

# 絡み目の parabolic Dijkgraaf-Witten 不変量

東京工業大学理学院数学系数学コース

柳田幸輝 (Koki Yanagida)

## 概要

Dijkgraaf-Witten 不変量とは有向閉三次元多様体の不変量であった。これをもとに、本研究では  $SL_2(\mathbb{F}_q)$  の parabolic 表現を用い、絡み目の不変量となる parabolic DW 不変量を新たに定義した。この DW 不変量は、分岐被覆空間のテクニックまたは、カンドルコサイクルを用いる事で、“部分的に”比較的容易に計算できる。本講演では、その定義とその計算例を紹介する。加えて Karuo 氏が考案した reduced DW 不変量は parabolic DW 不変量から還元され、氏の不変量が任意の結び目で図式だけで計算可能な事も紹介する。

## 1 導入

絡み目とは、三次元球面  $S^3$  に埋め込まれた  $\bigsqcup_{i=1}^r S^1$  ( $r \in \mathbb{N}$ ) のことを言う。特に  $r = 1$  の場合、これを結び目という。また、絡み目の図式とは、絡み目を平面に射影したもので、その交点の上下が明示された図のことである (図 1)。二つの絡み目が同値か否かを図式から判定することは困難である。そのため、絡み目全体の幾何的構造を伴った仕分けは、結び目理論において大きな問題である。そこで、絡み目の有用な不変量の研究がおこなわれてきた。同様の背景で、向き付けられた三次元多様体の不変量である Dijkgraaf-Witten 不変量から、結び目の不変量を構成する試みが成されている [Kar21a, Kar21b]。しかしながら、任意に与えられた絡み目の Dijkgraaf-Witten 不変量を具体的に評価することは困難であった。

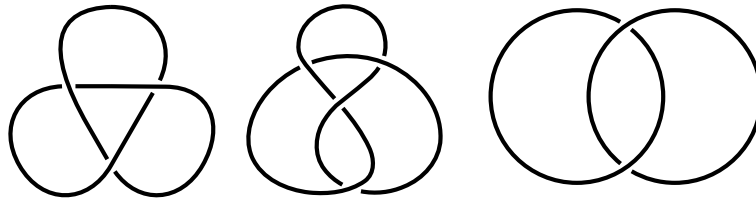


図 1: 三つ葉結び目 (左) と八の字結び目 (中)、ホップ絡み目 (右) の図式

そこで本研究では、 $S^3$  の絡み目で分岐する被覆空間に着目することで、絡み目の不変量となる parabolic Dijkgraaf-Witten 不変量を新たに構成した。これは、その定義に  $S^3$  の分岐被覆空間へ、 $SL_2(\mathbb{F}_q)$  の parabolic な準同型が持ちあがる事実を用いている。そのため、分岐被覆空間の手法を応用することで“部分的な”情報が計算可能である。加えて、parabolic な準同型と対応のあるカンドル代数を用いれば、図式のみから“部分的な”情報を導出できる。

本レポートでは、節 2 で parabolic Dijkgraaf-Witten 不変量とその性質を述べる。節 3 では、カンドル代数を用いた計算手法を紹介する。また、本レポートを通して  $q$  は素数  $p$  の素冪であり、 $\mathbb{F}_q$  は位数  $q$  の有限体を意味する。

## 2 絡み目の parabolic Dijkgraaf-Witten 不変量

まず初めに、絡み目の parabolic Dijkgraaf-Witten invariant を定義する (Definition 2.1)。そのために通常の Dijkgraaf-Witten invariant [DW90] から導入しよう。\$M\$ を向き付けられた閉三次元多様体とし、\$[M] \in H\_3(M; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}\$ はその基本類とする。また、群 \$G\$ にたいして \$BG\$ を \$(G, 1)\$ 型の Eilenberg-MacLane 空間とし、さらに \$\iota: M \to B\pi\_1(M)\$ は分類写像とする (これらの用語の定義については [Bro94] 参照)。\$BG\$ の通常ホモロジー群と \$G\$ の群のホモロジー群が一致することから、群の準同型 \$f: \pi\_1(M) \to G\$ が与えられたとき、\$f\_\* = (Bf)\_\* \circ \iota\_\*: H\_3(M; \mathbb{Z}) \to H\_3(BG; \mathbb{Z})\$ が定まる。ここで \$Bf: B\pi\_1(M) \to BG\$ は \$f\$ によって誘導される写像である。有限群 \$G\$ に対して *Dijkgraaf-Witten 不変量* (以下、DW 不変量と略記する) は以下の形式和として定義される。

$$DW_G(M) = \sum_{f \in \text{Hom}(\pi_1(M), G)} f_*([M]) \in \mathbb{Z}[H_3(BG; \mathbb{Z})].$$

