Curves on Rational Normal Scrolls

日本経済大学 経済学部 商学科
矢城 信吾 (Shingo YASHIRO)

概要

本稿では，種数 2 の非特異射影曲線とそれを部分多様体としてもつ Rational Normal Scroll の構成について考察する．この Rational Normal Scroll の極小自由分解を利用して，種数 2 の非特異射影曲線の極小自由分解を決定するのが目的である．

1 はじめに

射影多様体の埋め込みについては古来より研究をされてきた．射影多様体を X とし，D を X 上の非常に豊富な因子としたとき

$$\varphi_D : X \to \mathbb{P} = \mathbb{P}H^0(X, \mathcal{O}_X(D))$$

によって射影空間への埋め込みが定義される．この射影多様体の埋め込みに関連して，次数付き斉次座標環，定義イデアルおよび極小自由分解や Syzygy についても併せて考察される．本稿においては，種数 2 の非特異射影曲線の完備線形系による埋め込みとそれを因子としてもつ Rational Normal Scroll について性質および極小自由分解についての考察を述べる．主な結果は次の通りである：

定理 1.1. C を種数 2 の非特異射影曲線とし，D を $d = \deg D \geq 2g+1$ を満たす C 上の因子とする．

1. *Rational Normal Scroll Surface* を

$$X = \overline{\bigcup_{E \in |K_C|} \operatorname{Span} E}$$

とすると，$\mathbb{P}^1$ 上の階数 2 のベクトル束 $\mathcal{E} = \mathcal{O}(a_1) \oplus \mathcal{O}(a_2) (0 < a_1 \leq a_2)$ の射影化 $\pi : \mathbb{P}(\mathcal{E}) \to \mathbb{P}^1$ と同型であり

$$a_2 - a_1 \leq 3$$

が成り立つ．

2. C が存在するような X は次の通りである：

(*a*) d が奇数のとき

$$\mathcal{E} = \mathcal{O}(\frac{d-3}{2}) \oplus \mathcal{O}(\frac{d-3}{2}) \ \mathit{or}\ \mathcal{O}(\frac{d-5}{2}) \oplus \mathcal{O}(\frac{d-1}{2})$$

となる．

（b）d が偶数のとき

$$\mathcal{E} = \mathcal{O}(\frac{d-4}{2}) \oplus \mathcal{O}(\frac{d-2}{2}) \ \mathit{or} \ \mathcal{O}(\frac{d-6}{2}) \oplus \mathcal{O}(\frac{d}{2})$$

となる．

3. C は $\operatorname{Pic} X$ において

$$C = 2H - (d-6)F$$

とできる．

以下，これらの概説を行っていき，最後に他の曲線に対しての研究の方向性について述べる．

1.1 正規有理曲線（Rational Normal Curve）

この節では，有理曲線の中で基本的である正規有理曲線について概説する．これらの結果は，[1]，[2]，[3]，[4] などからの引き戻しである．以下，$\mathbb{P}^1$ の斉次座標系を $[t_0, t_1]$ とする．すなわち，$H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(1)) = \langle t_0, t_1 \rangle$ とする．射影直線 $\mathbb{P}^1$ も次数 n の因子 D による大域切断

$$H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(D)) = \langle t_0^n, t_0^{n-1}t_1, \ldots, t_0 t_1^{n-1}, t_1^n \rangle$$

を考える．この基底により構成される射 $\varphi : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^n$ の閉埋め込みであり，その像 $C = \varphi_D(\mathbb{P}^1)$ は n 次の有理曲線となる．これを正規有理曲線という．この曲線の定義イデアル I_C は $\binom{n}{2}$ 個の 2 次斉次多項式で生成される．別の表現として曲線 C の定義イデアル I_C は $2 \times n$ 行列

$$M_{n,1} = \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & \cdots & x_{n-1} \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \end{pmatrix}$$

の 2×2 小行列式全体で生成されるイデアル $I_2(M_{n,1})$ に等しい．これは，$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^{n-1}$ を Segre 埋め込みした射影多様体を線形多様体で切断したものである．実際に $X = \sigma_{1,1}(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^{n-1})$ の定義イデアル I_X は $2 \times n$ 行列

$$M = \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & \cdots & x_{n-1} \\ x_n & x_{n+1} & x_{n+2} & \cdots & x_{2n-1} \end{pmatrix}$$

