超平面配置の free path について

九州大学大学院 数理学府 数理専攻
山口徹 (Toru YAMAGUCHI)

概要

超平面配置とはベクトル空間中の超平面の有限集合であり, その対数的ベクトル場のなす加群が自由加群となるような超平面配置を特に自由配置と呼ぶ. 超平面配置の研究では, 様々な観点から研究がなされているが, 代数的側面から行う本研究では, 上記の自由配置に着目して研究を行なっている. 超平面を除去する操作は, 超平面配置において基本的な操作であり, 自由配置から超平面を一枚除去した配置についても研究が進んでおり, その構造についても多くのことが明らかとなっている. その一方で, 複数枚の超平面を除去した配置については, あまり研究が進んでいないのが現状である. そこで本講演では, 自由性を保つように複数枚の超平面を除去する道 (free path) を定義, 考察することで得られた, 自由配置の遺伝性に関する研究結果を紹介する. なお本研究は, 九州大学の阿部拓郎氏との共同研究に基づくものである.

1 導入

この章では超平面配置に関する基本的な事項を紹介し, 本研究で重要な自由配置の定義とその性質について紹介していく.

$\mathbb{K}$ を体, $V = \mathbb{K}^\ell$, $S := \mathrm{Sym}(V^*)$ とする. すなわち, V^* の基底を $x_1, \ldots, x_\ell$ とすると, $S = \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_\ell]$. $H \subset V$ が**超平面**であるとは, ある $\alpha \in V^* \setminus \{0\}$ とある $c \in \mathbb{K}$ が存在して, $H = \{ x \in V \mid \alpha(x) = c \}$ と表されものをいう. $\mathcal{A}$ が**超平面配置**とは, 超平面の有限集合のことをいう. 考えているベクトル空間の次数が重要であるとき, しばしば ℓ **次元配置**ということもある. また, $\mathcal{A}$ の元がすべて原点を通る, すなわち $c = 0$ のとき, 特に $\mathcal{A}$ を中心的配置といい, 本稿では中心的な配置のみを扱う.

定義 1.1.
$H \in \mathcal{A}$ に対して $\mathrm{Ker}(\alpha_H) = H$ なる $\alpha_H \in V^*$ をひとつ決めて固定する. このとき,

$$Q(\mathcal{A}) := \prod_{H \in \mathcal{A}} \alpha_H$$

を, $\mathcal{A}$ の**定義多項式**という.

定義 1.2.

$$L(\mathcal{A}) := \{ \bigcap_{H \in \mathcal{B}} H \neq 0 \mid \mathcal{B} \subset \mathcal{A} \}$$

を $\mathcal{A}$ の**交差束**という．ただし, $\mathcal{B}=\emptyset$ のときは V と定義する．

次に超平面配置に対する重要かつ基本的な操作を挙げておく．

定義 1.3.
$X \in L(\mathcal{A})$ に対し,

$$\mathcal{A}_X := \{H \in \mathcal{A} \mid X \subset H\}$$

を $\mathcal{A}$ の X での**局所化**といい,

$$\mathcal{A}^X := \{H \cap X \mid H \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{A}_X\}$$

を $\mathcal{A}$ の X への**制限**という．

$\mathcal{A}^X$ は $X \simeq \mathbb{K}^{\dim X}$ 中の超平面配置である．特に $H \in \mathcal{A}$ をとると, $\mathcal{A}^H$ は $\mathcal{A}$ より次元が一つ低い配置になる．

$\mathrm{Der}S$ を S の $\mathbb{K}$-線形な S 導分全体の集合, すなわち $\mathrm{Der}S = \bigoplus_{i=1}^{\ell} S\partial_{x_i}$ とする．S は自然な多項式次数を次数とする次数付き環であるため, $\mathrm{Der}S$ はその次数構造を引き継いで次数付き S 加群となる．ここで整数 $d \geqq 0$ に対して, $\theta \in \mathrm{Der}S$ が次数 d の**斉次元**であるとは, $\theta(\alpha)$ が $\alpha(\neq 0) \in V^*$ に対して, 常に次数 d の斉次式となるときにいう．超平面配置の代数では, 以下で定義する $\mathrm{Der}S$ の部分加群 $D(\mathcal{A})$ が主要な研究テーマである．