この DW 不変量のもとで、基本群から有限群への準同型に制限を設けることで parabolic DW 不変量を定める。以降、\$G\$ を \$\mathbb{F}\_q\$ 上の特殊線形群 \$\text{SL}\_2(\mathbb{F}\_q)\$ とし、\$L \subset S^3\$ は絡み目とする。準同型 \$\rho: \pi\_1(S^3 \setminus L) \to \text{SL}\_2(\mathbb{F}\_q)\$ が *parabolic* であるとは、\$L\$ の各経線の \$\rho\$ による像が、\$\text{SL}\_2(\mathbb{F}\_q)\$ において \$\begin{bmatrix} 1 & \* \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\$ に共役であるときを指す。parabolic な準同型全体は \$\text{Hom}\_{\text{para}}(\pi\_1(S^3 \setminus L), \text{SL}\_2(\mathbb{F}\_q))\$ と書くこととする。

この parabolic な準同型は、絡み目で分岐する被覆空間上へと持ちあがる事が分かる。\$E\_L^p \to S^3 \setminus L\$ を絡み目の外部補空間の \$p\$ 重被覆とし、\$B\_L^p \to S^3\$ は絡み目 \$L\$ で分岐する \$p\$ 重被覆としよう。\$\pi(E\_L^p)\$ は \$\pi(S^3 \setminus L)\$ の部分群とみなせるから準同型 \$f: \pi(S^3 \setminus L) \to \text{SL}\_2(\mathbb{F}\_q)\$ から制限写像 \$\text{res}(f): \pi\_1(E\_L^p) \to \text{SL}\_2(\mathbb{F}\_q)\$ を考えることができる。\$f\$ が parabolic であれば、\$\text{res}(f)\$ における \$E\_L^p\$ の各経線の像は単位行列である。ここで、\$B\_L^p\$ は \$E\_L^p\$ の各経線を消去するようにソリッドトラスを貼り合わせて構成するのであったから、\$\text{res}(f)\$ から \$\bar{f}: \pi\_1(B\_L^p) \to \text{SL}\_2(\mathbb{F}\_q)\$ が自然に誘導される。この分岐被覆空間へと持ち上がった準同型を用いて、絡み目の不変量を以下で定義する。

**Definition 2.1.** \$\mathbb{F}\_q\$ を位数 \$q\$ の有限体、\$L \subset S^3\$ は絡み目とする。parabolic Dijkgraaf-Witten 不変量 \$DW\_q(L)\$ を形式和

$$DW_q(L) := \sum_{f \in \text{Hom}_{\text{para}}(\pi_1(S^3 \setminus L), \text{SL}_2(\mathbb{F}_q))} \bar{f}_*([B_L^p]) \in \mathbb{Z}[H_3(B\text{SL}_2(\mathbb{F}_q); \mathbb{Z})]$$

として定義する。

parabolic DW 不変量 \$DW\_q(L)\$ は絡み目の不変量である事は定義から従う。更に、\$L\$ が結び目で \$q\$ が素数の場合は、Karuo 氏が定めた reduced DW 不変量 \$\widehat{DW}\_q(L)\$ [Kar21a, Kar21b] を還元できることが分かる。

**Remark 2.2.** \$q \neq 2, 2^2, 2^3, 3, 3^2, 3^3, 5\$ の場合、同型 \$H\_3(B\text{SL}\_2(\mathbb{F}\_q); \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/q^2 - 1\$ が成り立つことが知られている [Hut13]。このような素冪 \$q\$ のことを、このレポート内では *generic* と呼ぶ。

計算面において、一般の \$\bar{f}\_\*([B\_L^p])\$ の計算は困難だが、分岐被覆空間がレンズ空間やブリースコーンホモロジー球面となる場合に、その部分的情報が比較的容易に計算可能である。特に次の結果

