Full Exceptional Collections of Line Bundles on the Blow-up of $\mathbb{P}^5$ along Segre Threefold

早稲田大学大学院 基幹理工学研究科 数学応用数理専攻
吉田智輝 (Tomoki YOSHIDA)

概 要

代数多様体上の連接層の導来圏において，Kuznetsov の fullness 予想とは，例外列の生成性とその長さの同値性を主張するものであり，連接層の導来圏分野における重要な予想の一つである．本発表では，5 次元射影空間を Segre 3-fold に沿って爆発することにより得られる多様体上では，直線束からなる例外列について Kuznetsov の fullness 予想が成立することを具体的な計算と分類によって示す.

1 導入

代数多様体上の連接層の導来圏 (定義 2.4) は，連接層のアーベル圏の対象のなす複体のホモトピー圏を局所化することで得られる，連接層の複体からコホモロジー的な情報のみを抜き出すためにつくられる圏である．ここで，(三角) 圏の局所化とは，環の局所化と同様，圏の中で指定したクラスを可逆にしてしまう操作である．導来圏の世界では，コホモロジカルな情報のみを複体から取り出したいわけであったから，2 つの複体が互いに等しいコホモロジーをもつとき，同型な対象となるように局所化のクラスを与える．具体的には，**擬同型** (定義 2.3) と呼ばれる，複体の射であって各次数のコホモロジー上に誘導される任意の射が同型であるようなもののなす積閉系によりホモトピー圏を局所化する．このようなアーベル圏の複体の圏の擬同型による局所化を通じて得られた導来圏の対象は，実際に各次数でのコホモロジーが一致するとき，またそのときに限って同型となる．従って多様体のコホモロジカルな情報を含む導来圏は，元の代数多様体の持つ幾何学的性質の情報を多く反映している．導来圏において最も重要な定理の 1 つが，次の Bondal-Orlov reconstruction Theorem である．

Theorem 1.1. ([BO01]) 非特異射影代数多様体 X の標準束が豊富，もしくは反豊富であるとする，非特異射影代数多様体 Y であって，導来圏の間の同値 $D^b(X) \simeq D^b(Y)$ が存在するとき，$X \simeq Y$ である.

しかし，一般には導来圏の構造を調べるのは容易ではない．現在知られている最も有効な手段の一つが，導来圏の**半直交分解**である．これは導来圏をいくつかの小さい三角圏に分割するものであり，ある種の導来圏における既約分解である．その中でも最も単純な構造を持つのが**例外生成列** (定義 2.10) と呼ばれる種類の半直交分解である．非特異射影代数多様体 X の導来圏が長さ l の例外生成列を持てば，X の Grothendieck 群は $K_0(X) \simeq \mathbb{Z}^{\oplus l}$ であるため，その長さは概括的な導来圏の大きさの基準となっている．しかし残念なことに，極大な半直交分解は一意には定まらない．特に，その構成要素の順番を入れ替える**変異関手**を通じて組みひも群が作用し，ひとつの半直交分解からいくつかの別の表示を作ることができる.

では，導来圏内の最大の長さを持つ例外列は常に例外生成列になるだろうか？話はそう単純ではない．Böhning らは，[BGvBKS15] にて長さ最大な例外列であって例外生成列にならないようなものを構成した．その例外列の左直交成分（つまり，例外列のあまりの部分）は，非自明な対象を持ちながら，自明な Grothendieck 群を持つ．このような性質を持つ部分三角圏は，phantom 部分圏と呼ばれている．Phantom 部分圏の存在/非存在性問題は現在盛んに研究されている問題のひとつである (例えば，[GO13] 参照)．Phantom 部分圏の非存在性問題は難解な問題であり，古典的に知られている曲線の場合を除き，射影平面 $\mathbb{P}^2$ の場合のみ示されている ([Pir20])．Phantom 部分圏の非存在性から条件を緩めたものに，次の Kuznetsov の fullness 予想がある．

Conjecture 1.2. (Kuznetsov の fullness 予想 [Kuz14]) X を非特異射影代数多様体とする．X の導来圏 $D^b(X)$ が長さ l の例外生成列をもつとき，$D^b(X)$ の任意の長さ l の例外列は例外生成列である．

上の予想を満たすことは，導来圏が phantom 部分圏を持たないための必要条件となることは，導来圏の Grothendieck 群を経由した議論を用いて示すことができる．この予想はいくつかの場合で示されている．例えば，del Pezzo 曲面（[Pir20]），Hirzebruch 曲面（[Hil04]），ピカール数 3 か 4 を持つ Toric 曲面 ([HI13]) である．さらに条件を緩めた，上記予想の直線束版，つまり次の予想も近年研究されている．

Conjecture 1.3. (Kuznetsov の fullness 予想　直線束版) X を非特異射影代数多様体とする．X の導来圏 $D^b(X)$ が長さ l の例外生成列をもつとき，$D^b(X)$ の任意の長さ l の直線束からなる例外列は例外生成列である．

