2 曲線間に留まるよう条件付けられた ランダムウォーク橋に対する不変原理

東京都立大学大学院 理学研究科 数理科学専攻
簗島瞬 (Shun Yanashima)

概要

離散確率過程の最も基本的な例としてランダムウォークがある．連続関数の空間において, ランダムウォークの線形補間が Brown 運動に弱収束するという事実は Donsker の不変原理として知られている ([5])．この結果は様々な形で拡張されており, 種々の条件付ランダムウォークの弱収束によって Brown 運動に関連した確率過程が得られることが示されてきた ([8], [3])．本講演では, これらの結果について総括した後, 講演者の新規の結果である「2 曲線の間に留まるよう条件付けられたランダムウォーク橋の弱収束」について紹介する．※本講演は栗山一輝氏, 石谷謙介氏 (東京都立大学) との共同研究の内容に基づく．

1　導入 〜ランダムウォーク〜

「コイントスをして, 表ならば 1 歩進み, 裏ならば 1 歩戻る, というゲームを繰り返す」,「勝てば 1 点加点され, 負ければ 1 点減点される公平な賭けを繰り返し行う」, ⋯.

このような問題設定は, 高校数学でも度々登場し, 見覚えのある方も多いと思われる．前述の問題について,「n 回繰り返した結果はどうなるか？」,「n 回繰り返した時の変動の軌跡はどのようになっているか？」といった疑問は, 賭け事が盛んだった中世ヨーロッパで自然発生的に起こり, その後の確率論の発展において中心的話題の一つになっていった．

「時刻 n での値が, それまでに観測された (独立同分布な)n 回の試行の和で決まる」という現象を数学的に定式化したものが**ランダムウォーク**であり, 定義は次の通りである:

定義 1.1 (ランダムウォーク)**.** $d \in \mathbb{N}$ とする．$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を確率空間とし, $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ をこの空間上の $\mathbb{R}^d$ 値独立同分布の確率変数列 (independent and identically distributed, i.i.d.) とする．$a \in \mathbb{R}^d$ に対して

$$S_0 = a, \quad S_n = a + \xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n \ (n \in \mathbb{N})$$

とおき, $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を a 出発の d 次元ランダムウォークとよぶ.

例 1.2 (ランダムウォークの例)**.** $d \in \mathbb{N}$ とし, $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_d$ を $\mathbb{R}^d$ の標準基底とする．$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を確率空間とし, $X_1, X_2, \ldots$ を

$$P\left(X_i = \mathbf{e}_l\right) = P\left(X_i = -\mathbf{e}_l\right) = \frac{1}{2^d} \quad (l = 1, \ldots, d, i = 1, 2, \ldots)$$

である i.i.d. とし,

$$S_0 = \mathbf{a} \in \mathbb{Z}^d, \quad S_n = \mathbf{a} + X_1 + \cdots + X_n \ (n \in \mathbb{N})$$

とおく. $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を $\mathbf{a}$ 出発の d 次元単純ランダムウォークとよぶ. $d=1$ のとき, $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は本節冒頭で述べた具体的問題の数学的定式化になっている.

ランダムウォークは,「独立な個々の振る舞いを集団としてみたときの挙動」や「独立な事象が時系列に沿って積算されていくときの挙動」をモデル化する際に有用であり, 自然科学や数理ファイナンス等に応用されている ([14], [10]). 数学的にも様々な興味深い性質が知られているが, 本稿では特に**ランダムウォークの極限**に注目したい.

本題に入る前に, 確率論・数理統計における基本的な定理である**中心極限定理 (central limit theorem)** について復習する. 中心極限定理という呼び名は G. Pölya によるもので,「確率論において中心的な役割を果たす定理」ということに由来するようである ([13] Section 3.3.). 歴史的には, De Moivre によって 2 項分布の場合について中心極限定理の原型が予想され, Laplace によって母関数を用いて正確な証明が与えられた. その後, Lyapunov と Lévy は母関数の代わりに分布の特性関数を用いることで, De Moivre-Laplace の結果を一般化し, さらに証明の簡略化に成功した. この特性関数による方法は確率論の多くの教科書に述べられている ([6], [12]). なお, ここでは 1 次元の場合について述べるが, d 次元の場合も同様の結果が成り立つことが知られている ([11]).

