

# 有限生成体の無限次代数拡大体上の Mordell–Weil 群の構造

東京工業大学 理学院 数学系 数学コース  
浅山拓哉 (Takuya ASAYAMA) \*

## 概要

$K$  を有理数体  $\mathbb{Q}$  上の有限生成体とする.  $K$  の絶対 Galois 群  $G_K$  の元の  $e$  個組  $\sigma \in G_K^e$  に対し  $\overline{K}(\sigma)$  を  $K$  の代数閉包  $\overline{K}$  における  $\sigma$  の固定体,  $\overline{K}[\sigma]$  を  $\overline{K}(\sigma)/K$  の最大 Galois 部分拡大とする. 本稿では  $\overline{K}[\sigma]$  上の準アーベル多様体  $A$  の Mordell–Weil 群  $A(\overline{K}[\sigma])$  の構造について得られた結果を述べる. また,  $\overline{K}(\sigma)$  および  $\overline{K}[\sigma]$  の Kummer 忠実性に関する大溪の結果の拡張についても紹介する.

## 1 導入

体  $K$  上のアーベル多様体  $A$  に対し, その  $K$  有理点全体がなすアーベル群  $A(K)$  を **Mordell–Weil 群** とよぶ. 群  $A(K)$  の構造を決定することは数論における重要な問題であり, 多くの先行研究がある. 群  $A(K)$  の構造について, 次の定理は基本的である.

**定理 1.1** (Mordell–Weil の定理).  $K$  を素体上の有限生成体とする.  $K$  上のアーベル多様体  $A$  に対し, その Mordell–Weil 群  $A(K)$  は有限生成である. とくに,  $A(K)$  の階数は有限であり,  $A(K)$  の捩れ点全体がなす群  $A(K)_{\text{tor}}$  は有限である.

では,  $K$  が素体上無限生成であるとき, 群  $A(K)$  の構造はどうなるだろうか. まず, 無限生成体のもっとも極端な例である代数閉体については次の結果がある. ただし, 体  $K$  が有限体の代数拡大のとき  $A(K)$  は捩れ群になり階数は零となるから定理ではその場合を除いている.

**定理 1.2** (Serre, Frey–Jarden [2, Theorem 10.1]).  $K$  を有限体の代数閉包ではない代数閉体とする.  $K$  上の次元正の任意のアーベル多様体  $A$  に対し, Mordell–Weil 群  $A(K)$  の階数は  $K$  の濃度に等しい.

次に, 代数閉体よりも少し小さな無限生成体を考えよう. そのために, いくつかの記号と概念を導入する.

$K$  を素体上の有限生成体とし, その代数閉包  $\overline{K}$  を固定しておく.  $K$  の絶対 Galois 群を  $G_K$  とかき,  $G_K$  の各元を  $\overline{K}$  の自己同型に一意に延長する.  $e$  を正の整数とする.  $G_K$  の元の  $e$  個組

---

\* E-mail: asayama.t.aa@m.titech.ac.jp

$\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_e) \in G_K^e$  に対し, 体  $\overline{K}(\sigma)$  を  $\overline{K}$  における  $\sigma$  の固定体とする. すなわち

$$\overline{K}(\sigma) = \{x \in \overline{K} \mid \text{任意の } 1 \leq i \leq e \text{ について } \sigma_i x = x\}.$$

さらに体  $\overline{K}[\sigma]$  を体拡大  $\overline{K}(\sigma)/K$  の最大 Galois 部分拡大とする.

$G_K$  は Krull 位相によりコンパクト位相群となり, その上に確率測度  $\mu$  で次を満たすものが一意に定まる (cf. [3, Proposition 18.2.1]).