本予想は，[LYY19] にて $\mathbb{P}^3$ の 1 点，直線，twisted cubic curve C にそれぞれ沿った爆発，$\mathrm{Bl}_{pt}(\mathbb{P}^3)$，$\mathrm{Bl}_l(\mathbb{P}^3)$，$\mathrm{Bl}_C(\mathbb{P}^3)$ に対して示された．その後，Altmann らは Toric の手法を用いて任意のピカール数 2 を持つ Toric 多様体に対して上記の予想を示した ([AW21])．

本稿では，以下に定義する超平面切断の関係にある 3 つの多様体，X_0，X_1，X_2 について考える．Y_0 を Segre 埋め込み $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^5$ の像とする．Y_0 は 2×3 の generic determinantal variety である．H_1 と H_2 を $\mathbb{P}^5$ の一般の超平面とし，Y_0 の超平面切断を $Y_1 \coloneqq Y_0 \cap H_1 \subset \mathbb{P}^4$，$Y_2 \coloneqq Y_0 \cap H_1 \cap H_2 \subset \mathbb{P}^3$ とする．このとき，Y_0 が determinantal variety であることに注意すると，Y_1 は Hirzebruch surface $\mathbb{F}_1 \subset \mathbb{P}^4$ に同型であり，Y_2 は twisted cubic curve $C \subset \mathbb{P}^3$ に同型となる．以上の記法のもとで，$X_i \coloneqq \mathrm{Bl}_{Y_i}\mathbb{P}^{5-i}$ と定める．Y_2 が $\mathbb{P}^3$ 内の twisted cubic curve に同型であったことから，X_2 が直線束版の Kuznetsov の fullness 予想を満たすことは既に示されている ([LYY19])．

Theorem 1.4. X_0 上の導来圏の任意の長さ 12 の直線束からなる例外列は例外生成列である．

Theorem 1.5. X_1 上の導来圏の任意の長さ 9 の直線束からなる例外列は例外生成列である．

証明は，X_i 上の直線束からなる長さ最大の例外列を分類したのち，それらが生成列であることを示す．計算のキーとなるのは，これらの多様体が射影空間の Blowing-up の構造に加え，射影空間上の射影空間束の構造を持っていることである．実際 Ray は，これらの爆発 X_i $(i = 0, 1, 2)$ が $\mathbb{P}^2$ 上の射影空間束の構造をもっていることを示した [Ray20, Theorem 3.1, Theorem 3.4, and Corollary 3.6]．本稿では，続く Section にて導来圏の定義と半直交分解に関する概説をする．特に，本研究で対象となる，半直交分解のなかでも最も単純な構造を持つ，直線束からなる例外列と Cohomologically zero 直線束との関係，また，半直交分解から別の半直交分解を得るプロセスである変異関手について定義と基本的な性質を紹介する．最後に，定理 1.4 の証明の概略を述べる．定理 1.5 の証明は定理 1.4 の証明と基本的にパラレルである．

2　導来圏と半直交分解

本節では，導来圏に関する定義や基本的な結果を紹介する．より詳しくは，[BK89], [Bon89], [Huy06], [Orl92] などを参照されたい．

2.1　導来圏

本節では，導来圏の定義を復習する．

Definition 2.1. (Abel 圏の複体の圏) $\mathcal{A}$ を Abel 圏とする．$\mathrm{Kom}(\mathcal{A})$ で Abel 圏 $\mathcal{A}$ の複体の圏，つまり，対象は複体

$$A^\bullet : \cdots \to A^0 \to A^1 \to A^2 \to \cdots$$

であり，射は複体の射であるような圏とする．

本稿では，複体といえば一般に有界であるとする．つまり $|i| \gg 0$ で $A^i = 0$ であるとする．

Definition 2.2. ($\mathrm{Kom}(\mathcal{A})$ のホモトピー圏) $f, g \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Kom}(\mathcal{A})}(A, B)$ に対し．$f \sim g$ で複体の射のホモトピー同値を表す．$\mathrm{Kom}(\mathcal{A})$ のホモトピー圏 $K(\mathcal{A})$ を，$\mathrm{Ob}(K(\mathcal{A})) \coloneqq \mathrm{Ob}(\mathrm{Kom}(\mathcal{A}))$, $\mathrm{Hom}_{K(\mathcal{A})}(A, B) \coloneqq \mathrm{Hom}_{\mathrm{Kom}(\mathcal{A})}(A, B)/\sim$ により定める．

Definition 2.3. (擬同型射) 射 $f \in \mathrm{Hom}_{K(\mathcal{A})}(A, B)$ が擬同型であるとは，任意の $i \in \mathbb{Z}$ に対して，誘導されたコホモロジー間の写像，$H^i(f) : H^i(A) \to H^i(B)$ が同型写像となるときをいう．$Qis(\mathcal{A})$ で，$K(\mathcal{A})$ のすべての擬同型射を集めた集合とする．