が得られる。

**Theorem 2.3.**  $q$  を *generic* な素冪とする。このとき、 $(2, 2m)$ -トーラスリンクと  $2m$ -twist knot の *parabolic DW* 不変量は、 $m$  について周期  $q(q+1)^2(q-1)^2$  をもつ。

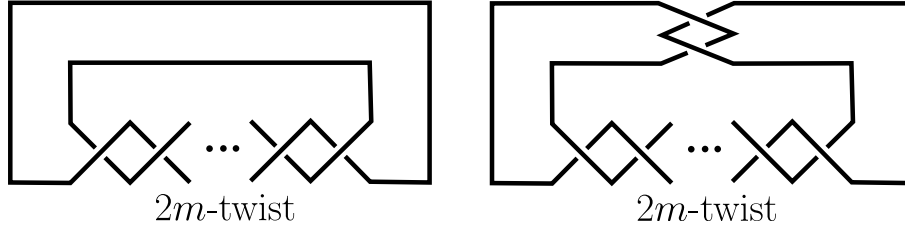


図 2:  $(2, 2m)$ -トーラスリンク (左) と  $2m$ -twist knot (右)

### 3 カンドルコサイクル不変量を用いた *parabolic Dijkgraaf-Witten* 不変量の計算

*parabolic DW* 不変量は群環  $\mathbb{Z}[H_3(\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_q); \mathbb{Z})]$  に値を持つ絡み目の不変量である。そのため、*pre-Bloch group*  $\mathcal{P}(\mathbb{F}_q)$  から誘導される群  $\hat{\mathcal{P}}(\mathbb{F}_q)$  が存在し、準同型  $H_3(\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_q); \mathbb{Z}) \rightarrow \hat{\mathcal{P}}(\mathbb{F}_q)$  を考えることができる。この節では、カンドル代数と絡み目の彩色を用いて、*parabolic DW* 不変量の  $\hat{\mathcal{P}}(\mathbb{F}_q)$  における像を計算する方法を紹介する。以降、素冪  $q$  は *generic* かつ奇数であると仮定する。

#### 3.1 カンドルコサイクル不変量

初めに、*parabolic* なカンドルと、絡み目の彩色について紹介する。 $r \in \mathbb{F}_q^\times = \mathbb{F} \setminus \{0\}$  に対して、 $X_r$  は  $\mathbb{F}_q \times \mathbb{F}_q \setminus \{(0, 0)\}$  を同値関係  $(x, y) \sim (-x, -y)$  で割った集合とする。この集合上に、二項関係  $\triangleleft: X_r \times X_r \rightarrow X_r$  を

$$(a, b) \triangleleft (c, d) = (a, b) \begin{pmatrix} 1 + rcd & rd^2 \\ -rc^2 & 1 - rcd \end{pmatrix}$$

によって定めることで、 $(X_r, \triangleleft)$  はカンドルを成す。これを、*parabolic カンドル*とよぶ (詳細は [Nos17] の Example 3.15 参照)。 *parabolic* カンドルによる絡み目の彩色と、絡み目の *parabolic* な準同型にはある対応が存在する。

その対応を見るために、続いて絡み目の彩色を定義しよう。 $D \subset \mathbb{R}^2$  を絡み目  $L$  の図式としたとき、写像  $\mathcal{C}: \{D \text{ の弧} \} \rightarrow X_r$  が図 3 左の等式を満たすならば、 $\mathcal{C}$  を  $X_r$ -彩色であるという。更に、 $X_r$ -彩色  $\mathcal{C}$  が与えられたときに、写像  $\lambda: \{\mathbb{R}^2 \setminus D \text{ の領域} \} \rightarrow X_r$  が、有界でない領域を  $(1, 0) \in X_r$  に写し、更に図 3 右の等式を満たすときに組  $(\mathcal{C}, \lambda)$  を *shadow  $X_r$ -彩色*と呼ぶ。以降、*shadow  $X_r$ -彩色*全体の集合を  $\mathrm{Col}_{X_r}(D)$  と表そう。この  $\mathrm{Col}_{X_r}(D)$  と  $\mathrm{Hom}_{\mathrm{para}}(\pi_1(S^3 \setminus L), \mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_q))$  の間に次の一対一対応を与える写像  $\mathcal{F}$  の存在が知られている (詳細は [Nos17, Example 3.16] 参照)。

$$\mathcal{F}: \bigcup_{r \in \mathbb{F}_q^\times} \mathrm{Col}_{X_r}(D) \xrightarrow{1:1} \mathrm{Hom}_{\mathrm{para}}(\pi_1(S^3 \setminus L), \mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_q)). \quad (1)$$

