

向き付け不可能空間曲面の彩色について

大阪大学 大学院理学研究科 数学専攻
新井克典 (Katsunori ARAI) *

概要

空間曲面は 3 次元空間に埋め込まれたコンパクト曲面である。境界付き空間曲面は空間 3 価グラフとそのダイアグラムを用いて表示できる。カンドルは結び目理論におけるライデマイスター変形に対応する代数系である。本講演ではカンドルの一般化であるラックを用いて、向き付け不可能曲面を表す空間 3 価グラフのダイアグラムの彩色を定義し、彩色数と呼ばれる不変量を構成する。

1 結び目

埋め込み $\underbrace{S^1 \sqcup S^1 \sqcup \dots \sqcup S^1}_{\mu \text{個}} \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ の像を μ 成分の絡み目といい、特に 1 成分の絡み目を結び目という。

2 つの絡み目 L, L' が同値であるとは、向きを保つ自己同相写像 $h: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ で $h(L) = L'$ を満たすものが存在することをいい、 $L \cong L'$ と書く。

(必要であれば自己同相写像 $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ で動かすことによって、射影 $\pi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ による絡み目 L の像 $\pi(L)$ における全ての多重点が高々有限個の横断的 2 重点であるとする。このとき、 $\pi(L)$ の各 2 重点に上下の情報を与えたものを L のダイアグラムという。

絡み目のダイアグラム D において、各連結成分を弧という。絡み目ダイアグラム D の弧全体の集合を $\mathcal{A}(D)$ で表すこととする。

絡み目ダイアグラム D において、 D の全ての弧を交差でさらに区切ったとき、各連結成分を D の準弧という。絡み目ダイアグラム D の準弧全体の集合を $\mathcal{SA}(D)$ と書く。

定理 1.1. ([10]). L_1 と L_2 を絡み目とし、 D_1 と D_2 をそれぞれ L_1 と L_2 のダイアグラムとする。 L_1 と L_2 が同値であることと D_1 と D_2 がライデマイスター変形 (図 1) と \mathbb{R}^2 上のアイソトピー変形を有限回施して移り合うことは同値である。

絡み目 L の向きとは、各成分の 1 次元多様体としての向きをいう。向きが指定されている絡み目を有向絡み目という。 L が有向絡み目のとき、 L のダイアグラム D にも向きが与えられる。有向絡み目に対しても、ライデマイスターの定理が成り立つ。

定理 1.2. ([9]). L_1 と L_2 を有向絡み目とし、 D_1 と D_2 をそれぞれ L_1 と L_2 のダイアグラムとす

* E-mail: u068111h@ecs.osaka-u.ac.jp

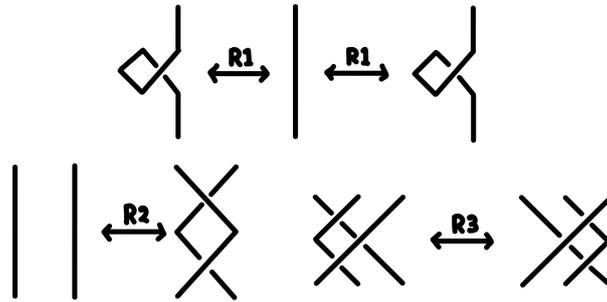


図 1: ライデマイスター変形

る. L_1 と L_2 が同値であることと D_1 と D_2 が有向ライデマイスター変形 (図 2) と \mathbb{R}^2 上のアイソトピー変形を有限回施して移り合うことは同値である.

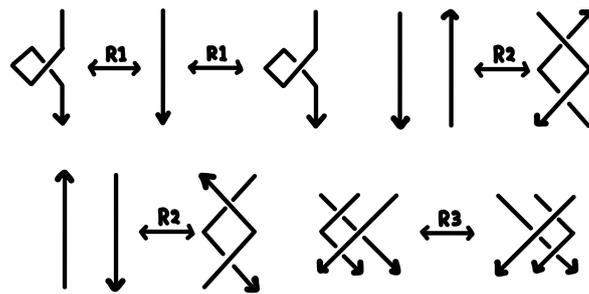


図 2: 有向ライデマイスター変形

2 カンドルとラック

定義 2.1. ([2, 4, 8]). 空でない集合 X とその上の二項演算 $*$: $X \times X \rightarrow X$; $(x, y) \mapsto x * y$ の組 $X = (X, *)$ がラックであるとは, $*$ が次の条件を満たすことをいう.