定理 1.3 (中心極限定理)**.** $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を確率空間とし, この空間上の確率変数列 $X_1, X_2, \ldots$ が i.i.d. で, 平均 $\mu := E[X_1]$ と分散 $\sigma^2 := \mathrm{Var}[X_1]$ が存在するとする. このとき, $\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} \frac{X_i - \mu}{\sigma}$ は標準正規分布 $N(0,1)$ に分布収束する.

中心極限定理により, ランダムウォークの増分 $S_n - S_{n-1} = \xi_n \ (n \in \mathbb{N})$ が平均 0, 分散 1 をもつとき, $\frac{S_n}{\sqrt{n}}$ は (増分 ξ_n の分布によらずに)$n \to \infty$ での分布が標準正規分布に従うことがわかる. では, ランダムウォークの軌跡については増分の分布によらない連続極限が現れるだろうか？次節では, 連続関数の空間における中心極限定理とも呼ぶべき Donsker の不変原理について述べる.

2 Brown 運動, Donsker の不変原理

区間 $[t_1, t_2]$ 上の連続関数全体を $C([t_1, t_2], \mathbb{R})$ で表し, ノルム

$$\|f\| := \sup_{u \in [t_1, t_2]} |f(u)| \quad (f \in C([t_1, t_2], \mathbb{R}))$$

から定まる位相に関する Borel 集合族を $\mathcal{B}(C([t_1, t_2], \mathbb{R}))$ で表す.

定義 2.1 (連続確率過程)**.** 確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上の $C([t_1, t_2], \mathbb{R})$-値確率変数, すなわち $\mathcal{F}/\mathcal{B}(C([t_1, t_2], \mathbb{R}))$-可測関数を, 実数値連続確率過程とよぶ.

連続確率過程 X に対し, $\omega \in \Omega$ を固定するごとに連続関数 $t \mapsto X(t, \omega)$ が定まる.

定義 2.2 (サンプルパス)**.** 連続確率過程 X に対し, $\omega \in \Omega$ を固定したときの連続関数 $t \in [t_1, t_2] \mapsto X(t, \omega)$ を, X のサンプルパスとよぶ.

一方で, 連続確率過程 X に対し, $t \in [t_1, t_2]$ を固定したとき, 関数 $\omega \in \Omega \mapsto X(t, \omega)$ は実数値可測関数となることがわかる. そこで, 確率論においては連続確率過程 X を, t で添字付けられた実数値確率変数の族として, $X = \{X(t)\}_{t \in [t_1, t_2]}$ と書く.

連続確率過程の代表的な例として, Brown 運動がある:

定義 2.3 (Brown 運動)**.** *$a \in \mathbb{R}$ に対し, 確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上の連続確率過程 $W = \{W(t)\}_{t \in [t_1, t_2]}$ が次を満たすとき, a 出発の Brown 運動 (Wiener 過程) とよぶ:*

1. $P(W(t_1) = a) = 1$.
2. 任意の $n = 1, 2, \dots$ と任意の $t_1 \le s_0 < s_1 < \cdots < s_n \le t_2$ に対し, 増分 $\{W(s_i) - W(s_{i-1})\}_{i=1,2,\dots,n}$ は独立で, それぞれ平均 0, 分散 $s_i - s_{i-1}$ の正規分布に従う.

なお, 一般に時刻の区間が $[0, \infty)$ である連続確率過程, Brown 運動を考えることができるが, 本稿では有限区間の場合のみ扱う.

今, 0 出発の Brown 運動 $W = \{W(t)\}_{t \in [0,1]}$ が与えられたとし, $n \in \mathbb{N}$ を固定する. 区間 $[0, 1]$ の n 分点 $0 < \frac{1}{n} < \frac{2}{n} < \cdots < \frac{n-1}{n} < 1$ を考え,

$$\xi_k := \sqrt{n}\left(W\left(\frac{k}{n}\right) - W\left(\frac{k-1}{n}\right)\right) \quad (k = 1, \dots, n)$$

とおく. Brown 運動の増分 $W\left(\frac{k}{n}\right) - W\left(\frac{k-1}{n}\right)$ $(k = 1, \dots, n)$ は独立かつ平均 0, 分散 $\frac{1}{n}$ の正規分布に従うことから, $\xi_1, \dots, \xi_n$ は標準正規分布に従う i.i.d. である. このことは, Brown 運動を離散化することでランダムウォークを実現できることを示唆している. では逆に, ランダムウォークを用いて Brown 運動を近似することはできるだろうか.