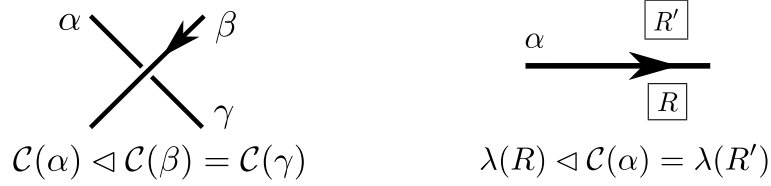


図 3: 絡み目の交点と領域における彩色条件

次にカンドルホモロジーを導入し、絡み目の彩色と parabolic DW 不変量の関係を見る。 $C_n^R(X_r)$  を  $X_r^n$  によって生成される自由  $\mathbb{Z}$ -加群とし、さらに準同型  $\partial_n^R: C_n^R(X_r) \rightarrow C_{n-1}^R(X_r)$  を

$$\sum_{2 \leq i \leq n} (-1)^i ((x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) - (x_1 \triangleleft x_i, \dots, x_{i-1} \triangleleft x_i, x_{i+1}, \dots, x_n))$$

で定める。このとき  $\partial_{n-1}^R \circ \partial_n^R = 0$  を満たすので、組  $(C_*^R(X_r), \partial_*^R)$  は複体を成す。更に  $C_*^D(X_r)$  を  $\{(x_1, \dots, x_n) \in X_r^n \mid \text{ある } i \in \mathbb{N} \text{ が存在して } x_i = x_{i+1}\}$  によって生成される自由  $\mathbb{Z}$ -加群とする。この  $C_*^D(X_r)$  は  $(C_*^R(X_r), \partial_*^R)$  の部分複体になることが確かめられ、よってその商複体  $(C_*^Q(X_r), \partial_*)$  を考えることができる。 $(C_*^Q(X_r), \partial_*)$  によるホモロジーは  $X_r$  のカンドルホモロジーと呼ばれ、 $H_n^Q(X_r)$  と表す。双対的な議論をアーベル群  $A$  に対して施すことで、カンドルコホモロジー  $H_Q^*(X_r; A)$  を構成することが可能である。

絡み目  $L$  の図式  $D$  における  $X_r$ -彩色  $S \in \text{Col}_{X_r}(D)$  が与えられたとき、各交点についての和  $\sum_{\tau: D \text{ の各交点}} \epsilon_\tau(x, y, z) \in C_3^Q(X_r)$  は 3-cycle を成すことが知られている。ただし、 $x, y, z \in X_r$  と  $\epsilon_\tau \in \{\pm 1\}$  は図 4 に対応するように取っている。この 3-cycle が表すホモロジー類を  $S$  の基本類と呼び、 $[S] \in H_3^Q(X_r)$  で表す。[Nos15] もしくは [Nos17, Corollary 6.20] によれば、全射準同型  $\mathcal{I}: H_3^Q(X_r) \rightarrow H_3(\text{SL}_2(\mathbb{F}_q); \mathbb{Z})$  が存在して、任意の彩色  $S \in \text{Col}_{X_r}(D)$  について

$$\mathcal{I}([S]) = \overline{\mathcal{F}(S)}_*([B_L^p]) \in H_3(\text{SL}_2(\mathbb{F}_q); \mathbb{Z})$$

を満たすことが示されている。すなわち、 $\mathcal{F}$  による式 (1) の一対一対応を考えれば、形式的な和  $\sum_{S \in \text{Col}_{X_r}(D)} [S] \in \mathbb{Z}[H_3^Q(X_r)]$  と parabolic DW 不変量は同値であることが分かる。よって  $[S]$  の導出が目標となるが、 $H_3^Q(X_r)$  における  $[S]$  の評価は一般に困難である。そこで、カンドル 3-cocycle  $\psi \in C_3^Q(X; A)$  とのペアリング  $\langle \psi, [S] \rangle \in A$  を考える。これをカンドルコサイクル不変量という [CKS01]。