- 任意の $y \in X$ に対して, 写像 $S_y : X \rightarrow X$; $x \mapsto x * y$ は全単射である.
- 任意の $x, y, z \in X$ に対して, $(x * y) * z = (x * z) * (y * z)$ を満たす.

特に, ラック X が次の条件を満たすとき $X = (X, *)$ をカンドルという.

- 任意の $x \in X$ に対して, $x * x = x$ を満たす.

ラックの公理は R2, R3 変形に対応し, カンドルの公理は R1, R2, R3 変形に対応する.

$X = (X, *)$ をラックとする. 任意の $x, y \in X$ と任意の $n \in \mathbb{Z}$ に対して, $S_y^n(x)$ を $x *^n y$ と表す.

例 2.2. • $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ とする. $C_n = (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, x * y = x + 1)$ を巡回ラックという.

• $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ とする. $C_n = (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, x * y = 2y - x)$ を二面体カンドルという.

定義 2.3. ([4,8]). X をラックとし, D を有向絡み目ダイアグラムとする. 写像 $C : A(D) \rightarrow X$ が D の X 彩色であるとは, D の各交差で図 3 の条件を満たすことである. X 彩色全体の集合を $\text{Col}_X(D)$ と書く.

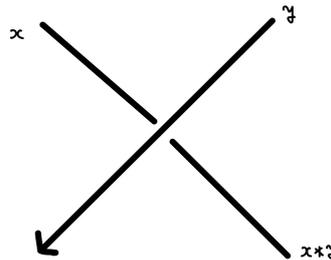


図 3: 彩色条件 ($x, y \in X$)

命題 2.4. ([4,8]). X をカンドルとし, D_1, D_2 を同値な有向絡み目を表すダイアグラムとする. このとき, $\text{Col}_X^{\text{qdle}}(D_1)$ と $\text{Col}_X^{\text{qdle}}(D_2)$ の間に全単射が存在する. 特に $\text{Col}_X^{\text{qdle}}(D_1)$ の濃度 $|\text{Col}_X^{\text{qdle}}(D_1)|$ は有向絡み目の不変量である. この不変量をカンドル彩色数という.

定義 2.5. ([5,6]). $X = (X, *)$ をラックとする. 写像 $\rho : X \rightarrow X$ が良い対合写像 (good involution) とは次の条件を満たすことをいう.

1. ρ は対合的, すなわち, $\rho \circ \rho = \text{id}_X$ を満たす.
2. 任意の $x, y \in X$ に対して, $\rho(x * y) = \rho(x) * y$.
3. 任意の $x, y \in X$ に対して, $x * \rho(y) = x *^{-1} y$.

ラック $X = (X, *)$ と良い対合写像 ρ の組 (X, ρ) を対称ラックという. 特に X がカンドルのとき, 組 (X, ρ) を対称カンドルという.

例 2.6. G を群とする. $\text{Conj}(G) = (G, x * y = y^{-1}xy)$ はカンドルである. このカンドルを共役カンドルという. 写像 $\rho : \text{Conj}(G) \ni g \mapsto g^{-1} \in \text{Conj}(G)$ は良い対合写像である.

(X, ρ) を対称カンドル, D を絡み目ダイアグラムとする. 各準弧 a に向きを与え, その向きを $\frac{\pi}{2}$ 回転させた向きを a の法線方向と呼ぶ. D の各準弧に対して, X の元と法線方向を対応させる写像 C が対称カンドル彩色条件を満たすとは, 図 4 の条件を満たすことをいう.

絡み目ダイアグラム D の各準弧に対して, 対称カンドル (X, ρ) の元と法線方向が与えられている

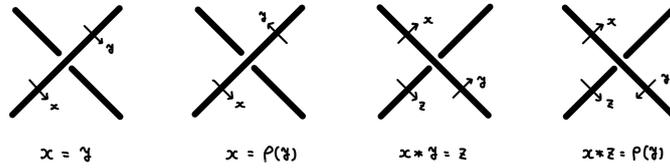


図 4: 対称カンドル彩色条件 ($x, y, z \in X$)

とする. 準弧 a に対する基本反転変形とは, a に与えられた X の元 x を $\rho(x)$ に取り換え, さらに a の法線方向を逆向きにする変形 (図 5) をいう.

