重み付き p-Laplace 方程式に対するゲーム解釈

北海道大学　大学院理学院　数学専攻
相原真生 (Mamoru AIHARA) *

概要

偏微分方程式の粘性解について, 2 人零和ゲームで定まる値関数によって特徴付けできることが知られている. 本稿では, 重み付き p-Laplace 方程式に対して, 2 人のプレイヤーによる確率零和ゲームを与え, そのゲームの値関数の極限が方程式の粘性解になることを紹介する. 証明については値関数の境界での連続性と比較定理を用いて行う.

1　導入

本講演では, 次の偏微分方程式の境界値問題を考える.

$$\begin{cases} -\mathrm{div}\Big(f(x)|Du(x)|^{p-2}Du(x)\Big) = 0, & x \in \Omega, \\ u(x) = F(x), & x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{F}$$

ここで $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ は有界領域とし, $f \in C^1(\Omega)$ と $F \in C(\mathbb{R}^n)$ は与えられた実数値関数, $p \in (2, \infty)$ は定数とする. $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ を未知関数とし, 変数 $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ についての勾配と Hesse 行列をそれぞれ, $Du = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right)$, $D^2u = \left\{\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}\right\}_{1 \le i,j \le n}$ とかく.

本稿の目的は, 方程式 (F) に関して**ゲーム解釈を構築**することである.

1.1　重み付き p-Laplace 方程式

本稿で扱う方程式 (F) は, 重み付き p-Laplace 方程式とよばれ, p-Laplace 方程式の一般化である. 重み付き p-Laplace 方程式は, 重み付き逆平均曲率流方程式の等高面解の近似 [4] に用いられる. また, 非線形ポテンシャル論 [5] で研究されており, 比較定理や変分法的な性質が知られている. 具体的には, 重み付き p-Laplace 方程式は (I) で定まるエネルギー関数 $I : W^{1,p}_{loc}(\Omega) \to \mathbb{R}$ の Euler–Lagrange 方程式になることが知られている.

$$I(u) := \int_\Omega f(x)|Du(x)|^p dx. \tag{I}$$

* E-mail:aihara.mamoru.p7@elms.hokudai.ac.jp

1.2　ゲーム解釈

ゲーム解釈について紹介しよう．ここでいうゲームとは, 2 人のプレイヤーがそれぞれあるコストを最大化, 最小化することを目的に争う零和ゲームである．ゲームによって定まる**値関数**で偏微分方程式の粘性解を特徴付けできることは現在広く知られている．ゲームと粘性解の関係については, はじめに Evans, Souganidis の [2] で 1 階の Hamilton–Jacobi–Isaacs 方程式の粘性解を決定論的ゲームによって定まる値関数で特徴付けできることが証明された．2 階の Hamilton–Jacobi–Isaacs 方程式に対しては, Fleming, Soner の [3] で研究されている．ここでは, 確率過程の含まれるゲームの値関数によって, 粘性解を近似している．Kohn, Serfaty の [8,9] では平均曲率流方程式, 特異性のない一般の 2 階楕円型, 放物型方程式に対して確率を含まない決定論的微分ゲームが導入された．また, ∞-Laplace 方程式や p-Laplace 方程式 [15, 16] に対しては, 「tug-of-war」とよばれる確率ゲームも導入されている．

ゲーム解釈を考える利点は, 解の挙動をゲームの戦略を用いて, 全く別の視点から知ることが可能となる点である．具体的に, ゲーム解釈を応用して得られた結果として, p-Laplace 方程式の解の正則性, Harnack 不等式 [12], 放物型 p-Laplace 方程式の解の凸性保存 [11] が挙げられる．

1.3　先行研究とアイデア

先行研究 [14] では, 重みのない p-Laplace 方程式に対してゲームを構築し, 構築したゲームで定まる値関数 u_ϵ が, $\epsilon \to 0$ で p-Laplace 方程式の粘性解に収束することを示している．このゲームではプレイヤー A による操作, プレイヤー B による操作, Random Walk の 3 種類の操作で駒の動きを支配する．証明はまず, ゲームで得た値関数が動的計画原理という等式をみたすことを示す．つぎに, 値関数のある意味での同程度連続性, 一様有界性を示し, Ascoli–Arzela の定理から値関数が連続関数に一様収束することを示す．動的計画原理と一様収束性から, 値関数が粘性解に収束することが導かれる．