定義 1.4.
$\mathcal{A}$ の**対数的ベクトル場** $D(\mathcal{A})$ を,

$$D(\mathcal{A}) := \{\theta \in \mathrm{Der}S \mid \theta(\alpha_H) \in H \ (\forall H \in \mathcal{A})\}$$

で定義する．これは次数付き S 加群の構造を持つ．

一般の対数的ベクトル場 $D(\mathcal{A})$ で成り立つことをいくつか紹介する．

定義 1.5.
Euler 微分 $\theta_E \in D(\mathcal{A})$ を次で定義する．

$$\theta_E := \sum_{i=1}^{\ell} x_i \partial_{x_i}$$

θ_E は一次の斉次元であり, 任意の $\mathcal{A}$ に対して $\theta_E \in D(\mathcal{A})$ となる．

補題 1.6.　超平面配置 $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ に対して $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ ならば, $D(\mathcal{B}) \supset D(\mathcal{A})$.

$D(\mathcal{A})$ は一般には自由加群ではないが, 自由加群であれば $D(\mathcal{A})$ の階数は ℓ になる．また次数付き

加群の性質から, 基底の各元が斉次元となるように基底をとることができる. これらに注意して, 自由配置を次で定義する.

定義 1.7.
$\mathcal{A}$ が**指数** $\exp(\mathcal{A}) = (d_1, \ldots, d_\ell)$ をもつ**自由配置**とは, $D(\mathcal{A})$ が自由 S 加群で斉次基底 $\theta_1, \ldots, \theta_\ell$ をもち, $\deg \theta_i = d_i (i = 1, \ldots, \ell)$ となることをいう.

次に紹介する定理は斎藤の判定法と呼ばれる, 超平面配置の自由性に必要十分条件を与える定理である. これは自由配置に関する研究に欠かせない大変重要な定理である. まずは斎藤行列について以下で定義する.

命題 1.8 ([4]).
$\theta_1, \ldots, \theta_\ell \in D(\mathcal{A})$ に対して,

$$M = M(\theta_1, \ldots, \theta_\ell) := (\theta_i(x_j))$$

をその**斎藤行列**という. このとき, $\det M \in SQ(\mathcal{A})$.

定理 1.9 (斎藤の判定法 [4]).
$\theta_1, \ldots, \theta_\ell \in D(\mathcal{A})$ に対して以下は同値.

(1) $\mathcal{A}$ は $\theta_1, \ldots, \theta_\ell$ を $D(\mathcal{A})$ の基底とする自由配置.
(2) 斎藤行列 M に対してある $c \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ が存在して, $\det M = cQ(\mathcal{A})$.
(3) $\theta_1, \ldots, \theta_\ell$ を斉次に取れて, S 上独立かつ $\sum_{i=1}^{\ell} \deg \theta_i = |\mathcal{A}|$.

斎藤の判定法を用いた自由性を決定する簡単な例として, 以下のようなものがある.

系 1.10. 任意の 2 次元配置 $\mathcal{A}$ は自由配置で, その指数は $\exp(\mathcal{A}) = (1, |\mathcal{A} - 1|)$.
$\because$) 座標を取り替えて $\mathcal{A}$ が超平面 $\{x = 0\}$ を含むようにできる. このとき, θ_E, $\dfrac{Q(\mathcal{A})}{x}\partial_x$ はともに $D(\mathcal{A})$ に含まれ, 斎藤の判定法から $D(\mathcal{A})$ の基底になることがわかる.

2 準備

本研究では, 自由配置から超平面を複数枚除去した配置の構造を考察することを目標としている. そのために, その準備としてこの章では, 自由配置から超平面を一枚除去した配置, そして一枚加えた配置に関する定理をいくつか紹介する.

定理 2.1 ([3]).
$\mathcal{A}$ を ℓ 次元配置, $H \in D(\mathcal{A})$ とし, $\mathcal{A}' := \mathcal{A} \setminus \{H\}$ とおく. このとき以下の (1), (2), (3) のうち二つ

が成立すれば, 残り一つも成立する.