Definition 2.4. (Abel 圏の導来圏) Abel 圏 $\mathcal{A}$ に対し，その導来圏 $D(\mathcal{A})$ を，ホモトピー圏 $K(\mathcal{A})$ の $Qis(\mathcal{A})$ による局所化と定める．

代数多様体 X に対して，X 上の連接層のなす Abel 圏 $\mathrm{Coh}(X)$ から得られる導来圏を $D^b(X)$ と書く．この導来圏を単に X の導来圏とよぶこともある．

2.2　導来圏の半直交分解

分解の定義を与える前に，半直交分解の成分となりうる部分圏の条件を与える．次の許容部分三角圏は導来圏において，群における正規部分群のような役割を果たす．

Definition 2.5. (許容部分圏）$\mathcal{D}$ を三角圏，$\mathcal{C}$ を $\mathcal{D}$ の充満部分圏とする．$\mathcal{C}$ が許容部分圏 とは，包含関手 $i : \mathcal{C} \hookrightarrow \mathcal{D}$ が右随伴関手 $i^!$, と左随伴関手 i^* をもつときをいう．

今後，部分圏といえは，特に断らない限り許容部分三角圏を指すものとする．

導来圏の半直交分解は，興味ある対象である導来圏を，より小さいいくつかの三角圏に取り換える操作であり，導来圏を調べる際に基本的な役割を果たす．

Definition 2.6. (半直交分解) $\mathcal{D}$ を三角圏とする．部分圏の列 $\{\mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_l\}$ が $\mathcal{D}$ の半直交分解であるとは，次の条件を満たすときである:

(1) $\mathrm{Hom}(\mathcal{C}_m, \mathcal{C}_n) = 0$ for $m > n$,

(2) 各対象 $D \in \mathcal{D}$ に対し，次の列

$$0 = D_l \to D_{l-1} \to \cdots \to D_1 \to D_0 = D$$

　であって，$Cone(D_i \to D_{i-1}) \in \mathcal{C}_i$ を満たすものが存在.

$\{\mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_l\}$ が $\mathcal{D}$ の半直交分解を与えるとき, $\mathcal{D} = \langle \mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_l \rangle$ と書く.

Example 2.7. $\mathcal{D}$ を三角圏，$\mathcal{C}$ をその許容部分三角圏とする．このとき，次の半直交分解が存在する．

$$\mathcal{D} = \langle \mathcal{C}^{\perp}, \mathcal{C} \rangle = \langle \mathcal{C}, {}^{\perp}\mathcal{C} \rangle,$$

ここで，$\mathcal{C}^{\perp} := \{A \in \mathcal{D}\} \mid \mathrm{Hom}(\mathcal{C}, A) = 0\} \subset \mathcal{D}$，${}^{\perp}\mathcal{C} := \{A \in \mathcal{D}\} \mid \mathrm{Hom}(A, \mathcal{C}) = 0\} \subset \mathcal{D}$ である.

Example 2.8. (Beilinson Collection [Beĭ78]) n 次元射影空間 $\mathbb{P}^n$ の導来圏は，$\mathbb{P}^n$ の超平面のクラスを H と書くとき，次の半直交分解を持つ.

$$D^b(\mathbb{P}^n) = \langle \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}, \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(H), \ldots, \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}((n-1)H), \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(nH) \rangle.$$

Y を非特異射影的代数多様体，$\mathscr{E}$ を Y 上のランク $r+1$ 局所自由層とし，$\pi\colon X = \mathbb{P}(\mathscr{E}) \to Y$ を projective bundle，$\mathscr{O}_X(1)$ でその Grothendieck tautological line bundle を表す.

Theorem 2.9. (Orlov's projective bundle formula [Orl92]) 上記の設定の下，次の半直交分解が存在.

$$D^b(X) = \langle \pi^* D^b(Y), \pi^* D^b(Y) \otimes \mathscr{O}_X(1), \ldots, \pi^* D^b(Y) \otimes \mathscr{O}_X(r) \rangle.$$

2.3 直線束からなる例外列と Cohomologically zero 直線束

部分圏の中でも，最も単純な構造を持つもののひとつは，例外対象と呼ばれるひとつの対象から生成される部分圏である.

Definition 2.10. (例外対象と例外列) 三角圏の対象 $E \in \mathcal{D}$ が例外的であるとは，次の条件を満たすときをいう.

$$\mathrm{Hom}(E, E[i]) = \begin{cases} 0, & i \neq 0 \\ k, & i = 0. \end{cases}$$

$\{E_1, \ldots, E_l\}$ を $\mathcal{D}$ 内の例外対象からなる列とする．この列が *exceptional collection* であるとは，任意の $i > j$ と $l \in \mathbb{Z}$ に対して，

$$\mathrm{Hom}(E_i, E_j[l]) = 0.$$

が成り立つときをいう.