以上が先行研究 [14] の結果であるが, 今回, 方程式に重みをつけたことで先行研究のゲームに, 指定された方向へ駒を動かすという操作を追加した．証明は基本的に先行研究と同様の手法で行うが, 大きく異なる点がある．先行研究では値関数が一様収束極限をもつことを示すために値関数の同程度連続性が必要だった．今回操作を追加したことで同程度連続性は同様の手法では得られない．そこで relaxed limit と比較定理を利用する手法 [9] を用いる．この証明では値関数の境界付近でのある意味での連続性が必要になるため, 境界付近で通常の p-Laplace 方程式の値関数と今回の値関数が一致することを示し, p-Laplace 方程式の場合に帰着させてある意味での連続性を導く．

2　主定理

f, Ω に対する仮定を述べる．ただし, $B_r(x)$ は x 中心の半径 r の開球である．

- 仮定 $(f1)$
  f は一様に正値かつ有界な関数である．すなわち次が成り立つ．
$$0 < \inf_{x\in\Omega} f(x) \le \sup_{x\in\Omega} f(x) < \infty.$$
- 仮定 $(f2)$
  ある定数 $d > 0$ が存在して, 集合 $\{y \in \Omega \mid \mathrm{dist}(y, \Omega) \le d\}$ 上で $f \equiv 1$ となる．
- 仮定 $(\Omega 1)$
  ある $\tilde{\delta} > 0$ が存在して, 任意の $0 < \delta \le \tilde{\delta},\ \epsilon > 0,\ y \in \partial\Omega$ に対して, 次をみたす $z \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega$ が存在する．
$$y \in B_\delta(z) \subset \mathbb{R}^n \setminus \Omega.$$

次に**ゲームのルール**を述べる．このゲームはプレイヤー A とプレイヤー B の 2 人によって行われる．$\epsilon > 0$ に対して, 次のルールの下, 値関数 u_ϵ を定義する．以下
$$\alpha := \frac{p-2}{p+n},\ \beta := 1-\alpha,\ \gamma(x) := \frac{f(x)}{\frac{|Df(x)|}{2(p+n)} + f(x)}$$
とし, $f \in C^1(\Omega)$ と $F \in C(\Omega)$ は方程式 (F) で与えられた関数とし, $\Gamma_\epsilon = \{y \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega \mid \mathrm{dist}(y, \Omega) \le \epsilon\}$ とする．

(1) 初期位置 $x_0 \in \Omega$ に駒をおく．
(2) 以下の操作を繰り返し $x_0, x_1, x_2, \ldots$ と駒を動かす．
  x_k に駒があるとき, 次のいずれかの操作を行い駒を x_{k+1} に動かす $(k = 0, 1, 2, \ldots)$.
  - **操作 1.** 確率 $\frac{\gamma(x_k)\alpha}{2}$ でプレイヤー A が $B_\epsilon(x_k)$ の好きな位置に駒を移動する．
  - **操作 2.** 確率 $\frac{\gamma(x_k)\alpha}{2}$ でプレイヤー B が $B_\epsilon(x_k)$ の好きな位置に駒を移動する．
  - **操作 3.** 確率 $\gamma(x_k)\beta$ で $B_\epsilon(x_k)$ 上ランダムな位置に駒を移動する (Random Walk).
  - **操作 4.** 確率 $1-\gamma(x_k)$ で $x_k + \epsilon^2 \frac{Df(x_k)}{|Df(x_k)|}$ に駒を移動する．
(3) この操作を繰り返し, $x_\tau \in \Gamma_\epsilon$ に到達したときゲームを終了し, 利益 $F(x_\tau)$ を得る．
(4) プレイヤー A とプレイヤー B はそれぞれ利益を最大化, 最小化しようと行動する．このときの利益の期待値を $u_\epsilon(x_0)$ と書き, $u_\epsilon : \Omega \to \mathbb{R}$ を値関数とよぶ．

注意 2.1. $Df(x) = 0$ の場合, $\gamma(x) = 1$ となるので操作 4 は起こらない．

ここで, プレイヤー A の戦略を関数 S_A として以下で表す．
$$S_A(x_0, \ldots, x_{k-1}) = x_k \in B_\epsilon(x_{k-1}).$$
また, プレイヤー B に対しても同様にして関数 S_B と表す．これらを利用して, プレイヤー B が先に戦略を決定する場合の期待値を
$$u_A^\epsilon(x_0) := \sup_{S_A} \inf_{S_B} \mathbb{E}_{S_A,S_B}^{x_0}[F(x_\tau)]$$
とし, プレイヤー A が先に戦略を決定する場合の期待値を
$$u_B^\epsilon(x_0) := \inf_{S_B} \sup_{S_A} \mathbb{E}_{S_A,S_B}^{x_0}[F(x_\tau)]$$