の 2×2 小行列式全体で生成されるイデアル $I_2(M)$ となる．さらに，線形多様体 H は n 次元で

$$H : x_{n+i-1} - x_i = 0 \quad (i = 1, \ldots, n-1)$$

で定義される．これより $C = X \cap H$ および，$I_C = I_X + I_H$ がいえる．

正規有理曲線 $C \subset \mathbb{P}^n$ の極小自由分解については，Eagon-Northcott 複体が対応する：

$$0 \longrightarrow S(-n)^{\oplus(n-1)} \longrightarrow \cdots \longrightarrow S(-r-1)^{\oplus r \binom{n}{r+1}} \longrightarrow \cdots$$

$$\longrightarrow S(-2)^{\oplus \binom{n}{2}} \longrightarrow S \longrightarrow S_C \longrightarrow 0.$$

ただし，$r \geq 1$ とする．これより Betti 数 $\beta_{i,j}$ は，$\beta_{0,0}=1$

$$\beta_{i,i+1} = i\binom{n}{i+1} \ (1 \leq i \leq n-1)$$

であり，それ以外は $\beta_{i,j}=0$ である．

例 1.2. 正規有理曲線の簡単な例として，$v_2 : \mathbb{P}^1 \ni [t_0, t_1] \mapsto [t_0^2, t_0t_1, t_1^2] \in \mathbb{P}^2$ を考えると，平面 2 次曲線 $C : x_0x_2 - x_1^2 = 0$ が定義できる．

例 1.3. 同様に，$v_3 : \mathbb{P}^1 \ni [t_0, t_1] \mapsto [t_0^3, t_0^2t_1, t_0t_1^2, t_1^3] \in \mathbb{P}^3$ を考えると，ねじれ 3 次曲線 C が定義できる．これは $C : x_0x_2 - x_1^2 = 0, x_0x_3 - x_1x_2 = 0, x_1x_3 - x_2^2 = 0$ により定義される．

2 Rational Normal Scroll

より一般的な結果として，Rational Normal Scroll の構成および極小自由分解を考えることができる．Rational Normal Scroll とは，$\mathbb{P}^1$ 上の階数 n のベクトル束 $\mathcal{E}$ の射影化 $\pi : \mathbb{P}(\mathcal{E}) \to \mathbb{P}^1$ をある射影空間 $\mathbb{P}^N$ に埋め込んだものである．具体的には

$$\mathcal{E} = \mathcal{O}(a_1) \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}(a_n) \ (0 < a_1 \leq \cdots \leq a_n)$$

に対して，$N = \sum_{i=1}^n a_i + n - 1$ とおいて埋め込むものである．$X = \mathbb{P}(\mathcal{E})$ の定義イデアル I_X を考える．$D = \sum_{i=1}^n a_i + n$ として $2 \times D$ 行列

$$M_{D,1} = \left(\begin{array}{ccc|ccc|c|ccc} x_{1,0} & \cdots & x_{1,a_1-1} & x_{2,0} & \cdots & x_{2,a_2-1} & \cdots & x_{n,0} & \cdots & x_{n,a_n-1} \\ x_{1,1} & \cdots & x_{1,a_1} & x_{2,1} & \cdots & x_{2,a_2} & \cdots & x_{n,1} & \cdots & x_{n,a_n} \end{array} \right)$$

の 2×2 小行列式全体で生成されるイデアル $I_2(M_{D,1})$ に等しい．$S = k[x_{1,0}, \ldots, x_{n,a_n}]$ における定義イデアル I_X の極小自由分解は

$$0 \longrightarrow S(-N)^{\oplus(N-1)} \longrightarrow \cdots \longrightarrow S(-i-1)^{\oplus i\binom{N}{i+1}} \longrightarrow \cdots$$

$$\longrightarrow S(-2)^{\oplus\binom{N}{2}} \longrightarrow S \longrightarrow S_X \longrightarrow 0.$$