記号 2.4 (線形補間)**.** *$n, m \in \mathbb{Z}_{\ge 0}$, $n < m$ と $0 \le s < t$ に対し, 写像 $\psi^{n,m}_{[s,t]} : \mathbb{R}^{m-n+1} \to C([s, t], \mathbb{R})$ を次で定める:*
$S = \{S_k\}_{k=n}^{m} \in \mathbb{R}^{m-n+1}$ に対し,

$$\begin{aligned}(\psi^{n,m}_{[s,t]}(S))(u) &:= \sqrt{\frac{t-s}{m-n}}\left\{S_{[\frac{(m-n)(u-s)}{t-s}]+n} + \left(\frac{(m-n)(u-s)}{t-s} - \left[\frac{(m-n)(u-s)}{t-s}\right]\right)\right. \\ &\qquad \left.\times\left(S_{[\frac{(m-n)(u-s)}{t-s}]+n+1} - S_{[\frac{(m-n)(u-s)}{t-s}]+n}\right)\right\}, \quad (s \le u < t), \\ (\psi^{n,m}_{[s,t]}(S))(t) &:= \sqrt{\frac{t-s}{m-n}} S_m.\end{aligned}$$

$\psi^{n,m}_{[s,t]}(S) : \mathbb{R}^{m-n+1} \to \quad C([s, t], \mathbb{R})$ は $m - n + 1$ 個の点 $S_n, S_{n+1}, \dots, S_m$ を繋いだ折線を区間 $[s, t]$ 上の関数になるようにスケール変換したものである.

次の定理は **Donsker の不変原理** (invariance principle), または中心極限定理の無限次元版として **functional central limit theorem** とよばれている. 証明は Donsker の原論文 ([5]) や [1], [9], [11] を参照されたい.

定理 2.5 (Donsker の不変原理)**.** *$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を確率空間とし, $\xi_1, \xi_2, \dots$ を平均 0, 分散 1 をもつこの空間上の i.i.d. とし, この確率変数列から定義されるランダムウォークを $S = \{S_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ とする. $n \in \mathbb{N}$ に対し, S の線形補間 $\psi^{0,n}_{[0,1]}(S)$ によって誘導される $C([0, 1], \mathbb{R})$ 上の測度を P_n とする. この*

とき, $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ はある測度 P^* に弱収束する．P^* の下で, $C([0,1],\mathbb{R})$ の座標写像過程

$$W_t(\omega) := \omega(t) \quad (\omega \in C([0,1],\mathbb{R}), t \in [0,1])$$

は 0 出発の Brown 運動である．

この定理により, 連続関数の空間において, ランダムウォークの線形補間が Brown 運動に弱収束することがわかる．つまり, ランダムウォークによって Brown 運動を「弱収束の意味で」近似できることがわかる．

3　条件付ランダムウォークの不変原理

Donsker の不変原理は様々な条件付ランダムウォークの場合に拡張されている．ここでは, 代表的な 2 つの結果を紹介する．

まず, 正に条件付けられたランダムウォークに関する結果を紹介する．この結果は Iglehart[8] によって強い仮定の下で示され, Bolthausen[2] によって仮定が緩められた．また, さらに一般的な設定の下での結果が Doney[4] によって示されている．ここでは Bolthausen の結果を紹介する．

定理 3.1 ([2])**.** $(\Omega,\mathcal{F},P)$ を確率空間とし, $\xi_1,\xi_2,\ldots$ を平均 0, 分散 1 をもつこの空間上の i.i.d. とし, この確率変数列から定義されるランダムウォークを $S=\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ とする．$n\in\mathbb{N}$ に対し, S の線形補間 $\psi_{[0,1]}^{0,n}(S)$ によって誘導される $C([0,1],\mathbb{R})$ 上の測度を P_n とする．さらに,

$$Q_n(A) := P_n(A \mid C([0,1],[0,\infty))) \quad (A \in \mathcal{B}(C([0,1],\mathbb{R})))$$