とする．ここで $\mathbb{E}^{x_0}_{S_A,S_B}[F(x_\tau)]$ は駒の初期位置を x_0 として，2 人のプレイヤーがそれぞれ戦略 S_A，S_B をとったときの利益の期待値である．u^ϵ_A と u^ϵ_B は結果的には等しくなるが，便宜上

$$u_\epsilon := u^\epsilon_A$$

としておく．また，期待値を考えるには確率空間を定義する必要があるが本稿では省略する．詳しくは [14] を参照せよ．

以上を踏まえて，本稿の主定理を述べる．

定理 2.1 (ゲーム解釈)**.** 有界領域 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ は仮定 $(\Omega 1)$ をみたし，$f \in C^1(\Omega)$ は仮定 $(f1)$, $(f2)$ をみたすとする．また，$F \in C(\mathbb{R}^n)$ は Lipschitz 連続で $2 < p < \infty$ とし，(F) の粘性優解と粘性劣解に対して比較定理が成り立つとする．このとき，微分ゲームで与えられる値関数 u_ϵ が，$\epsilon \to 0$ で (F) の粘性解に一様収束する．

3 準備

方程式 (F) の解として，粘性解とよばれる弱解を考える．粘性解は最大値原理に基づき，退化楕円型偏微分方程式，放物型偏微分方程式に用いられる．また，以下の定義では境界条件は古典的な意味でみたすことに注意せよ．粘性解に関しての詳細は [1] を参照せよ．

定義 3.1 (粘性優解 **(resp.** 劣解**)**, [1])**.** $u : \Omega \to (-\infty, \infty)$ が (F) の粘性優解 (resp. 劣解) とは，次の (1)–(2) が成り立つことである．

(1) u が下半連続，(resp. 上半連続)．

(2) $u = F \quad \text{on } \partial\Omega$.

(3) $\phi \in C^2(\Omega)$ として，$u - \phi$ が $x_0 \in \Omega$ で局所最小値 (resp. 局所最大値) 0 をとるとする．このとき，

$$-\mathrm{div}\Big(f(x_0)|D\phi(x_0)|^{p-2}D\phi(x_0)\Big) \geq 0, \ \text{(resp.} \leq 0).$$

が成り立つ．

u が粘性優解かつ粘性劣解のとき，u を**粘性解**という．

つぎに比較定理についても述べておく．比較定理は優解と劣解の境界付近での大小が領域内部まで保存されることを表している．また，比較定理を用い粘性解の一意性を導くことが可能である．

補題 3.1 (比較定理)**.** 方程式 (F) の粘性優解と粘性劣解に対して比較定理が成り立つとは，u が粘性優解，v が粘性劣解のとき次が成り立つことである．

$$u \geq v \quad \text{on } \partial\Omega \Rightarrow u \geq v \quad \text{in } \Omega.$$

さて，証明の肝となる等式を紹介しよう．次の等式は**動的計画原理**とよばれ，駒が 1 回移動すると

きの利益の期待値の関係を表している．ここで $\fint$ は積分平均, w は可測関数である．

$$w(x) = \gamma(x)\frac{\alpha}{2}\Big(\sup_{B_\epsilon(x)} w + \inf_{B_\epsilon(x)} w\Big) + \gamma(x)\beta\fint_{B_\epsilon(0)} w(x+h)dh + U(w)(x) \tag{DPP}$$

ここで, U は

$$U(w)(x) := \begin{cases} (1-\gamma(x))w\Big(x+\epsilon^2\frac{Df(x)}{|Df(x)|}\Big), & Df(x) \neq 0, \\ 0, & Df(x) = 0, \end{cases}$$

である．

値関数 u_ϵ の極限として次の **relaxed limit** を紹介する．

$$\overline{u}(x) := \lim_{\nu\to 0} \sup\left\{u_\epsilon(y) \;\middle|\; y \in \overline{\Omega}, |y-x| + \epsilon \leq \nu\right\},$$
$$\underline{u}(x) := \lim_{\nu\to 0} \inf\left\{u_\epsilon(y) \;\middle|\; y \in \overline{\Omega}, |y-x| + \epsilon \leq \nu\right\}.$$

定義からわかるように $\overline{u}$, $\underline{u}$ はそれぞれ上半連続関数, 下半連続関数で, $\underline{u} \leq \overline{u}$ が成り立つ．

4 証明の概略

まずは動的計画原理を満たす関数を構築する．

補題 4.1. $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ を有界領域, $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ を有界な可測関数とする．このとき, 次の (1), (2) をみたす可測関数 v が存在する．

(1) v は Ω 上で動的計画原理 (DPP) をみたす．
(2) $v(x) = F(x), \quad x \in \Gamma_\epsilon$.