(1) $\mathcal{A}$ が自由配置で, $\exp(\mathcal{A}) = (d_1, \ldots, d_{\ell-1}, d_\ell)$.
(2) $\mathcal{A}'$ が自由配置で, $\exp(\mathcal{A}') = (d_1, \ldots, d_{\ell-1}, d_\ell - 1)$.
(3) $\mathcal{A}^H$ が自由配置で, $\exp(\mathcal{A}^H) = (d_1, \ldots, d_{\ell-1})$.

$\mathcal{A}$ か $\mathcal{A}'$ が自由配置のとき, もう一方が自由配置であるかどうかを調べるには, $\mathcal{A}^H$ を調べればよい. ここで $\mathcal{A}^H$ は次元が一つ低い配置であり, 直接 $\mathcal{A}$ や $\mathcal{A}'$ を調べるより計算が簡単であることが多い.

定義 2.2 ([1] の Definition 1.1).
超平面配置 $\mathcal{A}$ が次の極小自由分解を持つとき, $\mathcal{A}$ は**指数** POexp($\mathcal{A}$)$= (d_1, \ldots, d_\ell)$, **level** d の **POG 配置**という.

$$0 \longrightarrow S[-d-1] \xrightarrow{(\alpha, f_1, \cdots, f_\ell)} S[-d] \oplus (\oplus_{i=1}^{\ell} S[-d_i]) \longrightarrow D(\mathcal{A}) \longrightarrow 0.$$

特に $\alpha \neq 0$ のとき, $\mathcal{A}$ を **SPOG 配置**という.

つまり SPOG 配置とは, $\ell + 1$ つの生成元を持ち, その生成元の間に関係式が 1 つ存在する配置のことである. これは自由配置より構造が少しだけわるい配置といえる.

定理 2.3 ([1] の Theorem 1.4).
$\mathcal{A}$ を指数 $\exp = (d_1, \ldots, d_\ell)$ をもつ自由配置とし, $H \in \mathcal{A}$, $\mathcal{A}' := \mathcal{A} \setminus \{H\}$ とする.
このとき, $\mathcal{A}'$ が自由配置でないならば, $\mathcal{A}'$ は SPOG 配置で指数 POexp($\mathcal{A}'$)=$(d_1, \ldots, d_\ell)$, level $d = |\mathcal{A}'| - |\mathcal{A}^H|$ をもつ.

この定理から自由配置から超平面を一枚除去した配置は, 自由または SPOG 配置であり, 極端に構造がわるくなることはないとわかる. それでは次に一枚加えた配置についても見ていくとする.

定理 2.4 ([3]).
$H \in \mathcal{A}$, $\mathcal{A}' := \mathcal{A} \setminus \{H\}$ とする.
このとき, 次数が $|\mathcal{A}| - |\mathcal{A}^H| - 1$ である斉次多項式 B が存在して, 任意の $\theta \in \mathcal{A}'$ に対して $\theta(\alpha_H) \in (\alpha_H, B)$ を満たすものが存在する.
この B を $(\mathcal{A}', H)$ の多項式 B という.

今 $D(\mathcal{A}) \subset D(\mathcal{A}')$ であるが, 多項式 B は $D(\mathcal{A}')$ の元 θ がどの程度 $D(\mathcal{A})$ からはみ出すかを表す. つまり多項式 B を使えば, H を加えたときの各元 θ の様子がわかる. 実際, 次の系がわかる.

系 2.5. $\theta \in D(\mathcal{A}')$ が, $(\mathcal{A}', H)$ の多項式 B に対して, $\deg \theta < \deg B$ ならば $\theta \in D(\mathcal{A})$.

∵) $\theta(\alpha_H) \in (\alpha_H, B)$ より $\theta(\alpha_H) = f\alpha_H + gB$ $(f, g \in S)$ とかける. $g \neq 0$ ならば, $\deg\theta = \deg(f\alpha_H + gB) \geqq \deg B$. よって $g = 0$ となり, $\theta \in D(\mathcal{A})$ がわかる.