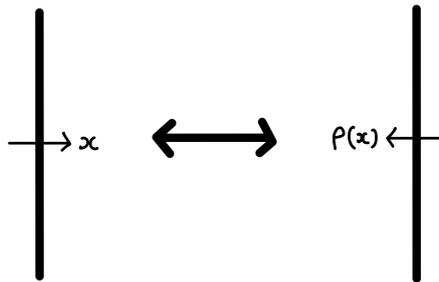


図 5: 基本反転変形 ($x \in X$)

定義 2.7. ([5]). (X, ρ) を対称カンドル, D を絡み目ダイアグラムとする. D の各準弧に対して X の元と法線方向を対応させる写像 C で対称カンドル彩色条件を満たすもの全体の集合を, 有限回の基本反転変形で移り合うという同値関係で割った商集合の元を, D の (X, ρ) 彩色 ((X, ρ) -coloring) という.

命題 2.8. ([5]). (X, ρ) を対称カンドルとする. D_1 と D_2 を同値な絡み目を表す絡み目ダイアグラムとする. このとき, D_1 の (X, ρ) 彩色全体の集合と D_2 の (X, ρ) 彩色全体の集合の集合の間に全単射が存在する.

3 空間曲面

空間曲面 [7] とは, \mathbb{R}^3 に埋め込まれたコンパクト曲面である. 本講演では次の条件を仮定する.

- 各連結成分は空でない境界を持つ.
- 2次元閉円板成分を持たない.

空間曲面 F と F' が同値であるとは, F を向きを込めて F' に移す \mathbb{R}^3 上の全同位が存在することをいい, このとき $F \cong F'$ と書く.

空間 3 価グラフとは, \mathbb{R}^3 に埋め込まれた有限 3 価グラフのことである.

Y 向き付けられた空間 3 価グラフとは, 全ての頂点の入次数, 出次数がともに 1 以上であるような有向空間 3 価グラフのことである. ここで入次数とはその頂点を終点としてもつ辺の本数をいい, 出次数とはその頂点を始点としてもつ辺の本数をいう. 全ての空間 3 価グラフはいくつかの **Y** 向き付けをもつ.

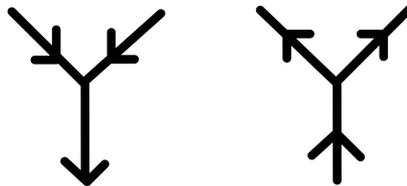


図 6: 空間 3 価グラフの **Y** 向き付け

G を \mathbb{R}^3 内の空間 3 価グラフとする. 必要であれば自己同相写像 $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ で動かすことで, 射影 $\pi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ による G の像 $\pi(G)$ が $\pi(G)$ の多重点が高々有限個の横断的 2 重点であるとする. このとき, $\pi(G)$ に対して, 各交差の上下の情報を付加したものを G のダイアグラムという.

ダイアグラムの各連結成分をさらに頂点で区切ったものを弧 (**arc**) という. 空間 3 価グラフのダイアグラム D の弧全体の集合を $\mathcal{A}(D)$ と書く.

符号付きバーを持つ空間 3 価グラフのダイアグラムとは, ダイアグラムの弧上に, 符号 ± 1 の情報を持つバー (図 7) を付加したものをいう.

任意の空間曲面は図 8 の方法で, 符号付きバーを持つ空間グラフのダイアグラムから得られるある空間曲面と同値である. このとき, 空間曲面 F のダイアグラムを符号付きバーを持つ空間 3 価グラフのダイアグラム D で定める.

定理 3.1. ([7]). F_1 と F_2 を空間曲面とし, D_1 と D_2 をそれぞれ F_1 と F_2 のダイアグラムとする. このとき, F_1 と F_2 が同値であることと D_1 と D_2 が空間曲面ダイアグラムのライデマイスター変形 (図 9) と \mathbb{R}^2 上のアイソトピー変形を有限回施して移り合うことは同値である.