とする．このとき, $\{Q_n\}_{n=1}^{\infty}$ はある測度 P^+ に弱収束する．P^+ の下で, $C([0,1],\mathbb{R})$ の座標写像過程

$$W_t(\omega) := \omega(t) \quad (\omega \in C([0,1],\mathbb{R}), t \in [0,1])$$

は 0 出発の Brownian meander である．ただし, 0 出発の Brown 運動 $W=\{W(t)\}_{t\in[0,1]}$ と

$$\tau := \sup\{t \in [0,1] \mid W(t) = 0\}$$

によって

$$W^+(t) := \frac{1}{\sqrt{1-\tau}}\,|W(\tau+(1-\tau)t)| \quad (0 \le t \le 1)$$

と定義される確率過程 W^+ を, 区間 $[0,1]$ 上の 0 出発の Brownian meander とよぶ．

この定理により, 正に条件付けられたランダムウォークの線形補間が Brownian meander に弱収束することがわかる．

次に, 端点固定かつ正に条件付けられたランダムウォーク (ランダムウォーク橋) に関する結果を紹介する．

$n,m \in \mathbb{Z}_{\ge 0}$ $(n<m), 0 \le a < b$ とする．$(\Omega,\mathcal{F},P)$ を確率空間とし, この空間上の $S_n = a$ を満た

すランダムウォーク $\{S_k\}_{k=n}^m$ に対し, $\mathbb{R}^{m-n+1}$ 上の測度 $\mathbf{P}_{n,m}^{a,b,(\uparrow)}$ を次で定義する:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}_{n,m}^{a,b,(\uparrow)}(I_n \times \cdots \times I_m) \\
&:= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} P\left(S_n \in I_n, \cdots, S_{m-1} \in I_{m-1}, S_m \in I_m \mid S_n \in [0,\infty), \cdots, S_{m-1} \in [0,\infty), S_m \in [b-\varepsilon, b+\varepsilon]\right) \\
&= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{P\left(S_n \in I_n \cap [0,\infty), \cdots, S_{m-1} \in I_{m-1} \cap [0,\infty), S_m \in I_m \cap [b-\varepsilon, b+\varepsilon]\right)}{P\left(S_n \in [0,\infty), \cdots, S_{m-1} \in [0,\infty), S_m \in [b-\varepsilon, b+\varepsilon]\right)}.
\end{aligned}$$

ただし, I_k $(n \le k \le m)$ を $\mathbb{R}$ の区間とする.

さらに, $C([s,t],\mathbb{R})$ 上の測度 $\mathcal{P}_{[s,t],n,m}^{a,b,(\uparrow)}$ を次で定める:

$$\mathcal{P}_{[s,t],n,m}^{a,b,(\uparrow)} := \mathbf{P}_{n,m}^{\frac{a}{\sqrt{t-s}},\frac{b}{\sqrt{t-s}},(\uparrow)} \circ \psi_{[s,t]}^{n,m-1}.$$

確率空間 $(C([s,t],\mathbb{R}), \mathcal{B}(C([s,t],\mathbb{R})), \mathcal{P})$ を考え, $X = \{X(u)\}_{u\in[s,t]}$ をこの空間上の座標過程とする. $P_{[s,t]}^{a,b,(\uparrow)}$ を次で定める:

$$P_{[s,t]}^{a,b,(\uparrow)}(\cdot) := \mathcal{P}(\cdot \mid \forall u \in [s,t],\ X(u) \ge 0, X(s) = a,\ X(t) = b).$$

以上の記号の下で, 次の定理が成り立つ ([3]):

定理 3.2 ([3] Corollary 2.5)**.** *$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を確率空間とし, $\xi_1, \xi_2, \ldots$ を平均 0, 分散 1 をもつこの空間上の i.i.d. とし, この確率変数列から定義されるランダムウォークを $S = \{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ とする. $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が次の仮定を満たすとする:*

1. *P の下での S_1 の分布は $\mathbb{R}$ 上の Lebesgue 測度に絶対連続.*
2. *ある $n \in \mathbb{N}$ が存在して, S_n の密度関数 $f_n(x) := P(S_n \in dx)/dx$ は $f_n \in L^\infty$ を満たす.*

このとき, 測度の列 $\{\mathcal{P}_{[0,1],0,2n}^{\sqrt{n}a,\sqrt{n}b,(\uparrow)}\}_{n=1}^\infty$ は測度 $P_{[0,1]}^{a,b,(\uparrow)}$ に弱収束する.

この定理によって, 端点固定かつ正に条件付けられたランダムウォークの線形補間が 3 次元 Bessel bridge とよばれる確率過程に弱収束することがわかる.

4 2 曲線間に留まるよう条件付けられたランダムウォーク橋に対する不変原理

定理 3.2 では端点固定かつ正に条件付けられたランダムウォークを考えたが, ランダムウォークの動く範囲についてさらに条件を付加した場合どのような弱収束が議論できるだろうか. 本節ではこのことについて, 筆者による主結果を 2 つ紹介する.