では次に一枚加えたときの配置全体の構造について見ていく.

定義 2.6 ([2] の Definition 3.2).
$\mathcal{A}$ を超平面配置, $H \in \mathcal{A}$ に対する $\mathcal{A}' := \mathcal{A} \setminus \{H\}$ を自由配置とする.
このとき, $\mathcal{FB}(\mathcal{A}')$ を $D(\mathcal{A}')$ の基底の組をすべて含む集合とし, 各 $X := \{\theta_1, \ldots, \theta_\ell\} \in \mathcal{FB}(\mathcal{A}')$ に対して,

$$NT(X) := |\{i \mid 1 \leqq i \leqq \ell, \theta_i \notin D(\mathcal{A})\}|$$

と定義する. また,

$$SNT(\mathcal{A}', H) := \min\{NT(X) \mid X \in \mathcal{FB}(\mathcal{A}')\}$$

と定義する.

系 2.7. $\mathcal{A}'$ を $SNT(\mathcal{A}', H) = 1$ なる自由配置とすると, $\mathcal{A}$ は自由配置.
∵) $D(\mathcal{A}')$ の基底で, $\theta_1, \ldots, \theta_{\ell-1} \in D(\mathcal{A})$, $\theta_\ell \notin D(\mathcal{A})$ なる $\theta_1, \ldots, \theta_\ell \in D(\mathcal{A}')$ がとれる. このとき, 斎藤の判定法から $\theta_1, \ldots, \theta_{\ell-1}, \alpha_H\theta_\ell$ が $D(\mathcal{A})$ の基底になることがわかる.

定理 2.8 ([1] の Theorem 1.9, [2] の Propotision 3.5).
$\mathcal{A}'$ を $SNT(\mathcal{A}', H) = 2$ なる自由配置とし, $\theta_1, \ldots, \theta_\ell \in D(\mathcal{A}')$ を $\theta_i, \theta_j \notin D(\mathcal{A}), \theta_k \in D(\mathcal{A})$ $(k \neq i, j)$ なる $D(\mathcal{A}')$ の基底とする.
このとき, ある次数が $\deg\theta_i + \deg\theta_j - |\mathcal{A}'| + |\mathcal{A}^H|$ なる $D(\mathcal{A})$ の元 φ が存在して, $D(\mathcal{A})$ は $\{\theta_k\}_{k \neq i,j} \cup \{\alpha_H\theta_i, \alpha_H\theta_j, \varphi\}$ で生成される. 特に, $\mathcal{A}$ は SPOG 配置になる.

系 2.9. $\ell = 3$ のとき, $\mathcal{A}'$ が自由配置ならば $\mathcal{A} = \mathcal{A}' \cup \{H\}$ は自由または SPOG 配置.
∵) $\theta_E \in D(\mathcal{A}')$ より, $SNT(\mathcal{A}', H) \leqq 2$.

命題 2.10 ([2] の Proposition 3.4).
$\mathcal{A}'$ を $SNT(\mathcal{A}', H) \geqq 3$ なる自由配置とすると, $\mathcal{A}$ は自由配置でも SPOG 配置でもない.

3 主結果

この章では, 我々の研究の成果について紹介させてもらう. そのためにまず, 超平面配置の自由性の遺伝に関する用語を定義する.

定義 3.1.

$H_1, H_2, \cdots, H_n \in \mathcal{A}$, $\mathcal{B} := \mathcal{A} \setminus \{H_1, H_2, \cdots, H_n\}$ とする.
ある n 次対称群の元 σ が存在し, 超平面配置 $\mathcal{A}$, $\mathcal{A} \setminus \{H_{\sigma(1)}\}$, $\mathcal{A} \setminus \{H_{\sigma(1)}, H_{\sigma(2)}\}$, $\cdots$, $\mathcal{A} \setminus \{H_{\sigma(1)}, H_{\sigma(2)}, \cdots, H_{\sigma(n)}\}$ がすべて自由配置となるとき, 超平面配置の組 $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ は **free path** をもつという.