Definition 2.11. (例外生成列) $\mathcal{D}$ 内の例外列 $\{E_1, \ldots, E_l\}$ が生成列であるとは，次を満たすときをいう:

$$\langle E_1, \ldots, E_l \rangle^{\perp} = 0.$$

Definition 2.12. (直線束からなる正規例外列) 直線束からなる例外列 $\{\mathscr{O}_X(D_0), \ldots, \mathscr{O}_X(D_n))\}$ が正規例外列であるとは，$\mathscr{O}_X(D_0) \simeq \mathscr{O}_X$ であるときをいう.

Proposition 2.13. (例外列の正規化 [LYY19, Lemma 3.4]) 直線束からなる例外列 $\{\mathscr{O}_X(D_0), \cdots, \mathscr{O}_X(D_n)\}$ に対して, $\mathscr{O}_X(-D_0)$ をテンソルすることによって得られる列, $\{\mathscr{O}_X, \mathscr{O}_X(D_1 - D_0), \cdots, \mathscr{O}_X(D_n - D_0)\}$, は再び例外列である．更に，もとの例外列が生成列であることと，その正規化が生成列であることは同値である．

Proposition 2.14. ([LYY19, Lemma 2.9]) $\mathcal{D}$ 内の二つの例外列が，同じ長さを持ちかつ高々一つの対象のみ異なる成分を持つとき，片方の例外列が生成列であることともう一方が生成列であることは同値である．

Definition 2.15. (Cohomologically zero 直線束) $\mathscr{L}$ を非特異射影代数多様体 X 上の直線束とする．$\mathscr{L}$ が *cohomologically zero* 直線束であるとは，任意の i に対して，$H^i(X, \mathscr{L}) = 0$ が成り立つときをいう．

Remark. X の導来圏 $D^b(X)$ が直線束からなる (正規化された) 例外生成列 $\{\mathscr{O}_X, \mathscr{O}_X(D_1), \ldots, \mathscr{O}_X(D_l)\}$ を持つとする．このとき各直線束 $\mathscr{O}_X(-D_i)$ は cohomologically zero である．実際，半直交分解 $D^b(X) = \langle \mathscr{O}_X, \ldots, \mathscr{O}_X(D_l) \rangle$ の半直交性から，

$$H^i(\mathscr{O}_X(-D_j)) = \mathrm{Hom}_{D^b(X)}(\mathscr{O}_X(D_j), \mathscr{O}_X[i]) = 0$$

となるのである．

2.4 変異関手

導来圏の半直交分解や例外生成列は一般に一意には定まらない．特に，一つの半直交分解からその順番を入れ替えることで別の分解表示を作り出す操作が存在する．この操作は変異関手を通じて定義される．より詳細には，[BK89] を参照されたい．

Definition 2.16. (変異関手) $\mathcal{C}$ を $\mathcal{D}$ の許容部分三角圏とする．このとき，各対象 $F \in \mathcal{D}$ に対し，次の二つの完全三角が存在する:

$$\mathbb{R}_{\mathcal{C}}(F) \longrightarrow F \longrightarrow ii^*(F) \xrightarrow{[1]} \mathbb{R}_{\mathcal{C}}(F)[1],$$

$$ii^!(F) \longrightarrow F \longrightarrow \mathbb{L}_{\mathcal{C}}(F) \xrightarrow{[1]} ii^!(F)[1].$$

これらの対応によって，右変異関手 $\mathbb{R}_{\mathcal{C}}$ と左変異関手 $\mathbb{L}_{\mathcal{C}}$ を定める．

Proposition 2.17. 三角圏の半直交分解 $\mathcal{D} = \langle \mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_l \rangle$ が存在するとする．このとき，変異関手は次の半直交分解を誘導する．

$$\mathcal{D} = \langle \mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_{i-2}, \mathcal{C}_i, \mathbb{R}_{\mathcal{C}_i}(\mathcal{C}_{i-1}), \ldots, \mathcal{C}_l \rangle,$$

$$\mathcal{D} = \langle \mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_{i-1}, \mathbb{L}_{\mathcal{C}_i}(\mathcal{C}_{i+1}), \mathcal{C}_i, \ldots, \mathcal{C}_l \rangle.$$

Proposition 2.18. 非特異射影代数多様体 X が，2 つの成分からなる半直交分解 $D^b(X) = \langle \mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2 \rangle$ を持つとする．このとき，変異関手は次のように表現される：

$$\mathbb{R}_{\mathcal{C}_2}(\mathcal{C}_1) = \mathcal{C}_1 \otimes \omega_X^{-1}, \quad \mathbb{L}_{\mathcal{C}_1}(\mathcal{C}_2) = \mathcal{C}_2 \otimes \omega_X.$$