である．

注意 2.1. 階数 1 のベクトル束 $\mathcal{O}(a_1)(a_1 > 0)$ のとき，$X = \mathbb{P}(\mathcal{O}(a_1)) \cong \mathbb{P}^1$ であり，埋め込みは $X \subset \mathbb{P}^{a_1}$ となるから，正規有理曲線を意味する．

注意 2.2. 階数 2 のベクトル束 $\mathcal{E} = \mathcal{O}(a_1) \oplus \mathcal{O}(a_2)(0 < a_1 \leq a_2)$ のとき，$\pi : X = \mathbb{P}(\mathcal{E}) \to \mathbb{P}^1$ に対して，$\mathcal{E}' = \mathcal{E} \otimes \mathcal{O}(-a_2)$ とすると，$X \cong \mathbb{P}(\mathcal{E}')$ となる．これは，*Hirzebruch* 曲面に同型であることがいえる．

注意 2.3. $[t_0, t_1]$ を底空間 $\mathbb{P}^1$ の斉次座標系とし，$[z_1, \ldots, z_n]$ を X 上におけるファイバー $\mathbb{P}^{n-1}$ の斉次座標系とすると，埋め込み先の $\mathbb{P}^N$ 上での $\mathbb{P}(\mathcal{E})$ の斉次座標 $x_{i,j}$ は

$$x_{i,j}|_{\mathbb{P}(\mathcal{E})} = t_0^{a_i - j} t_1^j z_i$$

と表すことができる．

ここで，$\operatorname{Pic} X$ について言及しておく．$i : X \to \mathbb{P}^N$ を埋め込みとし，$\pi : X \to \mathbb{P}^1$ を $\mathbb{P}^{n-1}$ 束とする．$h = [i^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(1)]$ とし，$f = [\pi^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1(1)}]$ とする．このとき

$$\operatorname{Pic} X \cong \mathbb{Z}h \oplus \mathbb{Z}f$$

となる．ここで intersection pairing として

$$h^n = \deg \mathcal{E}, h^{n-1}.f = 1, f^2 = 0$$

がいえる．[*1]Rational Normal Scroll $\mathbb{P}(\mathcal{E})$ と $\mathbb{P}^1$ のコホモロジー群 H^0 については次の関係がいえる：

命題 2.4. $\mathbb{P}^1$ 上の階数 n のベクトル束

$$\mathcal{E} = \mathcal{O}(a_1) \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}(a_n) \ \ (0 \leq a_1 \leq \cdots \leq a_n)$$

の射影化 $X = \mathbb{P}(\mathcal{E})$ について，$a \geq 0$ とすると

$$H^0(X, \mathcal{O}_X(aH + bF)) \cong H^0(\mathbb{P}^1, \operatorname{Sym}^a \mathcal{E} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(b))$$

が成り立つ．

命題 2.5. $D, N, \mathcal{E}, X$ を上述の通りとする．$a \geq 0, b \geq -1$ のとき

$$h^0(X, \mathcal{O}_X(aH + bF)) = (D - n) \begin{pmatrix} a + n - 1 \\ n \end{pmatrix} + (b + 1) \begin{pmatrix} a + n - 1 \\ n - 1 \end{pmatrix}$$

となる．[*2]

2.1　補足事項（正規楕円曲線について）

正規有理曲線と同様に，楕円曲線上の因子 $D = nP_0 (n \geq 3)$ を用いた埋め込み $\varphi_D : C \to \mathbb{P}^{n-1}$ を正規楕円曲線という．この正規楕円曲線の極小自由分解の構成においては，C を含む Rational Normal Scroll Surface の構成が鍵となる：

C を楕円曲線 $(g = 1)$ とし，$P_0 \in C$ とする．C 上の次数 n の因子 $D = nP_0 (n \geq 3)$ に対応する埋め込み $\varphi_D : C \to \mathbb{P}^{n-1}$ における像は n 次曲線となる．これを正規楕円曲線という．

[*1] X 上の minimal section として，$H_0 = H - a_n F$ が取れる．これは $H - rF$ が effective となるような最大の $r \in \mathbb{N}$ とみることができる．

