# Observable Lyapunov Irregular Sets for Planar Piecewise Expanding Maps

九州大学大学院 マス・フォア・イノベーション連係学府 数理学系
山本航大 (Kodai YAMAMOTO)

**概要**

Lyapunov 指数は力学系を解析するための重要な特徴の一つであり，カオス性を測るための指標にもなっている．だがその存在についてはほとんど議論がされていない．本稿では Lyapunov 非正則集合と呼ばれる Lyapunov 指数が存在しない点全体の集合が，Lebesgue 測度正となるかという問題を考える．今回は，区分拡大写像に関して得られた結果について報告する．

## 1　力学系

- **離散力学系**

$X$ を相空間とする．$X$ 上の（離散）力学系とは，$X$ からそれ自身への微分同相写像

$$f\colon X \to X$$

の族 $\{f^n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ のことをいう．

- **連続力学系**

$X$ を相空間とする．微分方程式

$$x' = v(x)$$

で $t = 0$ で $x_0$ を通る解を $\phi(t, x_0)$ とする．$t$ を時間とすると $\phi(t, x_0)$ は $x_0$ の状態変化と見ることができる．もし任意の初期値と任意の $t$ について解が存在するとき，この常微分方程式は $X$ 上の連続力学系を定めるという．

力学系とは，一定の規則の時間変化を記述する数学の分野である．例えば，2 つの天体が Newton の万有引力の法則のもとで運動する時，これは常微分方程式によって表現され，この常微分方程式を解くことで解の挙動を知ることができる．だが解くことのできる常微分方程式は限られており，実際 3 つの天体の運動を記述する常微分方程式（3 体問題）は解析的に解くことが不可能であることが 19 世紀末にポアンカレによって示された．そこでポアンカレはこれまでの解を具体的に求める（定量的）ことから，解の大域的な状態を位相的に（定性的）研究することを提唱しこれが現代的な力学系の発展の始まりになった．

**例 1** (ローレンツ方程式)**.** 連続力学系の例として，ローレンツ方程式

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -px + py \\ \frac{dy}{dt} &= -xz + rx - y \\ \frac{dz}{dt} &= xy - bz \end{aligned}$$

がある．これは気象を数学的にモデル化したものである．以下の図は $p = 10, r = 28, b = \frac{8}{3}$ の場合である．

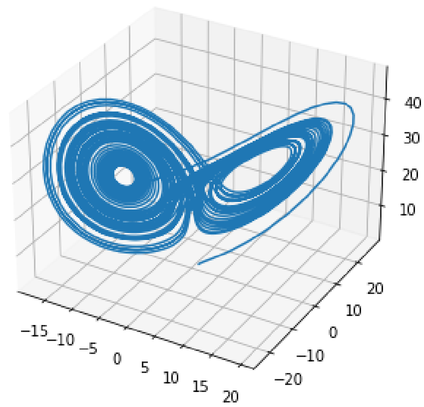


図 1　ローレンツアトラクター

**例 2** (ロジスティック写像)**.** 離散力学系の例として，ロジスティック写像

$$x_{n+1} = ax_n(1 - x_n)$$

がある．ロジスティック写像は，生物の個体数に関するモデルである．繁殖率を $a$，第 $n$ 世代の生物の個体数を $x_n$ とすると第 $n+1$ 世代の生物の個体数 $x_{n+1}$ は上記のようになる．

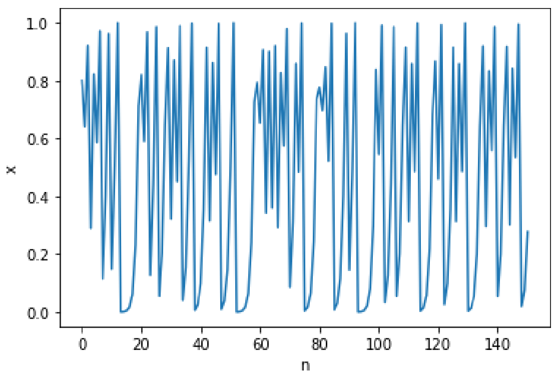


図 2　$a = 4$ でのロジスティック写像の時間発展

# 2　Lyapunov 指数と Lyapunov 非正則

## 2.1　Lyapunov 指数

**定義 1.** $\mathbb{R}^m$ を $m$ 次元ユークリッド空間，$f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ を可微分写像とする．
$x \in \mathbb{R}^m$ に関する ***Lyapunov* 指数**とは，ある 0 でない $\boldsymbol{v} \in T_x\mathbb{R}^m$ についての極限値

