体の拡大による高次元周期再帰方程式の生成

株式会社ブレインパッド
弓林　司 (Tsukasa YUMIBAYASHI)

概要

n 周期再帰方程式とは任意の初期点が n 周期点であるような漸化式である．本発表では任意の n 周期的再帰方程式を基に “体の拡大” を用いて高次元 n 周期再帰方程式を (無限個) 生成する方法について紹介する．

1　導入

n 周期再帰方程式 (Periodic Recurrence Equation; PRE)[1, 2] は任意の初期点が n 周期点であるような漸化式である[*1]：

$$\boldsymbol{F} : \mathbb{K}^d \to \mathbb{K}^d \text{ is PRE of period } n \quad \Leftrightarrow \; {}^{\forall}\boldsymbol{x} \in \mathbb{K}^d,\ \boldsymbol{x} = \boldsymbol{F}^{(n)}(\boldsymbol{x}) \tag{1}$$

1 次元 2 周期再帰方程式の例

$$x^{(n+1)} = \frac{a}{x^{(n)}}, \quad a \neq 0, \quad x^{(n)}, x^{(n+1)}, a \in \mathbb{C}, \quad n \in \mathbb{Z} \tag{2}$$

$$x^{(0)} \to x^{(1)} = \frac{a}{x^{(0)}} \to x^{(2)} = \frac{a}{\frac{a}{x^{(0)}}} = x^{(0)} \tag{3}$$

2 次元 5 周期再帰方程式の例

$$x^{(n+1)} = \frac{1 + x^{(n)}}{y^{(n)}}, \quad y^{(n+1)} = x^{(n)}, \quad x^{(n)}, y^{(n)}, x,^{(n+1)} y^{(n+1)} \in \mathbb{C}, \quad n \in \mathbb{Z} \tag{4}$$

$$\begin{aligned}\left(x^{(0)}, y^{(0)}\right) &\to \left(x^{(1)}, y^{(1)}\right) = \left(\frac{1 + x^{(0)}}{y^{(0)}}, x^{(0)}\right) \to \left(x^{(2)}, y^{(2)}\right) = \left(\frac{1 + x^{(0)} + y^{(0)}}{x^{(0)}y^{(0)}}, \frac{1 + x^{(0)}}{y^{(0)}}\right) \to \\ &\to \left(x^{(3)}, y^{(3)}\right) = \left(\frac{1 + y^{(0)}}{x^{(0)}}, \frac{1 + x^{(0)} + y^{(0)}}{x^{(0)}y^{(0)}}\right) \to \left(x^{(4)}, y^{(4)}\right) = \left(y^{(0)}, \frac{1 + y^{(0)}}{x^{(0)}}\right) \to \\ &\to \left(x^{(5)}, y^{(5)}\right) = \left(x^{(0)}, y^{(0)}\right)\end{aligned} \tag{5}$$

[*1] 本発表では簡単の為, PRE として有理写像力学系の形のものを考えているが, 本発表の議論は一般の漸化式, 即ち, 一般の差分方程式の形の PRE について成り立つ.

PRE は任意の初期点に対し, その軌道が解っている系であり, 可積分系分野において重要な研究対象として期待されていた. しかし, PRE の例は比較的最近まで [1, 2, 3, 4] などで与えられた低い次元のものしか知られておらず, PRE についての研究はあまり盛り上がっていなかった.

そんな中 [5] において不変周期点代数多様体（Invariant Variety of Periodic Points; IVPP）[6][7][8] を持つ写像力学系を用いて多くの高次元高周期 PRE が発見された. IVPP とは, 不変量を持つ写像力学系に対し, その周期点集合が不変量一定面に一致する様なもので,PRE は写像力学系を IVPP 上に制限することによって得ることができる:

IVPP を持つ写像力学系の例

写像 (2 次元 Möbius 写像)

$$x^{(n+1)} = x^{(n)}\frac{1-y^{(n)}}{1-x^{(n)}}, y^{(n+1)} = y^{(n)}\frac{1-x^{(n)}}{1-y^{(n)}}, \quad x^{(n)}, y^{(n)}, x,^{(n+1)} y^{(n+1)} \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{Z} \tag{6}$$

不変量

$$x^{(n+1)}y^{(n+1)} = x^{(n)}y^{(n)} = \cdots = x^{(0)}y^{(0)} =: r\left(x^{(0)}, y^{(0)} =\right) \tag{7}$$