[*2] この式より，X の次数と次元によって h^0 が決まることがわかる．

$H^0(C, \mathcal{O}_C(P_0) = \langle 1 \rangle, H^0(C, \mathcal{O}_C(2P_0)) = \langle 1, f \rangle, H^0(C, \mathcal{O}_C(3P_0)) = \langle 1, f, g \rangle$ とすると Riemann-Roch の定理より

$$H^0(C, \mathcal{O}_C(D)) = \langle 1, f, \ldots, f^i, g, gf, \ldots, gf^j \rangle \ (0 \leq i \leq \lfloor n/2 \rfloor, 0 \leq j \leq \lfloor (n-3)/2 \rfloor)$$

と基底を選ぶことができる．$n = 3$ のとき，$\mathbb{P}^2$ 内の非特異 3 次曲線が得られる．$n = 4$ のときは，4 次曲線となり，2 つの 2 次曲面の完全交叉となる．

この関係式を導出するために，Rational Normal Scroll Surface を構成する．上記の基底の構成を利用して

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \cdots & f^{a-1} & g & \cdots & f^{b-1} \\ f & \cdots & f^a & gf & \cdots & f^b \end{array} \right)$$

を考えると，$2 \times (a+b)$ 行列

$$M(\mathcal{O}_C(2P_0), \mathcal{O}_C((n-2)P_0)) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} z_{1,0} & \cdots & z_{1,a-1} & z_{2,0} & \cdots & z_{2,b-1} \\ z_{1,1} & \cdots & z_{1,a} & z_{2,1} & \cdots & z_{2,b} \end{array} \right)$$

が構成される．ただし，$a = \lfloor n/2 \rfloor, b = \lfloor (n-3)/2 \rfloor$ であり，$\lfloor n/2 \rfloor + 1 + \lfloor (n-3)/2 \rfloor + 1 = n$ である．この 2×2 小行列式全体で定義される $\mathbb{P}^{n-1}(n \geq 4)$ 内の射影曲面が定義できる．

1. $n = 4$ のときは，$\pi : \mathbb{P}(\mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(2)) \to Q_0 \subset \mathbb{P}^3$（$Q_0$ は 2 次錐）となる．[*3]
2. $n \geq 5$ のとき，埋め込み $\varphi : \mathbb{P}(\mathcal{O}(a) \oplus \mathcal{O}(b))) \to X \subset \mathbb{P}^{n-1}$ が構成できて，X は非特異射影曲面（次数 $n-1$ の Hirzebruch 曲面）となる．

先述の通り X は Hirzebruch 曲面に同型であり，その Picard 群は

$$\operatorname{Pic} X \cong \mathbb{Z}h \oplus \mathbb{Z}f$$

で与えられる．ただし，h は超平面切断 $H(\cong \mathbb{P}^1)$ に対応する直線束 $\mathcal{O}_X(1)$ の同型類，f は $\pi : X \to \mathbb{P}^1$ 上のファイバーに対応する直線束 $\mathcal{O}_X(F)(F \cong \mathbb{P}^1)$ の同型類であり，$h^2 = n-1, h.f = 1, f^2 = 0$ である．この曲面上において，正規楕円曲線 C に対応する X 上の因子は $C = 2H - (n-3)F$ である．すなわち，I_X の生成系から，I_C の生成系を構成することを考える．より一般的には，X の極小自由分解を利用して，C の極小自由分解を構成することとなる．X の斉次座標環 S_X 上での C の定義イデアルを $I_{C/X}$ とし，その層化を考えると

$$\widetilde{I_{C/X}} = \mathcal{O}_X((n-3)F - 2H) = \mathcal{O}_X((n-3)F)(-2)$$

を意味する．これより，$I_{C/X}$ の極小自由分解は

$$\bigoplus_{m \geq 0} H^0(X, \mathcal{O}_X((n-3)F)(m))$$

の極小自由分解を -2 シフトしたものだと考えられる．これは Eagon-Northcott 複体の Mapping Cone として構成することができる．

[*3] この射は，特異点 $O \in Q_0$ を中心とした Blow-up を意味する．

定理 2.6. *[5]* $C \subset \mathbb{P}^n (n \geq 3)$ を $n+1$ 次の正規楕円曲線とする．このとき，$S = k[z_0, \dots, z_n]$ における C の極小自由分解は次で与えられる．