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \|Df^n(x)\boldsymbol{v}\| \tag{1}$$

が存在することである．

Lyapunov 指数は力学系を解析していく上で重要な特徴の一つである．Lyapunov 指数を調べることで軌道の性質を見ることができる．Lyapunov 指数が正のときは，軌道は離れていき負のときは，互いに近づいていく．Lyapunov 指数が正であることはカオス（例 1, 例 2 はカオスの例）であることの一つの指標にもなっている．

## 2.2　Oseledets の定理

極限（1）が存在するための十分条件は古くから知られている．任意の $A \subset \mathbb{R}^m$ に対して $\mu(f^{-1}(A)) = \mu(A)$ を満たす測度 $\mu$ を $f$ に関する不変測度という．

**定理 1** (Oseledets の定理)**.** $\mathbb{R}^m$ 上の可微分写像 $f$ を考える．$f$ に関する不変測度 $\mu$ があると仮定する．このとき，$\mu$ についてほとんど全ての点 $x \in \mathbb{R}^m$ に対して，自然数 $k = k(x)$ と $k$ 個の実数 $\lambda_1(x) > \cdots > \lambda_k(x)$, さらに $T_x\mathbb{R}^m$ の直和分解 $T_x\mathbb{R}^m = E_1 \oplus \cdots \oplus E_k(x)$ が存在し, 次の条件を満たしている．

- 直和分解の要素は $Df(x)$ 不変である．つまり各 $1 \le i \le k$ に対して，

$$Df(x)E_i(x) = E_i(f(x)).$$

- 任意の 0 でない $\boldsymbol{v} \in E_i(x)$ に対して，

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \|Df^n(x)\boldsymbol{v}\| = \lambda_i(x).$$

$\mathbb{R}^m$ では Lebesgue 測度を考えるのが一般的である．ここで注意すべきなのは，この定理を満たす点の集合はほとんどの点で成り立っているので測度 $\mu$ で測ったときは正になるが，この測度 $\mu$ は Lebesgue 測度である保証はない．

## 2.3　Lyapunov 非正則 (Lyapunov irregular)

**定義 2.** 点 $x \in \mathbb{R}^m$ が $f$ に関して ***Lyapunov* 非正則 *(Lyapunov irregular)*** であるとは，

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \|Df^n(x)\boldsymbol{v}\|$$

が存在しないような $\boldsymbol{v} \in T_x\mathbb{R}^m$ が存在することとする．*Lyapunov* 非正則な点全体の集合を $f$ の *Lyapunov* 非正則集合という．

同様に，点 $x$ が Birkhoff 非正則とは，連続関数 $\varphi\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ が存在し，その時間平均 $\lim_{n\to\infty}(\sum_{i=0}^{n-1}\varphi(f^i(x)))/n$ が存在しないことを言う．Oseledets の定理から，Lyapunov 非正則集合は任意の不変測度について測度 0 になる．しかしこれは，Lebesgue 測度正になるかどうかは何も示唆していない．Birkhoff のエルゴード定理は Birkhoff 非正則集合が任意の不変測度について測度 0 であるが，多様な力学系について Birkhoff 非正則集合の Lebesgue 測度が正になることが知られている．Birkhoff 非正則集合が Lebesgue 測度正となることは，力学系の非双曲性と強く関連しており，力学系の研究領域を切り開いていった．このことを考えると Lyapunov 非正則集合が Lebesgue 測度正になるような力学系のクラスを見つけることは，重要な課題であることが期待されている．Lyapunov 非正則集合が Lebesgue 測度正となる例は，Ott と Yorke[4] により 8 の字アトラクターという例が初めて紹介された．