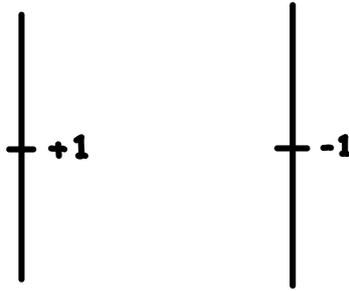


図 7: 符号付きバー

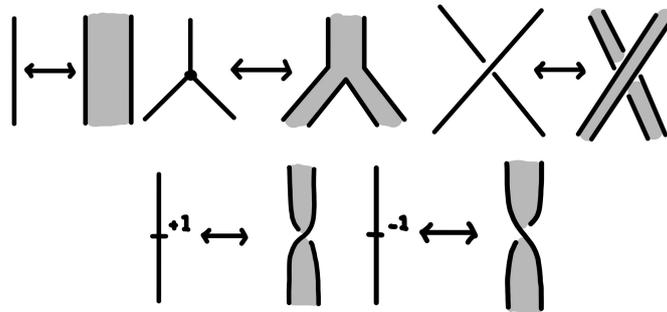


図 8: 空間 3 価グラフのダイアグラムから空間曲面を得る方法

4 亜群ラック

圏 \mathcal{C} とは,

- 対象の集まり $\text{Ob}(\mathcal{C})$.
- 各 $\lambda, \mu \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ に対して, λ から μ への射全体の集合 $\text{Hom}(\lambda, \mu)$.
- 各 $\lambda, \mu, \nu \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ に対して, 次で定義される写像 $\text{Hom}(\lambda, \mu) \times \text{Hom}(\mu, \nu) \ni (f, g) \mapsto fg \in \text{Hom}(\lambda, \nu)$ で次の条件を満たすもの
 - 任意の $f \in \text{Hom}(\lambda, \mu)$, $g \in \text{Hom}(\mu, \nu)$, $h \in \text{Hom}(\nu, \xi)$ に対して, $f(gh) = (fg)h$ を満たす.
 - 任意の $\lambda \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ に対して, ある射 id_λ が存在して, 任意の $f \in \text{Hom}(\lambda, \mu)$ に対して $\text{id}_\lambda f = f$ を満たし, また任意の $g \in \text{Hom}(\mu, \lambda)$ に対して $g \text{id}_\lambda = g$ を満たす.

からなる 3 つ組のことである. 圏 \mathcal{C} の射全体の集合を $\text{Hom}(\mathcal{C})$ と表す. $f \in \text{Hom}(\lambda, \mu)$ に対して,

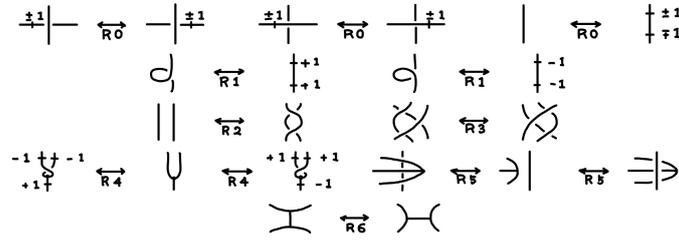


図 9: 空間曲面のダイアグラムのライデマイスター変形

$\lambda, \mu \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ をそれぞれ f の定義域, 値域といい, $\text{dom}(f)$, $\text{cod}(f)$ とも表す. また $f : \lambda \rightarrow \mu$ で $f \in \text{Hom}(\lambda, \mu)$ を表す. 写像 $\text{Hom}(\lambda, \mu) \times \text{Hom}(\mu, \nu) \ni (f, g) \mapsto fg \in \text{Hom}(\lambda, \nu)$ を合成と呼び, 任意の $\lambda \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ に対して, 射 id_λ を $\lambda \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ 上の恒等射と呼ぶ.

圏 \mathcal{C} の射 $f \in \text{Hom}(\lambda, \mu)$ が同型射であるとは, ある射 $g \in \text{Hom}(\mu, \lambda)$ が存在して $fg = \text{id}_\lambda$ かつ $gf = \text{id}_\mu$ を満たすことをいう. このとき, 射 g を f の逆射という.

全ての射が同型射であるような圏を**亜群**と呼ぶ.

定義 4.1. ([1]). \mathcal{C} を亜群とし, $X = \text{Hom}(\mathcal{C})$ とする. X と X 上の 2 項演算 $*$: $X \times X \rightarrow X$ の組 $X = (X, *)$ が**亜群ラック**であるとは, $*$ が次の条件を満たすことをいう.