3 周期 IVPP

$$\begin{aligned} 3\,\text{周期点集合} &= \left\{\left(x^{(0)}, y^{(0)}\right) \in \mathbb{C} \middle| \left(x^{(3)}\left(x^{(0)}, y^{(0)}\right), y^{(3)}\left(x^{(0)}, y^{(0)}\right)\right) = \left(x^{(0)}, y^{(0)}\right)\right\} \\ &= \left\{\left(x^{(0)}, y^{(0)}\right) \in \mathbb{C} \middle| r\left(x^{(0)}, y^{(0)}\right) + 3 = 0\right\} \end{aligned} \tag{8}$$

3 周期再帰方程式

$$x^{(n+1)} = \frac{3+x^{(n)}}{1-x^{(n)}}, \quad x^{(n)}, x^{(n+1)} \in \mathbb{C}, \quad n \in \mathbb{Z} \tag{9}$$

$$x^{(0)} \to x^{(1)} = \frac{3+x^{(0)}}{1-x^{(0)}} \to x^{(2)} = \frac{-3+x^{(0)}}{1-x^{(0)}} \to x^{(3)} = x^{(0)} \tag{10}$$

本発表では高次元 PRE を生成するためのアルゴリズムを紹介したい. その為に関連する先行研究 [9] について簡単に紹介する. 上記例にあるように PRE の周期性は “シンボリックな計算” によって得られることが解る. 即ち, 上記では変数として $\mathbb{C}$ を採用したが, 四則演算*2 さえ出来れば, その周期性が担保されることが解る. この性質に注目し, [9] では PRE の複素変数 ($x \in \mathbb{C}$) を 2 倍個の実変数を用いて陽に複素化 ($x + iy, x, y \in \mathbb{R}$) し, 改めて複素変数 ($x, y \in \mathbb{C}$) と見なすことで 2 倍次元の PRE を生成する方法が提案された:

*2 但し, 冪零元などがあるとその限りではないので, 一般に “体であれば” と言うべきだろう.

1 次元 2 周期再帰方程式の 2 倍次元化の例

$$x^{(n+1)} = \frac{1}{x^{(n)}} \quad \Rightarrow \quad x^{(n+1)} + \sqrt{-1}y^{(n+1)} = \frac{1}{x^{(n)} + \sqrt{-1}y^{(n)}}$$
$$\Rightarrow \quad x^{(n+1)} = \frac{x^{(n)}}{\left(x^{(n)}\right)^2 + \left(y^{(n)}\right)^2}, \quad y^{(n+1)} = \frac{-y^{(n)}}{\left(x^{(n)}\right)^2 + \left(y^{(n)}\right)^2} \tag{11}$$

本発表では [9] の結果を任意の "体の拡大" の場合に拡張し (任意個の) 径数を持つ (任意次元の) 高次元 PRE の生成について紹介する.

2　主張

[9] で本質的だったのは PRE が "シンボリックな周期性" を持つことと, 変数が棲む "体を拡大" [*3] してもシンボリックな周期性が保たれることであった. 従って元々の PRE の変数の棲む体 $\mathbb{K}$ を拡大する事で拡大次数倍次元の高次元 PRE が得られることが予想される. ここではそのアイディアの概略について述べる:

$\boldsymbol{F}$ を d 次元写像[*4]

$$\boldsymbol{F} : (x_1, \ldots, x_d) \mapsto (X_1, \ldots, X_d), \quad x_i, X_i \in \mathbb{K}, \quad i = 1, \ldots, d$$

とする. このとき "拡大写像" $\boldsymbol{A}[2]$ [*5]

$$A[2]_i : x_i \mapsto x_i + \sqrt{\alpha} x_{d+i}, \quad i = 1, \ldots, d \tag{12}$$

を定義する. この写像を用いることで $\boldsymbol{F}$ の "拡大写像" $\boldsymbol{F}[1] : \mathbb{K}^{2d} \to \mathbb{K}^{2d}$ は

$$F[2] : (x_1, \ldots, x_d, x_{d+1}, \ldots, x_{2d}) \mapsto (X_1, \ldots, X_d, X_{d+1}, \ldots, X_{2d}) \tag{13}$$

で与えられる. 但し

$$X_i + \sqrt{\alpha} X_{d+i} = [F(A[2]_1(x_1), \ldots, A[2]_d(x_d))]_i, \quad i = 1, \ldots, d \tag{14}$$

である. 主張は $\boldsymbol{F}$ が PRE であるとき, 拡大写像 $\boldsymbol{F}[2]$ が PRE となることであるが自明であるので証明は省略する.

3　例

3.1　2 周期 PRE

2 周期 PRE $X = \frac{1}{x}$ を例に幾つかの高次元化を紹介する:

[*3] [9] では実質 $\mathbb{R}$ 上の写像を $\mathbb{C}$ 上の写像へ "拡大" し高次元化したことになっている.
[*4] 以降は簡単の為 $\boldsymbol{x}^{(n)} = \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}^{(n+1)} = \boldsymbol{X}$ と書くことにする.
[*5] ここでは簡単の為,2 次拡大を例に説明する.