- (1) (両側不変性)  $G_K$  の任意の可測集合  $B$  および任意の  $\sigma \in G_K$  に対し,  $\mu(\sigma B) = \mu(B\sigma) = \mu(B)$ .
- (2) (正則性)  $G_K$  の任意の可測集合  $B$  および任意の  $\varepsilon > 0$  に対し,  $G_K$  の開集合  $U$  および閉集合  $C$  であって,  $C \subseteq B \subseteq U$  かつ  $\mu(U \setminus C) < \varepsilon$  を満たすものが存在する.

この  $\mu$  を  $G_K$  の (正規化された) Haar 測度とよぶ.  $G_K^e$  にも同様に位相および Haar 測度 (これも  $\mu$  とかく) を入れる. 「ほとんどすべての  $\sigma \in G_K^e$ 」と書いたら, 「 $G_K^e$  のある測度零集合を除いたすべての  $\sigma \in G_K^e$ 」を意味する.

本稿では, 体  $K$  が有理数体  $\mathbb{Q}$  上の有限生成体であるときに,  $\overline{K}(\sigma)$  や  $\overline{K}[\sigma]$  上の準アーベル多様体 (アーベル多様体の代数的トラスによる拡大) の Mordell-Weil 群について, 構造をより詳細に調べる. 結果を述べる前に, Kummer 忠実の概念を定義しておこう.

完全体  $K$  が **Kummer 忠実** であるとは,  $K$  が条件「 $K$  の任意の有限次拡大  $L$  および  $L$  上の任意の準アーベル多様体  $A$  に対し,  $A(L)_{\text{div}} = 0$  が成り立つ」を満たすことをいう. ここで, アーベル群  $X$  に対し,  $X_{\text{div}} = \bigcap_{n \geq 1} nX$  ( $n$  は正の整数全体を互る) と定義する. 望月 [12, Definition 1.5] により導入された Kummer 忠実体は遠アーベル幾何学に由来をもつ体である. 遠アーベル幾何学は, 代数多様体やそれに関連する幾何学的対象をその代数的基本群から再構成する方法を記述することを目的とする数論幾何学の一分野である. 遠アーベル幾何学における代数多様体の基礎体としては素体上の有限生成体が想定されてきたが, 実際には遥かに多くの体が遠アーベル幾何学の基礎体に適していることが近年の研究によりわかってきた. ここで「どのような体が遠アーベル幾何学の基礎体に適しているか」という自然な問いが生じる. Kummer 忠実体は遠アーベル幾何学の基礎体として適切であろうと考えられており, どのような体が Kummer 忠実であるか調べることは遠アーベル幾何学の観点からも有意義である.

本稿における主定理を述べる.

**定理 1.3.**  $K$  を  $\mathbb{Q}$  上の有限生成体,  $e$  を正の整数とする.

- (1)  $e \geq 2$  とする. ほとんどすべての  $\sigma \in G_K^e$  に対し, 次が成り立つ:  $\overline{K}[\sigma]$  の任意の有限次拡大  $L$  および  $L$  上の任意の準アーベル多様体  $A$  に対し, 群  $A(L)/A(L)_{\text{tor}}$  は階数可算の自由  $\mathbb{Z}$  加群である.
- (2)  $e \geq 2$  とする. ほとんどすべての  $\sigma \in G_K^e$  に対し, 体  $\overline{K}(\sigma)$  は Kummer 忠実である.
- (3) ほとんどすべての  $\sigma \in G_K^e$  に対し, 体  $\overline{K}[\sigma]$  は Kummer 忠実である.

**注意 1.4.**  $K$  を  $\mathbb{Q}$  上の有限生成体,  $e$  を正の整数とする.  $\overline{K}(\sigma)$  と  $\overline{K}[\sigma]$  は次の意味で異なる体である: ほとんどすべての  $\sigma \in G_K^e$  に対し,  $\overline{K}(\sigma)/\overline{K}[\sigma]$  は無限次拡大である. さらに, ほとんどすべての  $\sigma \in G_K^e$  に対し,  $\overline{K}(\sigma)/K$  は Galois 拡大ではない. 実はより強く, 次が成り立つことが知られて

いる [1, Theorems 7.9 and 7.10]: ほとんどすべての  $\sigma \in G_K^e$  に対し,  $\overline{K}(\sigma)$  を有限次拡大または Galois 拡大にもつ  $\overline{K}(\sigma)$  の真の部分体は存在しない.

