質であり、$\mathbb{Z}$ 上では、特に「任意の項数の等差数列を含む」という性質を導く。

2 群の Bounded cohomology を用いた amenability の特徴づけ

群の cohomology の定義を少しだけ変形した、bounded cohomology の言葉を使って、
amenable 群が特徴づけられることが知られている。

離散群 G の通常の cohomology を、ここでは homogeneous cochain を用いて定義する。
つまり、 G-加群 M に対して、
$C^n(G; M) := \{\phi : G^{n+1} \to M \mid g.\phi(g_0, \dots, g_n) = \phi(gg_0, \dots, gg_n)\ \forall g, g_0, \dots, g_n \in G\}$ とし、

微分写像 $d^n : C^n(G;M) \to C^{n+1}(G;M)$ を

$$d_n\phi(g_0,\ldots,g_{n+1}) := \sum_{i=0,\ldots,n+1} (-1)^i \phi(g_0,\ldots,\widehat{g_i},\ldots,g_{n+1})$$

で定め、これによって cohomology 群 $H^n(G;M)$ を定義する。

いま、M が Banach 空間の構造を持ち、G の作用が等長であるときを考える。

これを **Banach G-module** と呼ぶ。このとき、 $C^n(G;M)$ の元を bounded なものに限定して、cohomology 群を定義することができる；

Definition 2.

$$C_b^n(G;M) := \{\phi \in C^n(G;M) | \sup_{\boldsymbol{g} \in G^{n+1}} ||\phi(\boldsymbol{g})||_M \quad < \infty\}$$

とすると、$d^n(C_b^n(G;M)) \subset C_b^{n+1}(G;M)$ なので、M-係数の **bounded cohomology** を

$$H_b^n(G;M) := \frac{\mathrm{ker} d^n \cap C_b^n(G;M)}{d^{n-1}(C_b^{n-1}(G;M))}$$

で定めることができる。

Banach G-module の例をいくつか示す。

- $\ell^\infty(G)$ は $g.f = f(g^{-1}\cdot)$ という自然な作用で Banach G-module となる。
- $\mathbb{R} \hookrightarrow \ell^\infty(G)$ を $\lambda \mapsto \lambda 1_G$ で定めると、
  関数の定数差分を同一視した空間 $\ell^\infty(G)/\mathbb{R}$ が得られ、これも Banach G-module となる。
- また、V; Banach G-module に対して、V^* もまた上と同様の自然な作用を持ち、Banach G-module となる。

すると、ホモロジー代数的な議論で次が示される。

Theorem 1. ([5])

離散群 G について、次は同値;

1. G は amenable
2. $H_b^1(G;(\ell^\infty(G)/\mathbb{R})^*) = 0$
3. $\forall V$; Banach G-module と $\forall n \geq 1$ について $H_b^n(G;V^*) = 0$
4. $\forall V$; Banach G-module について $H_b^1(G;V^*) = 0$

3 他の数学的対象の amenability と bounded cohomology

群の amenability は強力な道具であることがわかったが、群以外の数学的対象に対しても Definition 1. を模倣する形で amenability が定義され、多くについて bounded cohomology を用いた特徴づけが得られている;

- 群の公理を一部緩和した対象である 半群や 離散 groupoid
- locally compact で Hausdorff な位相群 (以下、lc 群とかく)
- 測度空間への群作用や、これを拡張した measured-groupoid
- 位相空間への群作用や、これを拡張した topological-groupoid
- 作用素環への群作用
- Banach 環 に対しては次で定義される;

  Definition 3. A が **amenable Banach 環** であるとは、次を満たすことをいう;
  $\forall E$; A-A-Banach-bimodule と $\forall D : A \to E^*$; bounded linear map に対し、
  D が derivation、つまり $\forall a, b \in A$; $D(ab) = a.D(b) + D(a).b$ を満たすなら、
  D は inner、つまり $\exists \phi \in E^*$ s.t. $D(a) = a.\phi - \phi.a$ となる。

  定義の見た目は Definition 1. とはかなり異なるが、Hochschild cohomology の bounded 版を考えることで、群と似た形で特徴づけることができる。[6]

- 離散群と部分群の組 $H \leq G$ に対する relative-amenability
  lc 群や Banach 環に対しても、このような relative-amenability は考えられている。
- 有限生成群は、生成系を固定してケイリーグラフを考えることで距離空間とみなすことができるが、一般の距離空間に対しても amenability のある意味での類似物と言える property (A) が定義されている。

これら様々な対象の amenability の間には、密接な関係が存在する。例えば次が成り立つ。

Theorem 2. ([6])
$\mathcal{G}$; lc 群に対して、Haar 測度を μ とかく。
すると、Banach 空間 $L^1(\mathcal{G}, \mu)$ は、 convolution 積によって Banach 環の構造を持つ。
このもとで、以下が同値。

1. **$\mathcal{G}$ が lc 群として amenable**
2. $L^1(\mathcal{G}, \mu)$ が Banach 環として amenable

4 位相空間への群作用への amenability の bounded cohomology による特徴づけ

以下では、 講演者の研究について解説するため、compact 空間への離散群の作用の amenaility と、群の bounded cohomology による特徴づけを示した Brodzki, Niblo, Nowak, Wright の論文 [7] を手短に説明する。

以下、X を compact Hausdorff な位相空間、G を離散群とし、
群作用 $\alpha : G \curvearrowright X$ とは、群準同型 $\alpha ; G \to$Homeo(X) のこととする。

また、$Prob(G) \subset \ell^1(G)$ を G 上の確率測度全体とし、ℓ^1-norm $||\cdot||_1$ と、自然な G-作用を入れる。

X 上の連続関数環 $C(X)$ には関数の sup を取ることで norm $||\cdot||_\infty$ を入れ、自然な G-作用 $g.f(x) := f(g^{-1}.x)$ を入れる。

すると、次で位相空間への作用の amenability が定義される。

Definition 4.