Proposition 2.19. 三角圏 $\mathcal{D}$ が半直交分解 $\mathcal{D} = \langle \mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_k, \mathcal{C}_{k+1}, \ldots, \mathcal{C}_n \rangle$ を持ちかつ，ある k について，$\mathrm{Hom}(\mathcal{C}_k, \mathcal{C}_{k+1}) = 0$ を満たすとする．このとき，

$$\mathbb{L}_{\mathcal{C}_k}(\mathcal{C}_{k+1}) = \mathcal{C}_{k+1}, \quad \mathbb{R}_{\mathcal{C}_{k+1}}(\mathcal{C}_k) = \mathcal{C}_k$$

である．つまり，この場合変異関手は半直交分解の隣り合った 2 つの成分を入れ替える作用になるのである．

Example 2.20. (Mutations of full exceptional collections) $\{E_1, \ldots, E_l\}$ を $D^b(X)$ の例外生成列とする．$\mathcal{C}_1 = \langle E_1 \rangle$，$\mathcal{C}_2 = \langle E_2, \ldots, E_l \rangle$ とみることにより, Proposition 2.18 を適用して，次の例外生成列を得る:

$$\{E_2, \ldots, E_l, E_1 \otimes \omega^{-1}\}.$$

本稿では，例外生成列 $\langle \mathscr{O}_X(D_0), \ldots, \mathscr{O}_X(D_n) \rangle$ から Proposition 2.18 を適用し，正規化することによって例外生成列

$$\langle \mathscr{O}_X, \mathscr{O}_X(D_2 - D_1), \ldots, \mathscr{O}_X(D_n - D_1), \mathscr{O}_X(D_0 - K_X - D_1) \rangle$$

を得る操作を"*mutation of Serre type and normalization*" と呼ぶことにする．

3 定理 1.4 の証明の概略

本節では，主定理 1.4 の証明概要を紹介する．また，節を通じて，Y を Segre 埋め込み $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^5$ の像，$X := \mathrm{Bl}_Y \mathbb{P}^5$ とする．定理 1.5 の証明は 1.4 とパラレルである．初めに，Grothendieck-Riemann-Roch を用いて $\chi(\mathscr{O}_X(aH + bE))$ を計算する．

Proposition 3.1.

$$\chi(\mathscr{O}_X(aH + bE)) = \frac{1}{120}(a + 2b + 1)(a + 2b + 2)(a + 2b + 3) f(a, b),$$

where $f(a, b) := a^2 - 6ab - 6b^2 + 9a - 12b + 20$.

Proof. (Outline)

- Normal bundle$\mathscr{N}_{Y_0/\mathbb{P}^5}$ の Chern 類を計算する，
- 交点数 $H^i.E^{5-i} \quad (i = 0 \sim 5)$ を計算する，
- 以上の結果を用いて，次の Hirzebruch-Riemann-Roch の定理から従う．

$$\chi(\mathscr{O}_X(aH + bE)) = \int_X \mathrm{ch}(\mathscr{O}_X(aH + bE)) \mathrm{Td}(X).$$

□

上の計算結果を用いると，cohomologically zero 直線束を分類することができるのである．

Proposition 3.2. $\mathscr{O}_X(aH + bE)$ は，次のいずれかを満たせば cohomologically zero 直線束である．

1. $a + 2b = -1, -2, -3$,

2. $(a, b) = (-1, -2), (-1, 1), (-2, -1), (-2, 1), (-4, 0)$, $(-4, 2)$, $(-5, 0)$, $(-5, 3)$.

Proof. (Outline) $\mathscr{O}_X(aH + bE)$ が cohomologically zero であれば，$\chi(\mathscr{O}_X(aH + bE)) = 0$ であるので, $a + 2b = -1, -2 - 3$ もしくは $f(a, b) = 0$ が成り立つ．従って上記の候補が導かれるが，それらが実際に cohomologically zero であることは各々のコホモロジーの消滅を計算することによって示す． □

Remark. 上の命題で挙げられた cohomologically zero 直線束の一覧は，すべての $\chi = 0$ の整数解を列挙しているわけではない．しかし，今後の議論によって絶対値の大きい整数解は，主定理の証明のためには考慮する必要がないことがわかる．

ここで，今後の煩雑さを避けるため，divisor に関する Notation を導入しておく．
$B_{0,b_0} = (1 + 2b_0)H - b_0E$, $B_{1,b_1} = (2 + 2b_1)H - b_1E$, $B_{2,b_2} = (3 + 2b_2)H - b_2E$, $B_3 = H + 2E$, $B_4 = H - E$, $B_5 = 2H + E$, $B_6 = 2H - E$, $B_7 = 4H$, $B_8 = 4H - 2E$, $B_9 = 5H$, $B_{10} = 5H - 3E$.