## 2 先行研究

$\overline{K}(\sigma)$  や  $\overline{K}[\sigma]$  上の準アーベル多様体の Mordell–Weil 群について知られている事実を要約する. ここで, アーベル群  $X$  と正の整数  $n$  に対し  $X$  の  $n$  捩れ部分群を  $X[n]$ , 素数  $l$  に対し  $X$  の  $l$  冪捩れ部分群を  $X[l^\infty] = \bigcup_{n \geq 1} X[l^n]$  とかく.

**定理 2.1.**  $K$  を素体上の有限生成体,  $e$  を正の整数とする.

- (1) (Geyer–Jarden [5, Theorem 2.4] (resp. Frey–Jarden [2, Theorem 9.1]))  $K$  は無限体であるとする. ほとんどすべての  $\sigma \in G_K^e$  および  $\overline{K}[\sigma]$  (resp.  $\overline{K}(\sigma)$ ) 上の次元正の任意のアーベル多様体  $A$  に対し, 群  $A(\overline{K}[\sigma])$  (resp.  $A(\overline{K}(\sigma))$ ) の階数は可算である.
- (2) (Jarden [9, Theorems 8.1 and 8.2]) 正の整数  $n$  に対し,  $\zeta_n$  を  $\overline{K}$  における 1 の原始  $n$  乗根とする.
  - (2-i) ほとんどすべての  $\sigma \in G_K$  および任意の正の整数  $d$  に対し,  $[\overline{K}(\sigma)(\zeta_l) : \overline{K}(\sigma)] = d$  となる素数  $d$  が無限個存在する. とくに, ほとんどすべての  $\sigma \in G_K$  および任意の  $\overline{K}(\sigma)$  の有限次拡大  $M$  に対し,  $M$  は 1 の冪根を無限個含む一方,  $\zeta_l \notin M$  となる素数  $l$  が存在する.
  - (2-ii)  $e \geq 2$  とする. ほとんどすべての  $\sigma \in G_K^e$  および任意の正の整数  $d$  に対し,  $[\overline{K}(\sigma)(\zeta_n) : \overline{K}(\sigma)] \leq d$  となる  $K$  の標数で割れない正の整数  $n$  は有限個である. とくに, ほとんどすべての  $\sigma \in G_K^e$  および任意の  $\overline{K}(\sigma)$  の有限次拡大  $M$  に対し,  $M$  に含まれる 1 の冪根は有限個である.
- (3)  $K$  に関する次の主張を考える.
  - (a) ほとんどすべての  $\sigma \in G_K$  および  $\overline{K}(\sigma)$  上の次元正の任意のアーベル多様体  $A$  に対し,  $A(\overline{K}(\sigma))$  の捩れ部分群  $A(\overline{K}(\sigma))_{\text{tor}}$  は無限群である. さらに,  $A(\overline{K}(\sigma))[l] \neq 0$  となる素数  $l$  が無限個存在する.
  - (b)  $e \geq 2$  とする. ほとんどすべての  $\sigma \in G_K^e$  および  $\overline{K}(\sigma)$  上の任意のアーベル多様体  $A$  に対し,  $A(\overline{K}(\sigma))$  の捩れ部分群  $A(\overline{K}(\sigma))_{\text{tor}}$  は有限群である.
  - (c) ほとんどすべての  $\sigma \in G_K^e$ ,  $\overline{K}(\sigma)$  上の任意のアーベル多様体  $A$ , および任意の素数  $l$  に対し,  $A(\overline{K}(\sigma))$  の  $l$  冪捩れ部分群  $A(\overline{K}(\sigma))[l^\infty]$  は有限群である.

次のとき, 主張が成り立つ.