1. 任意の $x \in X$ と任意の $f : \lambda \rightarrow \mu$, $g : \mu \rightarrow \nu$ に対して, $x * (fg) = (x * f) * g$, $x * \text{id}_\lambda = x$ を満たす.
2. 任意の $x, y, z \in X$ に対して, $(x * y) * z = (x * z) * (y * z)$ を満たす.
3. 任意の $x \in X$ と任意の $f : \lambda \rightarrow \mu$, $g : \mu \rightarrow \nu$ に対して, $\text{cod}(f * x) = \text{dom}(g * x)$, $(fg) * x = (f * x)(g * x)$ を満たす.

亜群ラックの公理 1 および 3 は R2 および R5 変形に対応し, 2 は R3 変形に対応している. また亜群の射の結合法則は R6 変形に対応している.

亜群ラックの例を挙げる.

例 4.2. ([3]). $\{G_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ を群の族とし, 各群 G_λ の単位元を e_λ とする. 群の非交和 $X = \bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda$ と 2 項演算 $*$: $X \times X \rightarrow X$ の組 $X = (X, *)$ が**多重群ラック (MGR)** であるとは, $*$ が次の条件を満たすことをいう.

2. 任意の $x \in X$ と任意の $a, b \in G_\lambda$ に対して, $x * e_\lambda = x$, $x * (ab) = (x * a) * b$.
3. 任意の $x, y, z \in X$ に対して, $(x * y) * z = (x * z) * (y * z)$.
4. 任意の $x \in X$ と任意の $a, b \in G_\lambda$ に対して, ある $\mu \in \Lambda$ が存在して, $(a * x), (b * x) \in G_\mu$ かつ $(ab) * x = (a * x)(b * x)$.

例 4.3. (cf. [11]). $R = (R, *)$ をラックとする. このとき, 直積 $R \times R$ 上に次で定まる二項演算 $\triangleright: R \times R \rightarrow R \times R$ を考える.

$$(x, y) \triangleright (z, w) = ((x * z) *^{-1} w, (y * z) *^{-1} w).$$

このとき, $(R \times R, \triangleright)$ はラックである. さらに, 部分的に定義される積を次で定める.

$$(x, y)(y, z) = (x, z).$$

この積をもつラック $(R \times R, \triangleright)$ は亜群ラックである. この亜群ラックを, 本講演ではヒープラックと呼ぶ.

注意 4.4. ヒープラックは MGR ではないことに注意しておく.

定義 4.5. X を亜群ラックとし, D を Y 向き付けられた有向空間曲面図式とする. 写像 $C: \mathcal{A}(D) \rightarrow X$ が X 彩色であるとは, 各交差と各 3 価頂点で図 10 の条件を満たすことをいう. X 彩色全体の集合を $\text{Col}_X(D)$ と書く.

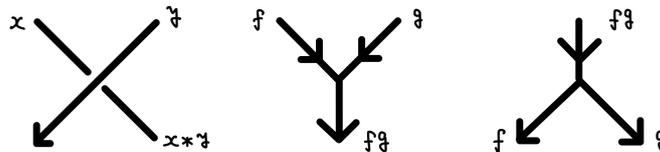


図 10: 亜群ラック彩色条件 ($x, y, f, g \in X, \text{cod}(f) = \text{dom}(g)$)

定理 4.6. ([1]). X を亜群ラックとし, D_1 と D_2 を同値な有向空間曲面の Y 向き付けされたダイアグラムとする. このとき, $\text{Col}_X(D_1)$ と $\text{Col}_X(D_2)$ の間に全単射が存在する. 特に $\text{Col}_X(D_1)$ の濃度 $|\text{Col}_X(D_1)|$ は有向空間曲面の不変量である.

5 主結果

X を亜群ラックとする. このとき, $\rho: X \rightarrow X; x \mapsto x^{-1}$ は良い対合写像である.

次の条件を満たす全単射 $\tau: X \rightarrow X$ を考える.

1. $\tau \circ \rho = \rho \circ \tau$.
2. 任意の $x, y \in X$ に対して, $\tau(x) * y = \tau(x * y), \quad \tau^{-1}(x) * y = \tau^{-1}(x * y)$.
3. 任意の $x \in X$ に対して, $\tau^2(x) = x * x, \tau^{-2}(x) = x *^{-1} x$.

