# 球面カンドルの埋め込みと結び目の不変量

九州大学大学院数理学府数理学専攻
米村拳太郎 (Kentaro YONEMURA) *

## 1　考える問題

次のような問題を筆者は考えている。

**予想 1.1（埋め込み予想）**　代数的連結かつ位相的連結な smooth quandle $X$ に対し、適当な Lie 群 $G$ と、滑らかな埋め込み $\iota : X \hookrightarrow G$ でカンドル準同型であるものが存在する。

未定義語は後述の説明を参照されたい。気分としては、等質空間上に位相と整合性のある代数構造を定めると、位相構造と代数構造を Lie 群に埋め込めるであろう、というものである。この文献では、予想 1.1 が「球面カンドル」と呼ばれる場合に成り立つことを示す。

## 2　カンドル

### 2.1　カンドルの基礎

この節では、カンドル (quandle) について、必要な事項をまとめる。詳細は [7, 10] を参照されたい。カンドルは Joyce [6] と Matveev [8] によってそれぞれ独立に定義された代数系であり、歴史的には結び目理論への応用するため生みだされた。定義は次のようになる。

**定義 2.1（[6, 8]）**　空でない集合 $X$ と二項演算 $\triangleright : X \times X \to X$ の組 $(X, \triangleright)$ が次の 3 つのの条件 Q1〜Q3 を満たすとき、カンドルという。

Q1 （冪等性）任意の $x \in X$ に対して $x \triangleright x = x$ が成り立つ。
Q2 （逆元）任意の $x, y \in X$ に対して $x = z \triangleright y$ を満たす $z \in X$ が一意に存在する。
Q3 （自己分配性）任意の $x, y, z \in X$ に対して $(x \triangleright y) \triangleright z = (x \triangleright z) \triangleright (y \triangleright z)$ が成り立つ。

カンドルの定義に現れる条件 Q1〜Q3 は、結び目の射影図に対する「Reidemeister 移動」と呼ばれる操作を抽出したものだ (図 1 参照) というのが、結び目理論の専門家の見解である。

この文献を読む上で必要になるカンドルの例をいくつか述べておく。

**例 2.2**　群 $G$ に新たな演算を $x \triangleright y = y^{-1}xy$ $(x, y \in G)$ と定めるとカンドルとなる。これを共役カンドルといい、$\mathrm{Conj}\, G$ と書く。

**例 2.3**　群 $G$ とその同型写像 $\phi : G \to G$ に対して、演算を $x \triangleright y = \phi(xy^{-1})y$ $(x, y \in G)$ と定めるとカンドルとなる。これを 一般化 Alexander カンドルという。共役カンドルも一般化 Alexander カンドルの一種であ