- (3-i) (Geyer–Jarden [4, Theorem 1.1]) 各主張における「(次元正の) 任意のアーベル多様体」を「任意の楕円曲線<sup>\*1</sup>」に置き換える. このとき, 任意の  $K$  に対して主張 (a)–(c) が成り立つ.
- (3-ii) (Jacobson–Jarden [6, Proposition 4.2])  $K$  が有限体ならば主張 (a)–(c) が成り立つ.
- (3-iii) (Jacobson–Jarden [8, Main Theorem (b), (a)]) ((b) および (c)), Zywina [17, Theo-

<sup>\*1</sup> 楕円曲線とは 1 次元のアーベル多様体のことをいう.

rem 1.1] ( $K$  が代数体の場合の (a)), Jarden–Petersen [10, Theorem C] (一般の場合の (a)))  $K$  の標数が 0 ならば主張 (a)–(c) が成り立つ.

(3-iv) (Jacobson–Jarden [8, Main Theorem (a)]) 任意の  $K$  に対して主張 (c) が成り立つ.

(4) (Jarden–Petersen [11, Theorem 1.3 (ii)])  $K$  は標数 0 とし  $e \geq 2$  とする. ほとんどすべての  $\sigma \in G_K^e$ ,  $\overline{K}(\sigma)$  の任意の有限次拡大  $M$ , および  $M$  上の任意のアーベル多様体  $A$  に対し,  $A(M)_{\text{div}} = 0$  が成り立つ.

Geyer–Jarden [4] はこの定理の (3) の主張 (a)–(c) が任意の素体上の有限生成体  $K$  に対して成り立つと予想した. Jacobson–Jarden の論文 [6] には  $K$  が正標数のときの主張 (a) の証明があるが, 誤りを含む [7]. 定理で述べられていない場合 ( $K$  が正標数の無限体のときの (a) および (b)) については未解決である.

$\overline{K}[\sigma]$  の Kummer 忠実性については次の結果が知られている.

**定理 2.2** (大溪 [14, Corollary 1], 訂正論文 [15, Corollary 1] も参照).  $K$  を代数体,  $e \geq 2$  とする. ほとんどすべての  $\sigma \in G_K^e$  に対し, 体  $\overline{K}[\sigma]$  は Kummer 忠実である.

本稿の主定理 (定理 1.3) はこの大溪の結果の拡張を含む.

### 3 Mordell–Weil 群の torsion-free part の自由性

この節では, 定理 1.3 (1) の証明を行う. 鍵となるのは次に紹介する Moon の結果である. Moon はこの結果を  $K$  が代数体で  $A$  がアーベル多様体のときにのみ示しているが, まったく同じ証明からより一般の状況で成り立つ.

**命題 3.1** (Moon [13, Proposition 7]).  $K$  を濃度可算の体,  $A$  を  $K$  上の準アーベル多様体とする.  $L$  を  $K$  の Galois 拡大で, 群  $A(L)_{\text{tor}}$  が有限であるものとする. このとき, 群  $A(L)/A(L)_{\text{tor}}$  は階数高々可算の自由  $\mathbb{Z}$  加群である.

定理 1.3 (1) の証明. まず, 群  $A(L)/A(L)_{\text{tor}}$  が自由  $\mathbb{Z}$  加群であることを示す.  $\sigma \in G_K^e$  を次の条件を満たすようにとる:  $\overline{K}(\sigma)$  の任意の有限次拡大  $M$  に対し,  $M$  に含まれる 1 の冪根は有限個であって,  $M$  上の任意のアーベル多様体  $B$  に対し, 群  $B(M)_{\text{tor}}$  は有限である. 定理 2.1 (2-ii) および (3-iii) より, ほとんどすべての  $\sigma \in G_K^e$  はこの条件を満たすことがわかる.  $L$  を  $\overline{K}[\sigma]$  の有限次拡大とし,  $M = L \cdot \overline{K}(\sigma)$  とおく.  $A$  を  $L$  上の準アーベル多様体とすると,  $A$  はアーベル多様体  $B$  のトラス  $T$  による拡大である.  $\sigma$  に関する仮定から,  $T(M)_{\text{tor}}$  および  $B(M)_{\text{tor}}$  は有限であるから,  $A(M)_{\text{tor}}$  および  $A(L)_{\text{tor}}$  は有限である. さらに,  $L$  に含まれる  $K$  の有限次拡大  $K'$  を,  $L/K'$  が Galois かつ  $A$  が  $K'$  上で定義されているようにとることができる. 命題 3.1 を  $L/K'$  および  $A$  に適用すると, 群  $A(L)/A(L)_{\text{tor}}$  が階数高々可算の自由  $\mathbb{Z}$  加群であることがわかる.