## 3 主結果

主結果を述べる前にいくつか準備をする．以下は $\mathbb{R}^2$ の上で話を進めていく．

**定義 3.** *Lebesgue* 可測集合 $A$ が**観測可能（*observable*）**とは $A$ の *Lebesgue* 測度 $Leb(A)$ が正になることである．

**定義 4.** $D \subset \mathbb{R}^2$ を開長方形，$f\colon D \to D$ を写像とする．$f$ が**区分 $C^r$ 級拡大写像 *(Piecewise $C^r$ expanding map)*** とは，ある定数 $\lambda > 1$ と領域 $D_i \subset D, 1 \le i \le k$ が存在し以下の条件を満たす．

- 各領域 $D_i, 1 \le i \le k$ が $C^r$ 境界を持ち $\overline{\uplus_{i=1}^k D_i} = \overline{D}$ を満たす．
- 制限 $f|_{D_i}$ は $\overline{D_i}$ の近傍 $\mathcal{N}(\overline{D_i})$ に $C^r$ 微分同相写像 $f_i\colon \mathcal{N}(\overline{D_i}) \to \mathbb{R}^2$ として拡張され

$$\|Df_i(x)\boldsymbol{v}\| \ge \lambda\|\boldsymbol{v}\|$$

を任意の $x \in \mathcal{N}(\overline{D_i}), \boldsymbol{v} \in T_x\mathcal{N}(\overline{D_i})$ で満たす．

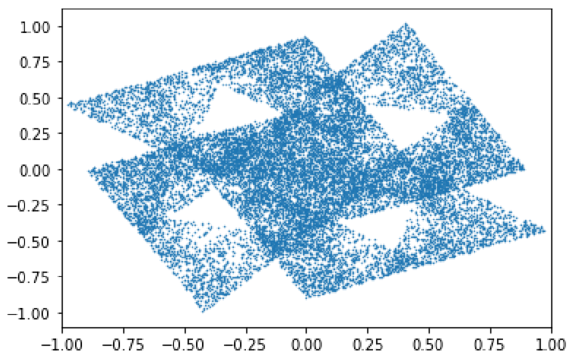


図 3　区分拡大写像の軌道

次に述べる定理が今回の主結果である．

**定理 2.** *(i)* 任意の $r(1 \leq r < \infty)$ に対して，2 次元の区分 $C^r$ 級拡大写像 $F_\sigma(0 < \sigma < 1)$ で各$F_\sigma$ は観測可能（*Lebesgue* 測度正）な *Lyapunov* 非正則集合を持つようなものが存在する．
*(ii)*2 次元の区分 $C^\omega$ 級拡大写像の *Lyapunov* 非正則集合は観測可能ではない．

つまり区分拡大写像は微分可能性が変化すると異なる振る舞いを起こすことがある．(i) の結果は Tsujii[5] の結果を修正することで得られた．(ii) については Buzzi[1] による区分拡大写像のスペクトル解析に基づくものである．

## 参考文献


[1] J. Buzzi, Absolutely continuous invariant probability measures for arbitrary expanding piecewise $\mathbb{R}$-analytic mappings of the plane, Ergodic Theory Dynam. Sys. **20** (2000) 697-708.

[2] 國府寛司, 力学系の基礎, 朝倉書店, 2002.

[3] Y. Nakano, T. Soma and K. Yamamoto, Observable Lyapunov irregular sets for planar piecewise expanding maps, under review. https://arxiv.org/abs/2206.09508

[4] W. Ott and J. Yorke, When Lyapunov exponents fail to exist, Phyisical Review E, **78** (2008), 056203–056203.

[5] M. Tsujii, Piecewise expanding maps on the plane with singular ergodic properties, Ergodic Theory Dynam. Sys. **20** (2000) 1851-1857.

[6] M. Viana, Lectures on Lyapunov exponents, Cambridge Studies in Advanced Math. **145**, Cambridge University Press, Cambridge, 2014.

[7] L. Wen, Differentiable Dynamical Systems: An Introduction to Structural Stability and Hyperbolicity. Graduate Studies in Mathematics, Vol. 173. American Mathematical Society, 2016.