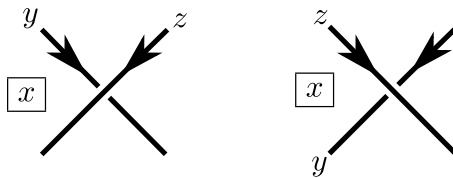


図 4: 正の交点 (左) と負の交点 (右)

### 3.2 カンドル 3-cocycle $\psi$ の構成

カンドルコサイクル不変量を求めるためには、可換群  $A$  とカンドル 3-cocycle  $\psi \in C_3^Q(X; A)$  を具体的に定める必要がある。本小節では、 $A$  に pre-Bloch group から定まる群  $\hat{\mathcal{P}}(\mathbb{F}_q)$  を用いるこ

とでペアリング  $\langle \psi, [S] \rangle \in A$  が計算可能であること紹介する。

初めに  $\hat{\mathcal{P}}(\mathbb{F}_q)$  の定義を述べたい。まず *pre-Bloch group*  $\mathcal{P}(\mathbb{F}_q)$  を、生成元  $[x]$  ( $x \in \mathbb{F}_q \setminus \{0, 1\}$ ) と関係子

$$[x] - [y] + \left[\frac{y}{x}\right] - \left[\frac{1-x^{-1}}{1-y^{-1}}\right] + \left[\frac{1-x}{1-y}\right] = 0, \quad x \neq y \in \mathbb{F}_q \setminus \{0, 1\}$$

であるアーベル群として定める。次に群  $\tilde{\Lambda}^2 \mathbb{F}_q^\times$  は、 $\mathbb{F}_q^\times \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{F}_q^\times$  を  $a \otimes b + b \otimes a$  で生成される部分群で割った剰余群としよう。このとき、自然な準同型  $\mathcal{P}(\mathbb{F}_q) \rightarrow \tilde{\Lambda}^2 \mathbb{F}_q^\times$  が  $[x]$  を  $x \wedge (1-x)$  を写すものとして定まる。この準同型の核を *Bloch group* と呼び、 $\mathcal{B}(\mathbb{F}_q)$  と表す。加えて、 $\hat{\mathcal{P}}(\mathbb{F}_q)$  は  $\mathcal{P}(\mathbb{F}_q)$  に関係子

$$[x] = \left[1 - \frac{1}{x}\right] = \left[\frac{1}{1-x}\right] = -\left[\frac{1}{x}\right] = -\left[\frac{x-1}{x}\right] = -[1-x]$$

を新たに加えることで得られるアーベル群とする。更に、商写像  $\mathcal{P}(\mathbb{F}_q) \rightarrow \hat{\mathcal{P}}(\mathbb{F}_q)$  による Bloch group  $\mathcal{B}(\mathbb{F}_q)$  の像を  $\hat{\mathcal{B}}(\mathbb{F}_q)$  と表す。この  $\hat{\mathcal{B}}(\mathbb{F}_q)$  について次の同型が知られている [Oht]。

$$\hat{\mathcal{B}}(\mathbb{F}_q) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}/\left(\frac{q+1}{2}\right)\mathbb{Z}, & \text{if } q \equiv 1, 9 \pmod{12}, \\ \mathbb{Z}/\left(\frac{q+1}{4}\right)\mathbb{Z}, & \text{if } q \equiv 3, 7 \pmod{12}, \\ \mathbb{Z}/\left(\frac{q+1}{6}\right)\mathbb{Z}, & \text{if } q \equiv 5 \pmod{12}, \\ \mathbb{Z}/\left(\frac{q+1}{12}\right)\mathbb{Z}, & \text{if } q \equiv 11 \pmod{12}. \end{cases}$$