あとは  $A(L)/A(L)_{\text{tor}}$  の階数が実際に可算であることをいえばよい. 簡単な議論により  $A$  が次元正のアーベル多様体の場合にのみ示せばよいことがわかる. 定理 2.1 (1) によりほとんどすべての  $\sigma \in G_K^e$  に対し,  $L = \overline{K}[\sigma]$  のときには主張が成り立つ. 一般の場合には, Weil 制限 [11, Lemma 6.1] から従う.  $\square$

この結果から  $\overline{K}[\sigma]$  の有限次拡大上の Mordell–Weil 群に関する次の構造定理を得る.

**系 3.2.**  $K$  を  $\mathbb{Q}$  の有限生成体,  $e \geq 2$  とする. ほとんどすべての  $\sigma \in G_K^e$  に対し, 次が成り立つ:  $\overline{K}[\sigma]$  の任意の有限次拡大  $L$  および  $L$  上の任意の準アーベル多様体  $A$  に対し, 群  $A(L)$  は有限の捩れ群と階数可算の自由  $\mathbb{Z}$  加群との直和である.

証明.  $\sigma \in G_K^e$  を定理 2.1 (2-ii), (3) の (b) および定理 1.3 (1) の各主張を満たすものとする. この  $\sigma$  に対して系の主張が成り立つことを示せば十分である.  $L$  を  $\overline{K}[\sigma]$  の有限次拡大,  $A$  を  $L$  上の準アーベル多様体とすると, 群  $A(L)/A(L)_{\text{tor}}$  は階数可算の自由  $\mathbb{Z}$  加群であるから, とくに射影的である. よって完全列  $0 \rightarrow A(L)_{\text{tor}} \rightarrow A(L) \rightarrow A(L)/A(L)_{\text{tor}} \rightarrow 0$  は分裂し,  $A(L) = A(L)_{\text{tor}} \oplus A(L)/A(L)_{\text{tor}}$  を得る. 系の主張はこの分解と  $\sigma$  に関する仮定から従う.  $\square$

## 4 $\overline{K}(\sigma)$ および $\overline{K}[\sigma]$ の Kummer 忠実性

この節では, 定理 1.3 (2) および (3) の証明の概略を述べる. Kummer 忠実性を示すために用いる命題を紹介する.

**命題 4.1** (小関–田口 [16, Proposition 2.3]). 完全体  $F$  が Kummer 忠実であることは,  $F$  の任意の有限次拡大  $E$  に対し  $\mathbb{G}_m(E)_{\text{div}} = 0$  が成り立ち,  $F$  上の任意のアーベル多様体  $A$  に対し  $A(F)_{\text{div}} = 0$  が成り立つことと同値である.

**命題 4.2** (小関–田口 [16, Proposition 2.4 (2)]).  $A$  を Kummer 忠実体  $F$  上の準アーベル多様体,  $E$  を  $F$  の Galois 拡大とする. このとき, 次の 3 条件は互いに同値である:

- (a)  $A(E)_{\text{div}} = 0$ .
- (b)  $(A(E)_{\text{tor}})_{\text{div}} = 0$ .
- (c) 任意の素数  $l$  に対し  $A(E)[l^\infty]$  は有限である.