* e-mail: yonemura.kentaro.527@s.kyushu-u.ac.jp

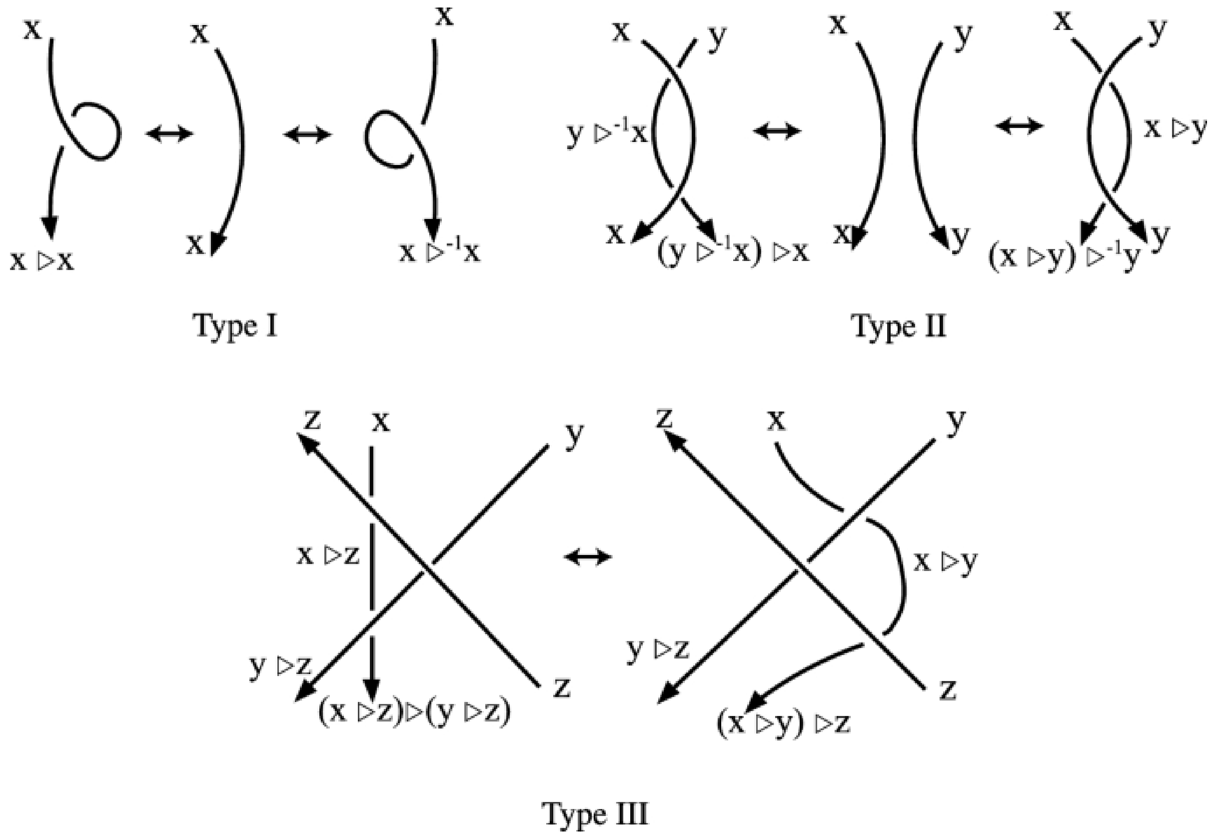


図 1　カンドル演算の幾何学的解釈

る。さらに、固定点のなす群 $G_0 = \{x \in G \mid \phi(x) = x\}$ の任意の部分群 $H$ に対し、$H \backslash G$ には自然にカンドル構造が一般化 Alexander カンドルから誘導される。

**例 2.4（[1]）**　$\langle -, - \rangle$ を $\mathbb{R}^{n+1}$ 上の Euclid 内積とする。このとき、$n$ 次元球面 $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \langle x, x \rangle = 1\}$ 上に演算 $x \triangleright y = 2\langle x, y \rangle y - x$ $(x, y \in S^n)$ と定めるとカンドルとなる。これを球面カンドルといい、$S^n_{\mathbb{R}}$ と書く。

カンドルの構造を調べる上で、内部自己同型群と呼ばれる群が重要な役割を果たす。残りでは、その説明を行いたい。カンドル準同型とは、$f(x \triangleright y) = f(x) \triangleright f(y)$ $x, y \in X$ を満たすカンドル間の写像 $f : X \to Y$ のことであり、特に全単射なカンドル準同型は同型であるという。重要な例として、カンドルの定義中に現れる写像

$$S_y : X \to X \quad x \mapsto x \triangleright y$$

があり、カンドル自己同型であることが知られている。自己同型の族 $\{S_y\}_{y \in X}$ により生成される自己同型群の部分群 $\mathrm{Inn}\, X$ をカンドル $X$ の内部自己同型群という。内部自己同型群 $\mathrm{Inn}\, X$ は $X$ に右から自然に作用する。この作用が推移的なカンドルを (代数的) 連結なカンドルという。球面カンドルは代数的連結なカンドルの例である。