$$
\begin{aligned}
0 \to & S(-n-1) \to S(-n+1)^{\oplus (n-2) + \left(\begin{array}{c} n-1 \\ 2 \end{array} \right)} \to S(-i-1)^{\oplus i \left(\begin{array}{c} n-1 \\ i+1 \end{array} \right) + (n-i-1) \left(\begin{array}{c} n-1 \\ i-1 \end{array} \right)} \to \cdots \\
\to & S(-2)^{\oplus \binom{n-1}{2} + (n-2)} \to S \to S_C \to 0.
\end{aligned}
$$

また，*Betti* 数 $\beta_{i,j}$ について，$\beta_{0,0} = 1$ であり

$$\beta_{i,i+1} = i \binom{n-1}{i+1} + (n-i-1) \binom{n-1}{i-1} (1 \leq i \leq n-2), \beta_{n-1,n+1} = 1$$

であり，その他は $\beta_{i,j} = 0$ となる．

3　種数 2 の非特異射影曲線の極小自由分解について

ここで C を $\mathrm{Pic}\, X$ における因子と考える．前節と同様のアイデアで

$$C = 2H - (d-6)F$$

として考えることができるから，その層化を考えると

$$\widetilde{I_{C/X}} = \mathcal{O}_X((d-6)F - 2H) = \mathcal{O}_X((d-6)F)(-2)$$

を意味する．これより，$I_{C/X}$ の極小自由分解は

$$\bigoplus_{m \geq 0} H^0(X, \mathcal{O}_X((d-6)F)(m))$$

の極小自由分解を -2 シフトしたものだと考えられる．これは Elliptic Normal Curve の場合と同様に，Eagon-Northcott 複体の Mapping Cone として構成することができる．

定理 3.1. I_C は $\left(\begin{array}{c} d-3 \\ 2 \end{array} \right) + (d-5)$ 個の 2 次斉次多項式で生成される．

また，Mapping Cone を構成することで極小自由分解については次のことがいえる．

定理 3.2. $C \subset \mathbb{P}^{d-2} (d \geq 5)$ の次数 d，種数 2 の非特異射影曲線とする．このとき，$S = k[z_0, \dots, z_{d-2}]$ における C の極小自由分解は次で与えられる．

$$
\begin{aligned}
0 \to & S(-(d-2))^{\oplus 2} \to S(-(d-2))^{\oplus(d-3)} \oplus S(-(d-3))^{\oplus(d-4)} \to \\
\to & S(-(d-4))^{\oplus \begin{pmatrix} d-3 \\ 3 \end{pmatrix} + (d-5)(d-3)} \to S(-(d-5))^{\oplus 2 \begin{pmatrix} d-3 \\ 4 \end{pmatrix} + (d-6) \begin{pmatrix} d-3 \\ 2 \end{pmatrix}} \to \cdots \\
\to & S(-4)^{\oplus (d-7)\binom{d-3}{2} + 3\binom{d-3}{4}} \to S(-3)^{\oplus (d-6)(d-3) + 2\binom{d-3}{3}} \to \\
\to & S(-2)^{\oplus \binom{d-3}{2} + (d-5)} \to S \to S_C \to 0.
\end{aligned}
$$

また，*Betti* 数 $\beta_{i,j}$ について，$\beta_{0,0} = 1$ であり

$$
\beta_{i,i+1} = i\binom{d-3}{i+1} + (d-4-i)\binom{d-3}{i-1} \, (1 \leq i \leq d-4), \beta_{d-4,d-2} = d-3, \beta_{d-3,d-1} = 2
$$

であり，その他は $\beta_{i,j} = 0$ となる．

例 3.3. 以下，$d = 5, 6, 7$ の場合の例をあげる．

1. $d = 5$ のとき，$X = \mathbb{P}(\mathcal{O}(1) \oplus \mathcal{O}(1)) \subseteq \mathbb{P}^3$ であり，これは非特異 2 次曲面である．$\mathcal{I}_{C/X} = \mathcal{O}_X(-2H - F)$ となるから

$$
0 \to S(-4)^{\oplus 2} \to S(-3)^{\oplus 2} \oplus S(-2) \to S \to S_C \to 0
$$