定理 1.3 (2) の証明 (概略). 定理 2.1 (4) よりほとんどすべての  $\sigma \in G_K^e$  および  $\overline{K}(\sigma)$  上の任意のアーベル多様体  $A$  に対し  $A(\overline{K}(\sigma))_{\text{div}} = 0$  であるから, 命題 4.1 より ほとんどすべての  $\sigma \in G_K^e$  および  $\overline{K}(\sigma)$  上の任意の有限次拡大  $M$  に対し  $\mathbb{G}_m(M)_{\text{div}} = 0$  であることを示せばよい.

$S$  をこの条件が成り立たない  $\sigma \in G_K^e$  の集合, すなわち  $\overline{K}(\sigma)$  上のある有限次拡大  $M$  に対し  $\mathbb{G}_m(M)_{\text{div}} \neq 0$  となる  $\sigma \in G_K^e$  の集合とする. 各  $a \in \overline{K}^\times \setminus \{1\}$  について,  $\overline{K}(\sigma)$  上のある有限次拡大  $M$  に対し  $a \in \mathbb{G}_m(M)_{\text{div}}$  となる  $\sigma \in G_K^e$  の集合とすると  $S = \bigcup_{a \in \overline{K}^\times \setminus \{1\}} S_a$  が成り立つ.  $\overline{K}^\times \setminus \{1\}$  は可算集合であるから, 各  $a \in \overline{K}^\times \setminus \{1\}$  に対し  $\mu(S_a) = 0$  をいえば  $\mu(S) = 0$  となり定理が導かれる.

$a$  は 1 の冪根であるとする. このとき各  $\sigma \in S_a$  に対し,  $\overline{K}(\sigma)$  は 1 の冪根を無限個もつことになるが, 定理 2.1 (2-ii) よりそのような  $\sigma \in G_K^e$  の集合の測度は 0 であるので  $\mu(S_a) = 0$  が従う.

$a$  は 1 の冪根でないとする. 素数  $l$  に対し,  $a$  のある  $l$  乗根が  $\overline{K}(\sigma)$  に含まれる  $\sigma \in G_K^e$  の集合を  $T_a^{(l)}$  とかくこととする. このとき ( $a$  に依存する) 素数  $l_0$  で, 任意の素数  $l \geq l_0$  に対し  $\mu(T_a^{(l)}) \leq 1/l^{e-1}$  が成り立つものが存在することがわかる.  $e \geq 2$  より素数  $l \geq l_0$  からなる無

限集合  $\Lambda_a$  で,  $\sum_{l \in \Lambda_a} 1/l^{e-1} < +\infty$  となるものが存在する. Borel–Cantelli の第一補題 (cf. [3, Lemma 18.3.5 (a)]) より, ほとんどすべての  $\sigma \in G_K^e$  に対し,  $\sigma \in T_a^{(l)}$  となる  $l \in \Lambda_a$  は有限個である. そのような  $\sigma$  に対し  $\sigma \notin S_a$  であることが証明できるので, この場合も  $\mu(S_a) = 0$  である.  $\square$

定理 1.3 (3) の証明 (概略).  $e \geq 2$  のときは定理 1.3 (2) (あるいは定理 1.3 (1) と定理 2.1 (4)) から従うので,  $e = 1$  とする. 命題 4.1 よりほとんどすべての  $\sigma \in G_K$  に対し次の 2 条件が成り立つことを示せばよい:

- (a)  $\overline{K}[\sigma]$  の任意の有限次拡大  $L$  に対し  $\mathbb{G}_m(L)_{\text{div}} = 0$ .
- (b)  $\overline{K}[\sigma]$  上の任意のアーベル多様体  $A$  に対し  $A(\overline{K}[\sigma])_{\text{div}} = 0$ .