## 2.2　smooth quandle

“smooth quandle” という概念は、石川 [5] によって定義された概念である。多様体構造を持つカンドルである。正確に述べると、次のようになる。

**定義 2.5（[5]）** $X$ を滑らかな多様体とする。滑らかな演算 $\triangleright : X\times X\to X$ がカンドル構造を定め、各 $y\in X$ に対して自己同型 $S_y : X\to X$ が微分同相であるとき、$(X,\triangleright)$ を smooth quandle という。

代表的な例として、球面カンドルや Lie 群から得られる共役カンドルなどがある。また例 2.3 を用いて、大量に構成することが出来る。次の定理により、代数的連結なカンドルは等質空間としての構造を持つことが知られている。

**定理 2.6（[5]）** $(X,\triangleright)$ を代数的連結かつ位相的連結な smooth quandle とする。このとき、内部自己同型群 $\mathrm{Inn}\,X$ は Lie 群であり、その単位元連結成分 $\mathrm{Inn}^0\,X$ も $X$ に推移的に作用する。

この文献で扱う球面カンドルの場合は野坂 [11] により、球面カンドルの自己同型群 $\mathrm{Inn}\,S^n_{\mathbb{R}}$ は $SO(n+1)$ または $O(n+1)$ と同型となることが知られており、上記の定理が成り立つことは見やすい。次で定まる滑らかな写像は、定理 4.1 を示す上でも重要である：

$$S^n_{\mathbb{R}}\to \mathrm{Inn}\,S^n_{\mathbb{R}}\quad y\mapsto S_y.$$

# 3　Lie 群の作用に関する準備

この節では、定理 4.1 を示す上で重要な概念である、被覆を用いた Lie 群による作用の持ち上げについて述べる。この節の内容は [9] のものを定理 4.1 の証明で使いやすいように再構成したものである。

## 3.1　Lie 群の作用と Lie-Palais の定理

$G$ を有限次元 Lie 群､$M$ を滑らかな多様体とする。このとき､群作用 $M\curvearrowleft G$ は反群準同型 $\tau : G\to \mathrm{Diff}(M)$ だと思うことが出来る。ここから、$G$ の Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の $M$ への極小作用 (infinitesimal action)、つまり Lie 代数射 $d\tau:\mathfrak{g}\to\mathfrak{X}(M)$ が次のようにして定まる：$X\in\mathfrak{g}$ に対して、

$$(X_M(x))(\xi)=\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}\xi(x\cdot\exp tX)$$

として定まるベクトル場 $X_M\in\mathfrak{X}(M)$ が得られる。ただし、$x\in M$ であり $\xi$ は $x$ の近傍で定義される $C^\infty$ 級関数である。これにより

$$d\tau:\mathfrak{g}\to\mathfrak{X}(M)\quad X\to X_M$$

が定まる。

逆に、Lie 代数射 $\phi:\mathfrak{g}\to\mathfrak{X}(M)$ が与えられたとき、群作用は構成されるのか、という問題を考えることが出来る。これへの解答のひとつが Lie-Palais の定理である。

**定理 3.1（Palais）** $M$ を滑らかな多様体、$G$ を連結かつ単連結な Lie 群とし、$\mathfrak{g}$ を $G$ の Lie 代数とする。Lie 代数射 $\phi:\mathfrak{g}\to\mathfrak{X}(M)$ に対して、$d\tau=\phi$ を満たす群作用 $\tau:G\to\mathrm{Diff}(M)$ が一意に存在する。

## 3.2　群作用の持ち上げ

[9] に述べられている群作用の被覆を通した持ち上げを構成する。ただし、本文中ではなく、[9, Remark2.2] で述べられている同値な構成方法のスケッチを復元したものである。