4. 任意の $f : \lambda \rightarrow \mu$ と任意の $g : \mu \rightarrow \nu$ に対して,

$$\tau^{-1}(\tau(g)(\tau(f) * \tau(g))) = fg = \tau((\tau^{-1}(g) *^{-1} \tau^{-1}(f))\tau^{-1}(f)).$$

以下, 特に断らない限り, τ は上記の条件を満たすとする.

図 10 の条件に加えて, 符号付きバー周りにおいて次の彩色条件 (図 11) を考える.

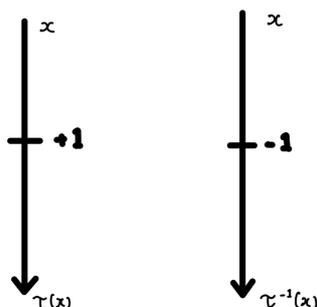


図 11: 符号付きバー周りでの彩色条件

空間曲面のダイアグラムの (X, τ) 彩色全体の集合を $\text{Col}_{(X, \tau)}(D)$ と表す.

本研究の主結果は次の定理である.

定理 5.1. X と τ は D_1 と D_2 を同値な (向き付け可能とは限らない) 空間曲面の Y 向き付けされたダイアグラムとする. このとき, $\text{Col}_{(X, \tau)}(D_1)$ と $\text{Col}_{(X, \tau)}(D_2)$ の間に全単射が存在する. 特に $\text{Col}_{(X, \tau)}(D_1)$ の濃度 $|\text{Col}_{(X, \tau)}(D_1)|$ は (向き付け可能とは限らない) 空間曲面の不変量である.

X や τ の例として次が挙げられる.

例 5.2. Q を圭, すなわち, $*^2 = \text{id}_Q$ を満たすカンドルとする. このとき, 例 4.3 で定まる演算により, $R := Q \times Q$ は亜群ラックである. また, $\rho : R \rightarrow R; (x, y) \mapsto (y, x)$ は良い対合写像であり, $\tau : R \rightarrow R; (x, y) \mapsto (y, x * y)$ は上記の条件を満たす.

参考文献

- [1] Katsunori Arai, *A groupoid rack and spatial surfaces*, 2023.
- [2] Roger Fenn and Colin Rourke, *Racks and links in codimension two*, J. Knot Theory Ramifications **1** (1992), no. 4, 343–406. MR1194995
- [3] Atsushi Ishii, Shosaku Matsuzaki, and Tomo Murao, *A multiple group rack and oriented spatial surfaces*, J. Knot Theory Ramifications **29** (2020), no. 7, 2050046, 20. MR4142996
- [4] David Joyce, *A classifying invariant of knots, the knot quandle*, J. Pure Appl. Algebra **23** (1982), no. 1, 37–65. MR638121
- [5] Seiichi Kamada, *Quandles with good involutions, their homologies and knot invariants*, Intelligence of low dimensional topology 2006, 2007, pp. 101–108. MR2371714
- [6] Seiichi Kamada and Kanako Oshiro, *Homology groups of symmetric quandles and cocycle invariants of links and surface-links*, Trans. Amer. Math. Soc. **362** (2010), no. 10, 5501–5527. MR2657689
- [7] Shosaku Matsuzaki, *A diagrammatic presentation and its characterization of non-split compact surfaces in the 3-sphere*, J. Knot Theory Ramifications **30** (2021), no. 9, Paper No. 2150071, 32. MR4358334

- [8] S. V. Matveev, *Distributive groupoids in knot theory*, Mat. Sb. (N.S.) **119(161)** (1982), no. 1, 78–88, 160. MR672410
- [9] Michael Polyak, *Minimal generating sets of Reidemeister moves*, Quantum Topol. **1** (2010), no. 4, 399–411. MR2733246
- [10] Kurt Reidemeister, *Elementare Begründung der Knotentheorie*, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **5** (1927), no. 1, 24–32. MR3069462
- [11] Masahico Saito and Emanuele Zappala, *Fundamental heaps for surface ribbons and cocycle invariants*, arXiv preprint arXiv:2109.07569 (2021).