(a) については  $L$  が  $K$  のある有限次拡大の Galois 拡大であることと  $K$  の有限次拡大は Kummer 忠実であることから, 命題 4.2 より条件  $\mathbb{G}_m(L)_{\text{div}} = 0$  が  $(\mathbb{G}_m(L)_{\text{tor}})_{\text{div}} = 0$  と同値になり, 定理 2.1 (2-i) に帰着される. 同様に, (b) については再び命題 4.2 より条件  $A(\overline{K}[\sigma])_{\text{div}} = 0$  が各素数  $l$  に対し  $A(\overline{K}[\sigma])[l^\infty]$  が有限であることと同値になり, 定理 2.1 (3-iii) に帰着される.  $\square$

**注意 4.3.** 主定理 (定理 1.3) の (1) および (2) について,  $e = 1$  の場合には準アーベル多様体の Mordell–Weil 群に関するある種の有限性の性質が失われるため (定理 2.1), 本稿で紹介した証明は機能しなくなっている. 定理が  $e = 1$  のときにも成り立つかどうかは未解決である.

## 参考文献

- [1] L. Bary-Soroker, *On pseudo algebraically closed extensions of fields*, J. Algebra **322** (2009), 2082–2105.
- [2] G. Frey and M. Jarden, *Approximation theory and the rank of abelian varieties over large algebraic fields*, Proc. Lond. Math. Soc. **28** (1974) 112–128.
- [3] M. D. Fried and M. Jarden, *Field arithmetic*, third ed., Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge., A Series of Modern Surveys in Mathematics **11**, Springer-Verlag, Berlin, 2008.
- [4] W.-D. Geyer and M. Jarden, *Torsion points of elliptic curves over large algebraic extensions of finitely generated fields*, Isr. J. Math. **31** (1978) 257–297.
- [5] W.-D. Geyer and M. Jarden, *The rank of abelian varieties over large algebraic fields*, Arch. Math. **86** (2006), 211–216.
- [6] M. Jacobson and M. Jarden, *On torsion of abelian varieties over large algebraic extensions of finitely generated fields*, Mathematika **31** (1984), 110–116.
- [7] M. Jacobson and M. Jarden, *On torsion of abelian varieties over large algebraic extensions of finitely generated fields: Erratum*, Mathematika **32** (1985), 316.
- [8] M. Jacobson and M. Jarden, *Finiteness theorems for torsion of abelian varieties over large algebraic fields*, Acta Arith. **98** (2001), 15–31.
- [9] M. Jarden, *Roots of unity over large algebraic fields*, Math. Ann. **213** (1975), 109–127.

- [10] M. Jarden and S. Petersen, *Torsion of abelian varieties over large algebraic extensions of  $\mathbb{Q}$* , Nagoya Math. J. **234** (2019), 46–86.
- [11] M. Jarden and S. Petersen, *The section conjecture over large algebraic extensions of finitely generated fields*, Math. Nachr. **295** (2022), 890–911.
- [12] S. Mochizuki, *Topics in absolute anabelian geometry III: global reconstruction algorithms*, J. Math. Sci. Univ. Tokyo **22** (2015), 939–1156.
- [13] H. Moon, *On the Mordell-Weil groups of Jacobians of hyperelliptic curves over certain elementary abelian 2-extensions*, Kyungpook Math. J. **49** (2009), 419–424.
- [14] S. Ohtani, *Kummer-faithful fields which are not sub- $p$ -adic*, Res. Number Theory **8** (2022), Paper No. 15, 7 pp.
- [15] S. Ohtani, *Corrigendum to: Kummer-faithful fields which are not sub- $p$ -adic*, Res. Number Theory **9** (2023), Paper No. 36, 7 pp.
- [16] Y. Ozeki and Y. Taguchi, *A note on highly Kummer-faithful fields*, Kodai Math. J. **45** (2022), 49–64.
- [17] D. Zywina, *Abelian varieties over large algebraic fields with infinite torsion*, Isr. J. Math. **211** (2016), 493–508.