$\pi:\tilde{M}\to M$ を連結な多様体 $M$ を底とした被覆写像、$p:\tilde{G}\to G$ を連結 Lie 群 $G$ を底とする普遍被覆写像とする。特に、$p$ は Lie 代数としての同型 $p_*:\tilde{\mathfrak{g}}\to\mathfrak{g}$ を誘導する。

滑らかな群作用 $M \curvearrowleft G$ が構成されているとき、対応する反群準同型 $\tau : G \to \mathrm{Diff}\, M$ が得られ、そこから Lie 代数射 $d\tau : \mathfrak{g} \to \mathfrak{X}(M)$ が得られる。ここで、被覆写像が局所同型であることを用いると、各 $X \in \mathfrak{g}$ に対して、

$$\begin{cases} p_*(\tilde{X}) = X \\ d\pi \tilde{X}_{\tilde{M}} = X_M \circ \pi \end{cases}$$

を満たす $\tilde{X} \in \tilde{\mathfrak{g}}$ と $\tilde{M}$ 上のベクトル場 $\tilde{X}_{\tilde{M}} \in \mathfrak{X}(\tilde{M})$ が一意に存在する。これにより、Lie 代数射

$$\phi : \tilde{\mathfrak{g}} \to \mathfrak{X}(\tilde{M}) \quad \tilde{X} \mapsto \tilde{X}_{\tilde{M}}$$

が得られる。Lie-Palais の定理により、$d\tilde{\tau} = \phi$ を満たす群作用 $\tilde{\tau} : \tilde{G} \to \mathfrak{X}(\tilde{M})$ が誘導される。以上より、群作用 $M \curvearrowleft G$ から群作用 $\tilde{M} \curvearrowleft \tilde{G}$ が誘導される。

### 3.3 被覆により誘導された群作用と被覆射の関係

Lie 群 $G$ が多様体 $M$ に右から滑らかに作用しているとする。$M$ の普遍被覆 $\pi : \tilde{M} \to M$ と被覆 $\pi_N : N \to M$ と群作用 $M \curvearrowleft G$ を考えると、前節の議論により、$\tilde{M}$ と $N$ にそれぞれ普遍被覆群の右作用が定まる。このとき、2 つの性質を述べておこう。

**命題** 3.2　まず、$p : \tilde{G} \to G$ を被覆写像とすると、図式

$$\begin{array}{ccc} N \times \tilde{G} & \xrightarrow{\text{action}} & N \\ {\scriptstyle \pi_N \times p}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi_N} \\ M \times G & \xrightarrow{\text{action}} & M \end{array}$$

は可換である。

また、次の図式

$$\begin{tikzcd} \tilde{M} \arrow[r, "q_N"] \arrow[d, "\pi"'] & N \arrow[dl, "\pi_N"] \\ M & \end{tikzcd}$$

を可換にする被覆射 $q_N : \tilde{M} \to N$ が誘導される。誘導された群作用と被覆射の関係を述べておきたい。

**命題** 3.3　誘導された群作用と被覆射は可換である。

## 4 球面カンドルの埋め込み

この節での目的は次の定理の証明と応用について述べる。この定理は、埋め込み予想が球面カンドルの場合は成り立つことを示している。事実自体は、証明なしで 2014 年に Eisermann [3, Remark 3.12] で述べられている。

**定理** 4.1（**主定理**）　滑らかな埋め込み $\iota_m : S^m \to Pin(m+1)$ で、$S^m$ を球面カンドル、$Pin(m+1)$ を共役カンドルとみたとき、カンドル準同型となるものが存在する。

### 4.1 証明の概略

次の 4 つのステップを経由して証明を行う。

- 群作用 $\mathbb{R}P^n \curvearrowleft SO(n+1)$ と普遍被覆 $S^n \to \mathbb{R}P^n$ から、群作用を持ち上げ、群作用 $S^n \curvearrowleft Spin(n+1)$ を構成する。
- 球面カンドルの内部自己同型群が $SO(n+1)$ または $O(n+1)$ と同型であることから、$\mathbb{R}P^n$ を $O(n+1)$ に埋め込めることを示す。
- $\mathbb{R}P^n$ の $O(n+1)$ への埋め込みから $S^n$ を $Pin(n+1)$ へ埋め込めることを示す。
- 球面を球面カンドル、$Pin(n+1)$ を共役カンドルとするとき、構成した埋め込みがカンドル準同型であることを示す。この際、3.3 節の性質を用いる。