$\{\mathscr{O}, \mathscr{O}(D_1, \ldots, \mathscr{O}(D_k))\}$ が正規化された直線束からなる例外列であるとする．このとき第 2 項以降，cohomologically zero 直線束であったから，Prroposition3.2 により，各 D_i は B_j $(j = 1, 2, \ldots, 10)$ に一致する．また，半直交性から任意の $i < j$ に対して，

$$0 = \mathrm{Hom}(\mathscr{O}(D_j), \mathscr{O}(D_i)) = H^i(\mathscr{O}(D_i - D_j))$$

が成り立つ．表 1 は，$i, j = 0, \ldots, 10$ に対し，その差が再び cohomologically zero であるかどうかを示した図である．例えば，B_4 と B_5 のチェックマークは，$\mathscr{O}(B_5 - B_4)$ が B_i のいずれかに一致する，つまり cohomologically zero 直線束になることを示している．表 1 を用いると，直線束からなる例外列を作ることができる．例えば，第 2 項として B_7 をとると，表の行をみることで，第 3 項以降に来うるのは $B_{2,-1}$，$B_{2,3}$，B_3，B_9 に限られることがわかる．更に第 3 項として B_9 をとると，同様に表からこの例外列は長さが 4 以上になることはないことがわかる．

簡単のため，正規化された例外列 $\{\mathscr{O}, \mathscr{O}(D_1), \ldots, \mathscr{O}(D_k)\}$ を $\{D_1, \ldots, D_k\}$ と略記する．

	B'_0	B'_1	B'_2	B_3	B_4	B_5	B_6	B_7	B_8	B_9	B_{10}
B_0	$b'_0 = b_0 + 1$, $b_0 + 2$	✓	✓	$b_0 = -1$, -2		✓	$b_0 = 0$, -2	✓	$b_0 = 1$, -1	$b_0 = 0$, 1	
B_1	$b'_0 = b_1 + 1$, $b_1 + 3$	$b'_1 = b_1 + 1$, $b_1 + 2$	✓	✓		✓		✓		✓	
B_2		$b'_1 = b_2 + 1$, $b_2 + 3$	$b'_2 = b_2 + 1$, $b_2 + 2$	✓		✓		✓		✓	
B_3						✓				✓	
B_4	✓	✓	$b'_2 = 0,\ 1$			✓	✓		✓		✓
B_5			$b'_2 = 0,\ 2$	✓				✓		✓	
B_6	✓	✓	✓					✓	✓		
B_7			$b'_2 = 1,\ 3$	✓						✓	
B_8	✓	✓	✓							✓	✓
B_9											
B_{10}	✓	✓	$b'_2 = 2, 3$		✓		✓		✓		

表 1: 例外列となる直線束のペア

Proposition 3.3. $D_1 = B_6$ であるような長さ 12 の例外列は以下のいずれかに一致する.

1. $\{B_6, B_8, B_{0,b_0}, B_{0,b_0+1}, B_{0,b_0+2}, B_{1,b_1}, B_{1,b_1+1}, B_{1,b_1+2}, B_{2,b_2}, B_{2,b_2+1}, B_{2,b_2+2}\}$
2. $\{B_6, B_8, B_{0,b_0}, B_{0,b_0+1}, B_{1,b_0+1}, B_{0,b_0+2}, B_{1,b_0+2}, B_{1,b_0+3}, B_{2,b_2}, B_{2,b_2+1}, B_{2,b_2+2}\}$
3. $\{B_6, B_8, B_{0,b_0}, B_{0,b_0+1}, B_{1,b_0-1}, B_{0,b_0+2}, B_{1,b_0}, B_{1,b_0+1}, B_{2,b_2}, B_{2,b_2+1}, B_{2,b_2+2}\}$
4. $\{B_6, B_8, B_{0,b}, B_{0,b+1}, B_{1,b+1}, B_{0,b+2}, B_{1,b+2}, B_{2,b+2}, B_{1,b+3}, B_{2,b+3}, B_{2,b+4}\}$
5. $\{B_6, B_8, B_{0,b}, B_{0,b+1}, B_{1,b+1}, B_{0,b+2}, B_{1,b+2}, B_{2,b}, B_{1,b+3}, B_{2,b+1}, B_{2,b+2}\}$
6. $\{B_6, B_8, B_{0,b}, B_{0,b+1}, B_{1,b-1}, B_{0,b+2}, B_{1,b}, B_{2,b}, B_{1,b+1}, B_{2,b+1}, B_{2,b+2}\}$
7. $\{B_6, B_8, B_{0,b}, B_{0,b+1}, B_{1,b-1}, B_{0,b+2}, B_{1,b}, B_{2,b-2}, B_{1,b+1}, B_{2,b-1}, B_{2,b}\}$
8. $\{B_6, B_{0,-1}, B_8, B_{0,0}, B_{1,0}, B_{0,1}, B_{1,1}, B_{2,1}, B_{1,2}, B_{2,2}, B_{2,3}\}$
9. $\{B_6, B_{0,1}, B_8, B_{0,2}, B_{1,2}, B_{0,3}, B_{1,3}, B_{2,3}, B_{1,4}, B_{2,4}, B_{2,5}\}$
10. $\{B_6, B_{0,-1}, B_8, B_{0,0}, B_{1,0}, B_{0,1}, B_{1,1}, B_{2,-1}, B_{1,2}, B_{2,0}, B_{2,1}\}$
11. $\{B_6, B_{0,1}, B_8, B_{0,2}, B_{1,2}, B_{0,3}, B_{1,3}, B_{2,1}, B_{1,4}, B_{2,2}, B_{2,3}\}$
12. $\{B_6, B_{0,-1}, B_8, B_{0,0}, B_{1,-2}, B_{0,1}, B_{1,-1}, B_{2,-1}, B_{1,0}, B_{2,0}, B_{2,1}\}$
13. $\{B_6, B_{0,1}, B_8, B_{0,2}, B_{1,0}, B_{0,3}, B_{1,1}, B_{2,1}, B_{1,2}, B_{2,2}, B_{2,3}\}$
14. $\{B_6, B_{0,-1}, B_8, B_{0,0}, B_{1,-2}, B_{0,1}, B_{1,-1}, B_{2,-3}, B_{1,0}, B_{2,-2}, B_{2,-1}\}$
15. $\{B_6, B_{0,1}, B_8, B_{0,2}, B_{1,0}, B_{0,3}, B_{1,1}, B_{2,-1}, B_{1,2}, B_{2,0}, B_{2,1}\}$