$\alpha : G \curvearrowright X$ **が amenable** $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\exists (m_i; X \to Prob(G)\,; \text{continuous map})_{i \in I}$

$$s.t. \quad \forall g \in G;\ \lim_{i \in I} \|g.(m_i(x)) - m_i(\alpha_g(x))\|_1 = 0$$

ただし、I は 適当な directed set

要するに、X から $Prob(G)$ への射で、大体 G-equivariant なものが存在するという条件である。
G が amenable 群である場合、任意の G 作用は amenable となる。

次に、位相空間への群作用と整合した Banach G-module はどうあるべきかを考える；

Definition 5.

Banach G-module $\mathcal{E}$ と β; $C(X) \to \mathbb{B}(\mathcal{E})$ contractive, unital な環準同型 の組 $(\mathcal{E}, \beta)$ が、(α に対する) **Banach G-$C(X)$-module** とは、次を満たすことをいう；

1. (G-作用と $C(X)$-作用は associative)

$$g.(\beta(f)(e)) \ = \ \beta(g.f)(e) \quad \forall f \in C(X), e \in \mathcal{E}, g \in G$$

2. (G-作用と $C(X)$-作用は可換)

$$g.(\beta(f)(e)) \ = \ \beta(f)(g.e) \quad \forall f \in C(X), e \in \mathcal{E}, g \in G$$

以下では β は適宜略記する。
$\mathcal{E}$ が Banach G-$C(X)$-module のとき、$\mathcal{E}^*$ も自然に Banach G-$C(X)$-module の構造を持つ。
すると、特別な Banach G-$C(X)$-module $N_0(G, X)$ が構成でき、次が成立する。

Theorem 3. ([7]) 上の状況で、以下が同値；

1. $\alpha; G \curvearrowright X$ が amenable
2. $H_b^1(G; N_0(G, X)^{**}) = 0$
3. $\mathcal{E}$; Banach G-$C(X)$-module が ℓ^1-geometric という条件を満たせば、
   $H_b^1(G; \mathcal{E}^*) = 0$
4. $\forall \mathcal{E}$; ℓ^1-geometric Banach G-$C(X)$-module と $\forall n \geq 1$ について
   $H_b^n(G; \mathcal{E}^*) = 0$

ℓ^1-geometric という条件の定義は述べないが、次の定理が成立し、これを定義だと思って良い；

Theorem 4. $\mathcal{E}$ が ℓ^1-geometric な Banach G-$C(X)$-module のとき、

$\forall N \in \mathbb{N}$, $\forall f_1, \dots f_N \in C(X)$, $\forall \phi_1, \dots \phi_N \in \mathcal{E}^*$ に対し、

$$\left\| \sum_{i=1,\dots,N} f_i \cdot \phi_i \right\|_{\mathcal{E}^*} \leq 2 \left\| \sum_{i=1,\dots,N} |f_i| \right\|_{\infty} \left(\sup_{i=1,\dots,N} \|\phi_i\|_{\mathcal{E}^*} \right)$$

が成立。実質的に $\mathcal{E}^*$ の性質であることに注意する。

5 講演者の研究

講演者は、$N_0(G,X)$ にも、位相群 $\mathcal{G}$ での $L^1(\mathcal{G},\mu)$ と同様に、convolution 積が存在し、 Banach 環の構造をなすことを示した。

それゆえ、群作用の場合も群の場合の Theorem 2 と同様に、$\alpha; G \curvearrowright X$ の amenability も、$N_0(G,X)$ の Banach 環としての amenability によって特徴づけられるのではないかと期待される。

講演者は、Dong, Wang による、amenable action の 固定点性質に関する特徴づけ [8] を用いて、この予想を証明することを試みている。

参考文献

[1] D. S. Ornstein, B. Weiss : Ergodic theory of amenable group actions. I. The Rohlin lemma, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **2**(1), 161-164 (1980)

[2] A. Connes, B. Weiss : Property T and asymptotically invariant sequences, Israel Journal of Mathematics, **37**, 209–210. (1980)

[3] N. P. Brown, N. Ozawa : C*-Algebras and Finite Dimensional Approximations, Amer. Math. (2008)

[4] M. D. Nasso, M.Lupini : Nonstandard Analysis and the sumset phenomenon in arbitrary amenable groups, Illinois Journal of Mathematics, **58**, 11–25 (1992), arXiv:1904.10062v2

[5] R. Frigerio : Bounded Cohomology of Discrete Groups, Amer. Math. (2016), arXiv:1610.08339

[6] V. Runde : Amenable Banach Algebras :A Panorama, Springer Monographs in Mathematics. (2020)

[7] J. Brodzki, G. A. Niblo, P. Nowak, N. Wright : Amenable actions, invariant means and bounded cohomology, J. Top. Anal. **4**(3), 321–334 (2012), arXiv:2211.04223

[8] Z. Dong, Y. Y. Wang : Fixed point characterisation for exact and amenable action, Bull. Aust. Math. Soc. **92**, 228-232 (2015)