### 4.2 応用

定理 4.1 は、結び目理論における応用が 2 つある。まず、Clark-Saito [2] により構成された longitudinal mapping への応用である。次に、結び目の補空間*1の Chern-Simons 不変量の計算である。元々、Inoue-Kabaya [4] が主 $PSL(2,\mathbb{C})$ 束に関する Chern-Simons 不変量 (複素体積) を計算する手法を開発していた。それまでは 3 次元多様体論を駆使して苦労しないと求められなかったが、「彩色とカンドル 2 コサイクル」という 2 つの情報に集約して、比較的簡潔に求められるようになった。定理 4.1 により、Inoue-Kabaya [4] の手法を援用すれば、主 $SU(2)(\cong Spin(3))$ 束に関する Chern-Simons 不変量を計算することが出来るようになると思われる。

## 5 将来の課題

恐らく、予想は正しくないのではないかと著者は考えている。そのため、次の 2 つの課題がある：

- 予想が成り立つ smooth quandle のクラスの特徴づけ、
- 予想の反例の構成。

予想が成り立つクラスとして、Riemann 対称空間上に定まるカンドルが挙げられる。これは証明することが出来れば、定理 4.1 の拡張となる。「Riemann 対称空間上に定まるカンドル」の定義を述べて終わりにしたい。

**定義 5.1** Riemann 対称空間 $X$ とその点対称の族 $\{s_y\}_{y\in X}$ を考える。二項演算を $x \triangleright y = s_y(x)$ と定めると、$(X, \triangleright)$ はカンドルとなる。

## 参考文献


[1] Hiiseyin Azcan and Roger Fenn. Spherical representations of the link quandles. *Turkish J. of Mathematics*, Vol. 18, pp. 102–110, 1994.

[2] W. Edwin Clark and Masahico Saito. Longitudinal mapping knot invariant for SU(2). *J. Knot Theory Ramifications*, Vol. 27, No. 11, pp. 1843014, 22, 2018.

[3] Michael Eisermann. Quandle coverings and their Galois correspondence. *Fund. Math.*, Vol. 225, No. 1, pp. 103–168, 2014.

[4] Ayumu Inoue and Yuichi Kabaya. Quandle homology and complex volume. *Geometriae Dedicata*, Vol. 171, No. 1, pp. 265–292, 2014.

[5] Katsumi Ishikawa. On the classification of smooth quandles. preprint.


*1 結び目の補空間はトーラスと同相な境界を持つ 3 次元多様体である。

[6] David Joyce. A classifying invariant of knots, the knot quandle. *J. Pure Appl. Algebra*, Vol. 23, No. 1, pp. 37–65, 1982.

[7] Seiichi Kamada. *Surface-knots in 4-space.* Springer Monographs in Mathematics. Springer, Singapore, 2017. An introduction.

[8] S. V. Matveev. Distributive groupoids in knot theory. *Mat. Sb. (N.S.)*, Vol. 119(161), No. 1, pp. 78–88, 160, 1982.

[9] James Montaldi and Juan-Pablo Ortega. Notes on lifting group actions. 2008.

[10] Takefumi Nosaka. *Quandles and topological pairs;Symmetry, knots, and cohomology.* SpringerBriefs in Mathematics.

[11] Takefumi Nosaka. Central extensions of groups and adjoint groups of quandles (geometry and analysis of discrete groups and hyperbolic spaces). *RIMS Kokyuroku Bessatsu*, No. 66, pp. 167–184, 2017.