次に 3-cocycle  $\psi : H_3^Q(X_r) \rightarrow \hat{\mathcal{P}}(\mathbb{F}_q)$  を定めるため、斉次複体を導入する。以降、 $Y$  を  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_q)$  が右から作用する集合とする。ここでは  $Y$  として、parabolic カンドル  $X_r$  や射影空間  $\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_q) := \mathbb{F}_q \cup \{\infty\}$  を想定している。 $C_n^\Delta(Y)$  は  $Y^{n+1}$  によって生成される  $\mathbb{Z}$ -自由加群とし、境界準同型を

$$\partial_n^\Delta : C_n^\Delta(Y) \rightarrow C_{n-1}^\Delta(Y), \quad (y_0, \dots, y_n) \mapsto \sum_{t=0}^n (-1)^t (y_0, \dots, y_{t-1}, y_{t+1}, \dots, y_n)$$

で定めれば、これは複体となる。 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_q)$  の  $Y$  への作用は  $C_n^\Delta(Y)$  の対角作用を誘導するため、テンソル積  $C_*^\Delta(Y)_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_q)} := C_*^\Delta(Y) \otimes_{\mathbb{Z}[\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_q)]} \mathbb{Z}$  を考えることができる。この複体の詳しい研究が Hutchinson 氏によってなされている [Hut13, Section 2]。

$Y = X_r$  の場合に、*Inoue-Kabaya 鎖写像* という鎖写像  $\varphi_* : C_*^R(X_r) \rightarrow C_*^\Delta(X_r)_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_q)}$  を定めることができる。すなわち、これは準同型  $\varphi_* : H_3^Q(X_r) \rightarrow H_3^\Delta(X_r)_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_q)}$  を誘導する。特に  $n = 2, 3$  において、以下のように定義される。

$$\begin{aligned} \varphi_2(a, b) &= (p_0, a, b) - (p_0, a \triangleleft b, b), \\ \varphi_3(r, a, b) &= (p_0, r, a, b) - (p_0, r \triangleleft a, a, b) - (p_0, r \triangleleft b, a \triangleleft b, b) + (p_0, (r \triangleleft a) \triangleleft b, a \triangleleft b, b). \end{aligned}$$

$n > 3$  においても定義されるが、ここでは紹介しない (詳細は [IK14])。

最後に準同型  $H_3^\Delta(\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_q))_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_q)} \rightarrow \hat{\mathcal{P}}(\mathbb{F}_q)$  を複比を用いて構成する。すなわち、任意の  $(x, y, z) \in$

$C_n^\Delta(\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_q))$  に対して、

$$\phi(x, y, z) := \begin{cases} (z-x)(x-y)(z-y)^{-1}, & \text{if } x, y, z \neq \infty, \\ (y-z)^{-1}, & \text{if } x = \infty, \\ z-x, & \text{if } y = \infty, \\ x-y, & \text{if } z = \infty, \end{cases}$$

と定め、さらに  $\Phi : C_3^\Delta(\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_q)) \rightarrow \hat{\mathcal{P}}(\mathbb{F}_q)$  を

$$\Phi(x_1, x_2, x_3, x_4) = \begin{cases} \left[ \begin{array}{c} \phi(x_1, x_2, x_4) \\ \phi(x_1, x_2, x_3) \end{array} \right], & \text{if } x_1, x_2, x_3, x_4 \text{が互いに異なる,} \\ 0, & \text{otherwise,} \end{cases}$$

と定める。このとき、 $\Phi$  は準同型  $H_3^\Delta(\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_q))_{\text{SL}_2(\mathbb{F}_q)} \rightarrow \hat{\mathcal{P}}(\mathbb{F}_q)$  を誘導することがわかる [Hut13]。加えて、その像は  $\hat{\mathcal{B}}(\mathbb{F}_q)$  に包含されることが示される。以上をまとめれば、

**Proposition 3.1.**  $\text{proj} : X_r \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{F}_q)$  を標準的な射影とする。次の合成写像  $\psi$  はカンドル 3-cocycle である。

$$\psi : H_3^Q(X_r) \xrightarrow{\varphi_3} H_3^\Delta(X_r)_{\text{SL}_2(\mathbb{F}_q)} \xrightarrow{\text{proj}_*} H_3^\Delta(\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_q))_{\text{SL}_2(\mathbb{F}_q)} \xrightarrow{\Phi_*} \hat{\mathcal{B}}(\mathbb{F}_q)$$