   を得る．
2. $d = 6$ のとき，$X = \mathbb{P}(\mathcal{O}(1) \oplus \mathcal{O}(2)) \subseteq \mathbb{P}^4$ であり，$\mathcal{I}_{C/X} = \mathcal{O}_X(-2H)$ となるから

$$
0 \to S(-5)^{\oplus 2} \to S(-4)^{\oplus 3} \oplus S(-3)^{\oplus 2} \to S(-2)^{\oplus 4} \to S \to S_C \to 0
$$

   を得る．
3. $d = 7$ のとき，$X = \mathbb{P}(\mathcal{O}(2) \oplus \mathcal{O}(2)) \subseteq \mathbb{P}^5$ であり，$\mathcal{I}_{C/X} = \mathcal{O}_X(-2H + F)$ となるから

$$
0 \to S(-6)^{\oplus 2} \to S(-5)^{\oplus 4} \oplus S(-4)^{\oplus 3} \to S(-3)^{\oplus 11} \to S(-2)^{\oplus 8} \to S \to S_C \to 0
$$

   を得る．

3.1 補足事項（その他の埋め込みについて）

本稿では種数 2 の曲線について考察をしたが，より一般的な超楕円曲線についても可能であると考えられる．まず C が超楕円曲線とは，2 次の全射正則写像 $\varphi_0 : C \to \mathbb{P}^1$ によって構成されるものである．$\deg D \geq 2g+1$ となる因子 D は非常に豊富であるから，$\varphi_D : C \to \mathbb{P}^{d-g}$ を定義できる．非超楕円曲線については，標準埋め込み $\varphi_{K_C} : C \to \mathbb{P}^{g-1}$ について極小自由分解の構成できる．一般的にも $d = 2g+1+p \geq 2g+1$ として考えると $\beta_{N-1,N+1} = g$ となり，C の極小自由分解 $\mathcal{F}_\bullet$ と次数付き標準加群 $K_C = \Gamma(\omega_C) = \bigoplus H^0(C, \omega_C(m))$ の極小自由分解 $\mathcal{G}_\bullet$ には，

$\mathcal{G}_\bullet = Hom_S(\mathcal{F}_\bullet, S(-N-1))$ という関係が得られる．これらより各 $\beta_{i,j}$ について対称性が得られる．それに併せて，Castelnuovo-Mumford Regularity を考察することで決定できると考えられる．([1] など参照)

4　今後の展開について

今回，射影曲線 C に対して，Rational Normal Scroll Surface X を構成したが，C と X の関係性は余次元 1 という関係がある．１つの拡張として，余次元 2 となるような Rational Normal Scroll の決定についても興味深い．１つの着眼点ではあるが，余次元 2 の非特異射影多様体 C は X 上の階数 2 のベクトル束との関係性が定式化できると考えられる．さらに，大域切断により生成される部分空間 $V \subset H^0(C, \mathcal{O}_C(D))$ とそれによって定義される線形系 $|V|$ への埋め込みについても順次進めていく．特に Non ACM タイプの曲線や射影多様体が得られるため，局所コホモロジー群 $H^i_{\mathfrak{m}}$ も含め，決定していく必要がある．

参考文献

[1] D. Eisenbud. *The Geometry of Syzygies: A Second Course in Algebraic Geometry and Commutative Algebra*. Graduate Texts in Mathematics. Springer New York, 2006.

[2] R. Hartshorne. *Algebraic Geometry*. Graduate Texts in Mathematics. Springer, 1977.

[3] P. Griffiths and J. Harris. *Principles of Algebraic Geometry*. Wiley Classics Library. Wiley, 1978.

[4] J. Harris. *Algebraic Geometry: A First Course*. Graduate Texts in Mathematics. Springer, 1992.

[5] Le Tuan Hoa. On minimal free resolutions of projective varieties of degree = codimension + 2. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 87(3):241–250, 1993.