$n, m \in \mathbb{Z}_{\ge 0}$ $(n < m), 0 \le s < t, h : [s,t] \to \mathbb{R}$ とする. $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を確率空間とし, この空間上の $S_n = a$ を満たすランダムウォーク $\{S_k\}_{k=n}^m$ に対し, $\mathbb{R}^{m-n+1}$ 上の測度 $\mathbf{P}_{[s,t],n,m}^{a,b,(h\uparrow)}$ を次で定義する:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}_{[s,t],n,m}^{a,b,(h\uparrow)}(I_n \times \cdots \times I_m) \\
&:= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} P\Big(S_n \in I_n, \cdots, S_{m-1} \in I_{m-1}, S_m \in I_m \mid \\
&\qquad\qquad S_{n+k} \ge \sqrt{\frac{m-n}{t-s}}\, h\left(s + k\frac{t-s}{m-n}\right)\ (0 \le k \le m-n-1),\ S_m \in [b-\varepsilon, b+\varepsilon]\Big).
\end{aligned}$$

ただし, I_k $(n \le k \le m)$ を $\mathbb{R}$ の区間とする.

また, $C([s,t],\mathbb{R})$ 上の測度 $\mathcal{P}^{a,b,(h\uparrow)}_{[s,t],n,m}$ を次で定める:

$$\mathcal{P}^{a,b,(h\uparrow)}_{[s,t],n,m} := \mathbf{P}^{\frac{a}{\sqrt{t-s}},\frac{b}{\sqrt{t-s}},(h\uparrow)}_{n,m} \circ \psi^{n,m-1}_{[s,t]}.$$

さらに,

$$A^{(h\downarrow)}_{[s,t],n,m} := \prod_{k=0}^{m-n} \left(-\infty, \sqrt{\frac{m-n}{t-s}} h\left(s + k\frac{t-s}{m-n}\right)\right],$$
$$K^{(h\downarrow)}_{[s,t]} := \{f \in C([s,t],\mathbb{R}) \mid f(u) \le h(u)\ (s \le u \le t)\}$$

とおく.

まず, ランダムウォークの上側の境界である関数 h が定数関数 $h \equiv b > 0$ であるときの結果として, 次を得た:

定理 4.1 (主結果 1)**.** $b > 0$ とする. $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を確率空間とし, $\xi_1, \xi_2, \ldots$ を標準正規分布に従うこの空間上の i.i.d. とし, この確率変数列から定義されるランダムウォークを $S = \{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ とする. このとき, 測度の列 $\{\mathcal{P}^{0,\sqrt{n}b,(0\uparrow)}_{[0,1],0,2n}\left(\cdot \mid K^{(b\downarrow)}_{[0,1]}\right)\}_{n=1}^{\infty}$ はある測度 P^H に弱収束する. 測度 P^H は Brownian house-moving$H^{0\to b} = \{H^{0\to b}(t)\}_{t\in[0,1]}$ の分布である.

Brownian house-moving は出発点と到達点の間に留まる 1 次元 Brownian bridge であり, その構成方法は [7] で与えられている. 定理 4.1 により, [7] とは異なる Brownian house-moving の構成方法を与えることができた.

次に, ランダムウォークの動く範囲が 2 曲線の間の場合を考える.

$b > 0$ とし, $h^+, h^- \in C^2([0,1],\mathbb{R}), h^-(t) < h^+(t)\ (t \in [0,1]), h^-(0) = 0, h^+(1) = b$ とする. $0 \le s < t$ とし, $f \in C^2[s,t]$ に対して Cameron-Martin density$M_{s,t}(f)$ を

$$M_{s,t}(f) := \exp\left(\int_s^t f'(u)dx(u) - \frac{1}{2}\int_s^t f'(u)^2 du\right)$$

と定義する. ただし, 積分 $\int_s^t f'(u)dx(u)$ は x に関する確率積分.