更に次が分かっている。

**Proposition 3.2.**  $\sum_{S \in \text{Col}_{X_r}(D)} \langle \psi, [S] \rangle$  は reduced DW 不変量  $(p-1)\widehat{\text{DW}}_p(K)$  に等しい。

### 3.3 Some computation examples with Quandle cocycle invariant

上記の議論によって、具体的なカンドル 3-cocycle を定めることができる。よって、プログラミングを用い  $X_r$ -彩色を求めることによって、カンドルコサイクル不変量  $\langle \psi, [S] \rangle \in \hat{\mathcal{P}}(\mathbb{F}_p)$  を計算することができる。以下の表は、いくつかの結び目を除いた七交点以下の結び目に対するカンドルコサイクル不変量である。

ここで  $t \in \hat{\mathcal{P}}(\mathbb{F}_p)$  は  $p$  に対応する生成元を表している。ただし、 $\hat{\mathcal{B}}(\mathbb{F}_{11})$  は自明な群であるため、 $p = 11$  の場合は省いた。

	$6_2$	$6_3$	$7_3$
$p = 7$	96	12	12
$p = 13$	24	24	$312t^2 + 336$
$p = 17$	$544t + 576$	$544t^2 + 544t + 32$	32
$p = 19$	720	36	36
$p = 23$	$1012t + 44$	2068	$2024t + 44$
$p = 29$	$3248t^4 + 1624t^2 + 56$	$1624t^3 + 1624t^2 + 56$	56
$p = 31$	60	$1860t^7 + 1860t + 60$	$1860t^7 + 1920$
$p = 37$	72	72	$2664t^{16} + 72$

	$7_5$	$7_6$	$7_7$
$p = 7$	12	$84t + 12$	12
$p = 13$	24	24	336
$p = 17$	32	32	$544t^2 + 1120$
$p = 19$	36	$684t^4 + 36$	$684t^2 + 684t + 36$
$p = 23$	1056	$1012t + 44$	3080
$p = 29$	56	$1624t^2 + 1680$	$1624t + 56$
$p = 31$	60	$1860t^4 + 60$	$1860t^4 + 60$
$p = 37$	$2664t^{17} + 2664t^{13} + 72$	$2664t^2 + 72$	$5328t + 72$

表 1: 素数  $p$  と結び目  $K$  にたいする  $2(p-1)\widehat{DW}_p(K)$  の値

## 参考文献

- [Bro94] K. S. Brown, *Cohomology of groups*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 87, Springer-Verlag, New York, 1994.
- [CKS01] J. S. Carter, S. Kamada, and M. Saito, *Geometric interpretations of quandle homology*, Journal of knot theory and its ramifications **10** (2001), no. 03, 345–386.
- [DW90] R. Dijkgraaf and E. Witten, *Topological gauge theories and group cohomology*, Comm. Math. Phys. **129** (1990), no. 2, 393–429.
- [Hut13] K. Hutchinson, *A Bloch-Wigner complex for  $SL_2$* , J. K-Theory **12** (2013), no. 1, 15–68.
- [IK14] A. Inoue and Y. Kabaya, *Quandle homology and complex volume*, Geometriae Dedicata **171** (2014), no. 1, 265–292.
- [Kar21a] H. Karuo, *The reduced Dijkgraaf-Witten invariant of double twist knots in the Bloch group of  $\mathbb{F}_p$* , J. Knot Theory Ramifications **30** (2021), no. 7, Paper No. 2150055, 52.
- [Kar21b] ———, *The reduced Dijkgraaf-Witten invariant of twist knots in the Bloch group of a finite field*, J. Knot Theory Ramifications **30** (2021), no. 3, Paper No. 2150014, 70.
- [Nos15] T. Nosaka, *Homotopical interpretation of link invariants from finite quandles*, Topology and its Applications **193** (2015), 1–30.
- [Nos17] ———, *Quandles and topological pairs*, SpringerBriefs in Mathematics, Springer, Singapore, 2017, Symmetry, knots, and cohomology.
- [Oht] T. Ohtsuki, *On the bloch groups of finite fields and their quotients by the relation corresponding to a tetrahedral symmetry*, preprint.
- [Wak92] M. Wakui, *On Dijkgraaf-Witten invariant for 3-manifolds*, Osaka J. Math. **29** (1992), no. 4, 675–696.