Proof. (Outline) Orlov の projective bundle formula(Theorem 2.9) から，$D^b(X)$ は長さ 12 の例外生成列を持つ．従って簡単な考察により例外列の長さは 12 を超えることはないことがわかる．上で議論したように，表から分岐を数え上げると．上のリストが得られる． □

変異関手を用いると，Proposition で得られた 1 つの例外列から mutation of Serre type and normalization によって新たな (正規化された) 例外列を得ることができる．例えば，次の表 2 は Proposition の (10) の例外列に対して繰り返し mutation of Serre type and normalization を適用することで得られる例外列を表したものである．

このようにして得られた例外列は 171 種類になり，また初等的な分岐の組み合わせによって長さ最大の例外列はこの 171 種類のいずれかに一致することがわかる．したがって問題は，これらの例外列のすべてが例外生成列であるかどうかである．

Theorem 3.4. 任意の X 上の長さ 12 の直線束からなる例外列は例外生成列である．

Proof. (Outline) 変異関手は生成性を保つから，命題内の B_6 を第 2 項に持つ 15 の例外列に対して示せば十分である．Orlov's projective bundle formula (Theorem 2.9) から例外列 (1) は例外生成列である．更に，(1) の b_0，b_1，b_2 に適切な値を代入し，Proposition2.19 を適用することで (2) から (15) の列も得られる．ここに Proposition2.14 を使えば生成性を示すことができる． □

以上により，主定理が示された．

	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	D_6	D_7	D_8	D_9	D_{10}	D_{11}
0	B_6	$B_{0,-1}$	B_8	$B_{0,0}$	$B_{1,0}$	$B_{0,1}$	$B_{1,1}$	$B_{2,-1}$	$B_{1,2}$	$B_{2,0}$	$B_{2,1}$
1	$B_{0,-2}$	B_6	$B_{0,-1}$	$B_{1,-1}$	$B_{0,0}$	$B_{1,0}$	$B_{2,-2}$	$B_{1,1}$	$B_{2,-1}$	$B_{2,0}$	B_7
2	B_{10}	B_6	$B_{0,1}$	B_8	$B_{0,2}$	$B_{1,0}$	$B_{0,3}$	$B_{1,1}$	$B_{1,2}$	$B_{2,2}$	$B_{2,3}$
3	$B_{0,-2}$	$B_{1,-2}$	$B_{0,-1}$	$B_{1,-1}$	$B_{2,-3}$	$B_{1,0}$	$B_{2,-2}$	$B_{2,-1}$	B_5	B_7	B_3
4	$B_{0,0}$	B_6	$B_{0,1}$	$B_{1,-1}$	$B_{0,2}$	$B_{1,0}$	$B_{1,1}$	$B_{2,1}$	$B_{2,2}$	B_7	$B_{2,3}$
5	B_4	B_6	$B_{0,-1}$	B_8	$B_{0,0}$	$B_{0,1}$	$B_{1,1}$	$B_{1,2}$	$B_{2,0}$	$B_{1,3}$	$B_{2,1}$
6	$B_{0,0}$	$B_{1,-2}$	$B_{0,1}$	$B_{1,-1}$	$B_{1,0}$	$B_{2,0}$	$B_{2,1}$	B_5	$B_{2,2}$	B_7	B_9
7	$B_{0,-2}$	B_6	$B_{0,-1}$	$B_{0,0}$	$B_{1,0}$	$B_{1,1}$	$B_{2,-1}$	$B_{1,2}$	$B_{2,0}$	B_7	$B_{2,1}$
8	B_{10}	B_6	B_8	$B_{0,2}$	$B_{0,3}$	$B_{1,1}$	$B_{0,4}$	$B_{1,2}$	$B_{2,2}$	$B_{1,3}$	$B_{2,3}$
9	$B_{0,-2}$	$B_{0,-1}$	$B_{1,-1}$	$B_{1,0}$	$B_{2,-2}$	$B_{1,1}$	$B_{2,-1}$	B_5	$B_{2,0}$	B_7	B_3
10	B_6	$B_{0,1}$	$B_{0,2}$	$B_{1,0}$	$B_{0,3}$	$B_{1,1}$	$B_{2,1}$	$B_{1,2}$	$B_{2,2}$	B_7	$B_{2,3}$
11	$B_{0,0}$	$B_{0,1}$	$B_{1,-1}$	$B_{0,2}$	$B_{1,0}$	$B_{2,0}$	$B_{1,1}$	$B_{2,1}$	B_5	$B_{2,2}$	B_7