また, $h^+, h^- \in C^2([0,1],\mathbb{R}), h^-(t) < h^+(t)\ (t \in [0,1]), h^-(0) = 0, h^+(1) = b$ と $y \in [h^-(1/2), h^+(1/2)]$ に対して

$$k_{[0,\frac{1}{2}]}(y) := \frac{P\left(W^+_{[0,\frac{1}{2}]}(1/2) \in dy - h^-(1/2)\right)}{dy} P^{0,(y-h^-(1/2),(0\uparrow)}_{[0,\frac{1}{2}]}\left(K^{((h^+-h^-)\downarrow)}_{[0,\frac{1}{2}]}\right)$$
$$\times E^{0,(y-h^-(1/2)),(0\uparrow)}_{[0,\frac{1}{2}]}\left[M_{[0,\frac{1}{2}]}(h^-)^{-1} \mid K^{((h^+-h^-)\downarrow)}_{[0,\frac{1}{2}]}\right]$$

$$k_{[\frac{1}{2},1]}(y) := \frac{P\left(W^+_{[\frac{1}{2},1]}(1/2) \in b - dy - (b - h^+(1/2))\right)}{dy} P^{0,(h^+(1/2)-y),(0\uparrow)}_{[\frac{1}{2},1]}\left(K^{((h^+-h^-)\downarrow}_{[\frac{1}{2},1]}\right)$$
$$\times E^{0,(h^+(1/2)-y),(0\uparrow)}_{[\frac{1}{2},1]}\left[M_{[\frac{1}{2},1]}(b - \overleftarrow{h^+})^{-1} \mid K^{((h^+-h^-)\downarrow}_{[\frac{1}{2},1]}\right]$$

とし,

$$k(y) := k_{[0,\frac{1}{2}]}(y)k_{[\frac{1}{2},1]}(y)$$

とおく. ただし, $0 \leq s < t$ に対して $W^+_{[s,t]}$ は区間 $[s,t]$ 上の Brownian meander を表す.

このとき, 2 曲線 h^-, h^+ の間に留まるよう条件付けられたランダムウォーク橋の確率密度関数の収束に関する次の結果を得た:

定理 4.2 (主結果 2)**.** *$b > 0$ とし, $h^+, h^- \in C^2([0,1],\mathbb{R}), h^-(t) < h^+(t)$ $(t \in [0,1]), h^-(0) = 0, h^+(1) = b$ とする. $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を確率空間とし, $\xi_1, \xi_2, \ldots$ を標準正規分布に従うこの空間上の i.i.d. とし, この確率変数列から定義されるランダムウォークを $S = \{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ とする. 任意の $y \in [h^-(1/2), h^+(1/2)]$ に対し, 以下が成り立つ:*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{d}{dy} \mathbf{P}^{0,\sqrt{2N}b,(h^-\uparrow)}_{[0,1],0,2N} \left(\mathbb{R}^N \times (-\infty, \sqrt{2N}y] \times \mathbb{R}^N \mid A^{(h^+\downarrow)}_{[0,1],0,2N}\right) = \frac{k(y)}{\int_{h^-(1/2)}^{h^+(1/2)} k(z)dz}$$

参考文献

[1] P. Billingsley: Convergence of Probability Measures, Wiley, New York (1968).

[2] E. Bolthausen: *On a functional central limit theorem for random walks conditioned to stay positive*, Ann. Probab. **4**, no.3, 480-485 (1976).

[3] F. Caravenna and L. Chaumont: *An invariance principle for random walk bridges conditioned to stay positive*, Electronic Journal of Probability **18**, no.60, 1-32 (2013).

[4] R. A. Doney: *Conditional Limit Theorems for Asymptotically Stable random Walks*, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete **70**, 351-360 (1985).

[5] M. D. Donsker: *An invariance principle for certain probability limit theorems*, Mem, Amer. Math. Soc. **6**, 1-12 (1951).

[6] 舟木 直久: 確率論, 朝倉書店, 講座　数学の考え方 **20** (2004).

[7] D. Hatakenaka, K. Ishitani and K. Suzuki: *Construction and sample path properties of Brownian house-moving between two curves*, arXiv:2006.02726v3.

[8] D. L. Iglehart: *Functional central limit theorems for random walks conditioned to stay positive*, Ann. Probab. **2**, 608-619 (1974).

[9] I. Karatzas and S. E. Shreve: Brownian motion and Stochastic calculus, Springer, Science+Business Media Inc. (1998).

[10] J. Klafter and I. M. Sokolov: ランダムウォーク はじめの一歩 -自然現象の解析を見すえて-, 共立出版 (2018).

[11] 小谷　眞一: 測度と確率, 岩波書店 (2005).

[12] 清水 泰隆: 統計学への確率論, その先へ, 内田老鶴圃 (2019).

[13] A. N. Shiryaev: Probability 2nd. Ed, Springer-Verlag. New York (1996).

[14] S. Shreve: Stochastic Calculus for Finance I: The Binomial Asset Pricing Model, Springer Science+Business Media Inc. (2004).