free path をもつとは, すなわち $\mathcal{A}$ から $\mathcal{B}$ まで自由性を保ちながら超平面を除去するやり方が存在するということである. 例えば $n = 2$ のときを考えてみる. このとき $\mathcal{B}$ は $\mathcal{A}$ から 2 枚の超平面 H_1 と H_2 を除去した配置であるが, その除去の仕方は 2 通りある. H_1 を除去してから H_2 を除去するやり方 $\mathcal{A} \xrightarrow{-H_1} \mathcal{A} \setminus \{H_1\} \xrightarrow{-H_2} \mathcal{B}$, そして H_2 を除去してから H_1 を除去するやり方 $\mathcal{A} \xrightarrow{-H_2} \mathcal{A} \setminus \{H_2\} \xrightarrow{-H_1} \mathcal{B}$ の 2 通りである. $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ が free path を持つとは, いずれかの方法で, 経由する超平面配置が常に自由配置になるように順に超平面を除去できるということである. 次に示すこの free path についての定理が我々の研究の主結果である.

主定理 3.2.
$\mathcal{A} : \ell$ 次元配置とし, $H_1, H_2 \in \mathcal{A}$, $\mathcal{A}'' := \mathcal{A} \setminus \{H_1, H_2\}$ とする.
このとき, $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}''$ がともに自由配置ならば, $(\mathcal{A}, \mathcal{A}'')$ は free path をもつ.
すなわち, $\mathcal{A} \setminus \{H_1\}$ または $\mathcal{A} \setminus \{H_2\}$ は自由配置.

例えば, 指数がわかっている 3 次元配置 $\mathcal{A}$ から二枚の超平面を除去した配置の自由性について考えてみる. このとき系 1.10 から任意の超平面 $H \in D(\mathcal{A})$ での制限 $\mathcal{A}^H$ は自由配置であり, その指数も $|\mathcal{A}^H|$ によって定まる. よって, 定理 2.1 から $|\mathcal{A}^H|$ の値がわかれば, 超平面を一枚除去した配置について, その自由性と指数が決定する. すなわち, 自由配置から一枚除去した配置の構造は（次元が低ければ）比較的簡単に計算することができるわけだ. ここで $\mathcal{A} \setminus \{H_1\}$ と $\mathcal{A} \setminus \{H_2\}$ のいずれかが自由であれば, $\mathcal{A}''$ は自由配置から一枚除去した配置であり, 自由配置であるかどうか, 簡単に確かめることができる. 逆に $\mathcal{A} \setminus \{H_1\}$ と $\mathcal{A} \setminus \{H_2\}$ のいずれも自由配置でないのであれば, 主定理 3.2 から $\mathcal{A}''$ が少なくとも自由配置ではないことがわかる. より高次元の場合も, 計算は複雑になるものの, 次元を一つ落とした配置の問題に帰着できるという点は変わらない.

$\ell = 3$ の場合に限定したとき, より強い結果が得られることが本研究で判明したので, 最後にそれを紹介する,

主定理 3.3.
$\mathcal{A} : 3$ 次元配置 とし, $H_1, H_2, H_3 \in \mathcal{A}$, $\mathcal{A}''' := \mathcal{A} \setminus \{H_1, H_2, H_3\}$ とする.
このとき, $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}'''$ がともに自由配置ならば, $(\mathcal{A}, \mathcal{A}''')$ は free path をもつ.

参考文献

[1] Takuro Abe, Plus-one generated and next to free arrangements of hyperplanes, Int. Math. Res. Not. IMRN 2021, no. 12, 9233-9261.

[2] Takuro Abe, Generalizaion of the addition and restriction theorems from free arrangements to the class of projective dimension one, arXiv: 2206.15059.

[3] Hiroaki Terao, Arrangements of hyperplanes and their freeness I. II. J. Fac, Sci. Univ. Tokyo 27(1980), 293-320.

[4] Kyoji Saito, Theory of logarithmic differential forms and logarithmic vector field. J. Fac. Sci. Univ. Tokyo 27(1980), 265-291.

[5] Peter Orlik and Hiroaki Terao, Arrangements of Hyperplanes. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 300. Springer-Verlag, Berlin, 1992.