表 2: The FEC obtained by mutation of Serre type from (10)

参考文献

[AW21] K. Altmann and F. Witt, *The structure of exceptional sequences on toric varieties of Picard rank two*, preprint arXiv:2112.14637 (2021).

[Beĭ78] A. A. Beĭlinson, *Coherent sheaves on* $\mathbf{P}^n$ *and problems in linear algebra*, Funktsional. Anal. i Prilozhen. **12** (1978), no. 3, 68–69 (Russian).

[BGvBKS15] C. Böhning, H.-C. Graf von Bothmer, L. Katzarkov, and P. Sosna, *Determinantal Barlow surfaces and phantom categories*, J. Eur. Math. Soc. (JEMS) **17** (2015), no. 7, 1569–1592.

[BK89] A. I. Bondal and M. M. Kapranov, *Representable functors, Serre functors, and reconstructions*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **53** (1989), no. 6, 1183–1205, 1337 (Russian); English transl., Math. USSR-Izv. **35** (1990), no. 3, 519–541.

[Bon89] A. I. Bondal, *Representations of associative algebras and coherent sheaves*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **53** (1989), no. 1, 25–44 (Russian); English transl., Math. USSR-Izv. **34** (1990), no. 1, 23–42.

[BO01] A. Bondal and D. Orlov, *Reconstruction of a variety from the derived category and groups of autoequivalences*, Compositio Math. **125** (2001), no. 3, 327–344.

[GO13] S. Gorchinskiy and D. Orlov, *Geometric phantom categories*, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. **117** (2013), 329–349.

[GK04] A. L. Gorodentsev and S. A. Kuleshov, *Helix theory*, Mosc. Math. J. **4** (2004), no. 2, 377–440, 535 (English, with English and Russian summaries).

[Hil04] L. Hille, *Exceptional sequences of line bundles on toric varieties*, Mathematisches Institut, Georg-August-Universität Göttingen: Seminars 2003/2004, Universitätsdrucke Göttingen, Göttingen, 2004, pp. 175–190.

[HI13] A. Hochenegger and N. O. Ilten, *Exceptional sequences on rational $\mathbb{C}^*$-surfaces*, Manuscripta Math. **142** (2013), no. 1-2, 1–34.

[Huy06] D. Huybrechts, *Fourier-Mukai transforms in algebraic geometry*, Oxford Mathematical Monographs, The Clarendon Press, Oxford University Press, Oxford, 2006.

[KO94] S. A. Kuleshov and D. O. Orlov, *Exceptional sheaves on Del Pezzo surfaces*, Izv. Ross. Akad. Nauk Ser. Mat. **58** (1994), no. 3, 53–87 (Russian, with Russian summary); English transl., Russian Acad. Sci. Izv. Math. **44** (1995), no. 3, 479–513.

[Kuz14] A. Kuznetsov, *Semiorthogonal decompositions in algebraic geometry*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians—Seoul 2014. Vol. II, Kyung Moon Sa, Seoul, 2014, pp. 635–660.

[Lee20] D. W. Lee, *Classification of full exceptional collections on smooth toric Fano varieties with Picard rank two*, preprint arXiv:2005.09783 (2020).

[LYY19] W. Liu, S. Yang, and X. Yu, *Classification of full exceptional collections of line bundles on three blow-ups of* $\mathbb{P}^3$, J. Korean Math. Soc. **56** (2019), no. 2, 387–419.

[Orl92] D. O. Orlov, *Projective bundles, monoidal transformations, and derived categories of coherent sheaves*, Izv. Ross. Akad. Nauk Ser. Mat. **56** (1992), no. 4, 852–862 (Russian, with Russian summary); English transl., Russian Acad. Sci. Izv. Math. **41** (1993), no. 1, 133–141.

[Pir20] D. Pirozhkov, *Admissible Subcategories of del Pezzo Surfaces*, ProQuest LLC, Ann Arbor, MI, 2020. Thesis (Ph.D.)–Columbia University.

[Ray20] N. Ray, *Examples of blown up varieties having projective bundle structures*, Proc. Indian Acad. Sci. Math. Sci. **130** (2020), no. 1, Paper No. 15, 11.