証明の概略. 可測関数 w に対して作用素 T を次で定義する．

$$Tw(x) := \begin{cases} \gamma(x)\frac{\alpha}{2}\Big(\sup_{B_\epsilon(x)} w + \inf_{B_\epsilon(x)} w\Big) + \gamma(x)\beta\fint_{B_\epsilon(0)} w(x+h)dh + U(w)(x), & x \in \Omega, \\ F(x), & x \in \Gamma_\epsilon. \end{cases}$$

また,

$$v_0(x) := \begin{cases} \inf_{y\in\Gamma_\epsilon} F(y), & x \in \Omega, \\ F(x), & x \in \Gamma_\epsilon \end{cases}$$

とする. この T を v_0 に対して, 繰り返し作用させることによって (DPP) と境界条件をみたす関数を構築できる． □

次に, 値関数が動的計画原理を満たすことを確認する．

補題 4.2. ゲームで与えたプレイヤー A の値関数 u_A^ϵ , プレイヤー B の値関数 u_B^ϵ , 定理 4.1 で与えた動的計画原理をみたす関数 v に対して, 次が成り立つ．

$$v = u_A^\epsilon = u_B^\epsilon.$$

定理の証明は [13, 定理 3.2] と同様なので省略する.

値関数の境界での挙動を考える.

補題 4.3. Ω が仮定 ($\Omega1$) をみたし, f が仮定 ($f2$) をみたすとする. また F は任意の $\epsilon > 0$ で Γ_ϵ 上 Lipschitz 連続とする. このとき, 任意の $z \in \partial\Omega$ に対して, 値関数 u_ϵ が次をみたす.

$$u_\epsilon(x) \to F(z)\ (x \to z, \epsilon \to 0), \quad x \in \Omega.$$

証明の概略. まずは, 値関数 u_ϵ を $f \equiv 1$ となる円環領域に制限する. 制限した領域で重みのない p-Laplace 方程式のゲーム [14] を考える. ただし, 内側の境界では境界条件として u_ϵ を制限した関数を採用する. p-Laplace 方程式のゲームから得られる値関数 w_ϵ と元の値関数 u_ϵ が円環領域上で一致することが示せるので, w_ϵ の境界付近の挙動を調べることで結論が得られる. □

relaxed limit $\underline{u}$ が粘性優解になることを示す.

補題 4.4. ゲームによって定まる 値関数 u_ϵ の relaxed limit $\underline{u}$ は, (F) の粘性優解になる.

証明の概略. $x \in \Omega$ を固定して, その近傍で滑らかな関数 ϕ をとる. $x_1^\epsilon \in B_\epsilon(x)$ を次を満たすようとる.

$$\phi(x_1^\epsilon) = \min_{\overline{B}_\epsilon(x)} \phi.$$

Taylor 展開より,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\left[\max_{\overline{B}_\epsilon(x)} \phi + \min_{\overline{B}_\epsilon(x)} \phi\right] - \phi(x) \geq \frac{1}{2} D^2\phi(x)(x_1^\epsilon - x)\cdot(x_1^\epsilon - x) + \mathcal{O}(\epsilon^3),\\
&\fint_{B_\epsilon(0)} \phi(x+h)dh - \phi(x) = \frac{\epsilon^2}{2(n+2)}\Delta\phi(x) + \mathcal{O}(\epsilon^3),\\
&\phi\Big(x + \epsilon^2 \frac{Df(x)}{|Df(x)|}\Big) = \phi(x) + \frac{\epsilon^2}{|Df(x)|} D\phi(x)\cdot Df(x) + \mathcal{O}(\epsilon^3).
\end{aligned}$$

を得る. $\underline{u} - \phi$ が $x_0 \in \Omega$ で局所最小値をもつとする. このとき以下を満たすような点列 $x_\epsilon \in \Omega$ がとれる. (relaxed limit を極限として採用したため, 近似した関数が局所最小値を取る点が x に収束する.)

$$x_\epsilon \to x_0\ (\epsilon \to 0),$$

$$u_\epsilon(x_\epsilon) - \phi(x_\epsilon) \leq u_\epsilon(y) - \phi(y) + \epsilon^3, \quad y \in B_r(x_\epsilon).$$

Taylor 展開から得た 3 式と (DPP) とあわせて結論を得る. □

同様にして $\overline{u}$ が粘性劣解になることも得られる.