- 2 次拡大 ($\mathbb{K} \Rightarrow \mathbb{K}(\sqrt{\alpha})$):

$$X + \sqrt{\alpha}Y = \frac{1}{x + \sqrt{\alpha}y} \tag{15}$$

より

$$X = \frac{x}{x^2 - \alpha y^2},\ Y = \frac{-y}{x^2 - \alpha y^2} \tag{16}$$

- 3 次拡大 ($\mathbb{K} \Rightarrow \mathbb{K}(^3\sqrt{\alpha})$):

$$X +^3 \sqrt{\alpha}Y +^3 \sqrt{\alpha^2}Z = \frac{1}{x +^3 \sqrt{\alpha}y +^3 \sqrt{\alpha^2}z} \tag{17}$$

より

$$X = \frac{x^2 - \alpha yz}{R},\ Y = \frac{\alpha z^2 - xy}{R},\ Z = \frac{y^2 - xz}{R} \tag{18}$$

ここで

$$R = x^3 + \alpha y^3 + \alpha^2 z^3 - 3\alpha xyz \tag{19}$$

- 4 次拡大 ($\mathbb{K} \Rightarrow \mathbb{K}(\sqrt{\alpha}, \sqrt{\beta})$):

$$X + \sqrt{\alpha}Y + \sqrt{\beta}Z + \sqrt{\alpha\beta}W = \frac{1}{x + \sqrt{\alpha}y + \sqrt{\beta}z + \sqrt{\alpha\beta}w} \tag{20}$$

より

$$X = \frac{Ax - 2\alpha\beta Bw}{R},\ Y = -\frac{Ay - 2\beta Bz}{R},\ Z = -\frac{Az - 2\alpha By}{R},\ W = \frac{Aw - 2Bx}{R} \tag{21}$$

ここで

$$A = x^2 - \alpha y^2 - \beta z^2 + \alpha\beta w^2,\ B = xw - yz,\ R = A^2 - 4\alpha\beta B^2 \tag{22}$$

3.2　5 周期 PRE

5 周期 PRE $X = \frac{1+x}{y}, Y = x$ を例に高次元化を紹介する:

- 3 次拡大 ($\mathbb{K} \Rightarrow \mathbb{K}(^3\sqrt{\alpha})$):

$$\begin{aligned}
X &= \frac{y^2(1+x) + \alpha(-uv - zyv - wyu - xuv + zu^2) + \alpha^2 wv^2}{R} \\
Z &= -\frac{y(-u + yz - xu) + \alpha(v^2 - wyv + xv^2 - zuv + wu^2)}{R} \\
W &= \frac{xu^2 - zyu - xyv + wy^2 + u^2 - yv + \alpha(zv^2 - wuv)}{R} \\
Y &= x,\ U = z,\ V = w,
\end{aligned} \tag{23}$$

ここで

$$R = y^3 + \alpha u^3 + \alpha^2 v^3 - 3\beta yuv$$

4　まとめ

本発表では "体の拡大" による高次元 PRE の生成について紹介した．本発表の結果を[*6] 用いれば "体の拡大" によって径数[*7] を持つ高次元 PRE を生成することができる．

また, 紙面の関係で紹介できなかったが,IVPP を持つ写像力学系について同様の操作を行うことで, 径数を持つ高次元写像力学系, 及び, 高次元 IVPP を生成することができるが, また別な機会に紹介したい．

参考文献

[1] R. L. Graham, D. E. Knuth and O. Patashnik, *Concrete Mathematics* (Addison-Wesley), 1994.

[2] R. Hirota and H. Yahagi, *J. Phys. Soc. Jpn.*, **71**, 2867, 2002.

[3] 広田良吾, 高橋大輔, *"差分と超離散"*, 共立出版, 2003.

[4] A. Cima, A. Gasull, and V. Manõsa, *J. Difference Equations and Appl.*, **12**, 697 UTF2013716, 2006.

[5] S. Saito and N. Saitoh, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **40**, 12775-12787, 2007.

[6] S. Saito and N. Saitoh, *J. Phys. Soc. Jpn.*, **76** No.2 p.024006, 2007.

[7] S. Saito and N. Saitoh *J. Math. Phys*, **51** 063501, 2010.

[8] S. Saito and N. Saitoh, *"Invariant varieties of periodic points"* in Mathematical Physics Research Developments, 2008 Nova Science Publishers, Inc., Capt.3 pp 85-139, 2008.

[9] T. Yumibayashi, *J. Difference Equations and Appl.*, , 2017.

[*6] 必要に応じ繰り返し．

[*7] 例で与えた $\sqrt{\alpha}$ などで与えられる α など．