定理 2.1 の証明. relaxed limit の定義から $\underline{u} \leq \overline{u}$ となる. また, $\underline{u}$ は (F) の粘性優解, $\overline{u}$ は (F) の粘性劣解になることと,

$$\underline{u} = \overline{u} = F \quad \text{on } \partial\Omega$$

から, 粘性解に対する比較定理がつかえるので,

$$\underline{u} \geq \overline{u} \quad \text{in } \Omega$$

となる. 以上より, Ω 上で $\underline{u} = \overline{u}$ なので u_ϵ は粘性解に一様収束することがわかる. $\square$

参考文献

[1] M. G. Crandall, H. Ishii, P. L. Lions, *User's guide to viscosity solutions of second order partial differential equations.* Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) 27 , no. 1, 1–67, 1992.

[2] L. C. Evans and P. E. Souganidis, *"Differential games and representation formulas for solutions of Hamilton-Jacobi-Isaacs equations."* Indiana Univ. Math. J. 33, no. 5, 773–797, 1984.

[3] W. H. Fleming and H. M. Soner, *"Controlled Markov processes and viscosity solutions. Second edition."* Stochastic Modelling and Applied Probability, 25. Springer, New York, xviii+429 pp, 2006.

[4] Y. Fukui, *"Construction of weak solutions of a weighted inverse mean curvature flow."* Adv. Math. Sci. Appl. 30 , no. 1, 23–37, 2021.

[5] J. Heinonen, T. Kilpeläinen and O. Martio, *"Nonlinear potential theory of degenerate elliptic equations."* Oxford Mathematical Monographs. Oxford Science Publications. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, vi+363 pp. ISBN: 0-19-853669-0, 1993.

[6] V. Julin and P. Juutinen, *"A new proof for the equivalence of weak and viscosity solutions for the p-Laplace equation."* Comm. Partial Differential Equations 37, no. 5, 934–946, 2012.

[7] P. Juutinen, P. Lindqvist and J. J. Manfredi, *"On the equivalence of viscosity solutions and weak solutions for a quasi-linear equation."* SIAM J. Math. Anal. 33 , no. 3, 699–717, 2001.

[8] R. V. Kohn and S. Serfaty, *"A deterministic-control-based approach to fully nonlinear parabolic and elliptic equations."* Comm. Pure Appl. Math. 63 , no. 10, 1298–1350, 2010.

[9] R. V. Kohn and S. Serfaty, *"A deterministic-control-based approach to motion by curvature."* Comm. Pure Appl. Math. 59 , no. 3, 344–407, 2006.

[10] M. Lewicka and J. J. Manfredi, *"The obstacle problem for the p-laplacian via optimal stopping of tug-of-war games."* Probab. Theory Related Fields 167 , no. 1-2, 349–378, 2017.

[11] Q. Liu, A. Schikorra and X. Zhou, *"A game-theoretic proof of convexity-preserving properties for motion by curvature."* Indiana Univ. Math. J. 65 , no. 1, 171–197, 2016.

[12] H. Luiro, M. Parviainen and E. Saksman, *"Harnack's inequality for p-harmonic functions via stochastic games."* Comm. Partial Differential Equations 38 , no. 11, 1985–2003, 2013.

[13] H. Luiro, M. Parviainen and E. Saksman, *"On the existence and uniqueness of p-harmonious functions."* Differential Integral Equations. 27, no. 3-4, 201–216, 2014.

[14] J. J. Manfredi, M. Parviainen and J. D. Rossi, *"On the definition and properties of p-harmonious functions."*, Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (5) 11, no. 2, 215–241, 2012.

[15] Y. Peres, O. Schramm, S. Sheffield and D. B. Wilson, *Tug-of-war and the infinity Laplacian.* J. Amer. Math. Soc. 22 , no. 1, 167–210, 2009.

[16] Y. Peres and S. Sheffield, *"Tug-of-war with noise: a game-theoretic view of the* p*-Laplacian."* Duke Math. J. 145 , no. 1, 91–120, 2008.