遠アーベル幾何学における m 次可解グロタンディーク予想について

京都大学大学院 理学研究科 数学・数理解析専攻
山口永悟 (Naganori YAMAGUCHI)

概要

グロタンディーク予想とは「曲線の基本群からその曲線の情報を完全に復元できる」という予想であり、遠アーベル幾何学において重要な問題の一つである。これ自体は 1990 年代に中村博昭氏、玉川安騎男氏、望月新一氏らによって解決された。本講演では、グロタンディーク予想の m 次可解化、つまり「曲線の基本群の "最大幾何的 m 次可解商" からその曲線の情報を完全に復元できる」という予想の詳細と、現在の状況を述べる。

1　導入

遠アーベル幾何学とは、代数多様体という幾何的対象を、その代数多様体に付随するエタール基本群という代数的対象を使って研究する分野である。遠アーベル幾何学には、グロタンディーク予想 (または遠アーベル予想) と呼ばれる主要な研究対象がある。この予想はある種の代数多様体の情報がそのエタール基本群に "完全に" 含まれている事を主張する。この予想の m 次可解化が本研究の主な研究対象になるが、まずこの予想について見ていく前に、遠アーベル幾何学のより身近な例として、ノイキルヒ-内田の定理を紹介する。

1.1　ノイキルヒ-内田の定理

以下、K を体とし、K の代数閉包 $\overline{K}$ を一つ固定する。$\overline{K}$ に含まれる K の有限次ガロア拡大 K' に対し、次の群を拡大 K'/K のガロア群と呼ぶ。

$$\mathrm{G}(K'/K) := \left\{ \phi \in \mathrm{Aut}_{\mathrm{field}}(K') \;\middle|\; \begin{tikzcd} K' \arrow[rr, "\phi"] & & K' \\ & K \arrow[ul] \arrow[ur] & \end{tikzcd} \text{ は可換} \right\}$$

また、K の絶対ガロア群 G_K を同様に $\{\phi \in \mathrm{Aut}_{\mathrm{field}}(\overline{K}) \mid \phi|_K = \mathrm{id}_K\}$ と定義する。$\mathrm{G}(K'/K)$ は有限群であるが、これに離散位相を入れることにより $\mathrm{G}(K'/K)$ を位相群とみなす。$\overline{K}$ に含まれる K の有限次ガロア拡大を全て走るような射影極限 $\varprojlim_{K'/K:\text{fin.Gal.}} \mathrm{G}(K'/K)$ を考えると、これは自然な写像によって G_K と同型となる。$\mathrm{G}(K'/K)$ の離散位相の射影極限として得られる位相を G_K に入れることにより、G_K を位相群とみなす事が出来る。このようにして定義された位相群 G_K であるが、

これは K の情報をどれほど含んでいるであろうか？代数体の場合のこの疑問への回答が 1970 年代に証明された次のノイキルヒ-内田の定理である。

定理 1 (ノイキルヒ-内田の定理)**.** K、L を代数体と仮定する。また、$\mathrm{Inn}(G_L)$ を G_L の内部自己同型群とする。この時、次の自然な写像

$$\mathrm{Isom}_{\mathrm{field}}(K,L) \to \mathrm{Isom}_{\mathrm{top.group}}(G_K,G_L)/\mathrm{Inn}(G_L)$$

は全単射となる。特に、G_K と G_L が位相群として同型の時、K と L は体として同型である。

ガロア理論は、$\mathrm{G}(K'/K)$ が拡大 K'/K の全ての中間体の情報を含んでいることを主張している。定理 1 はガロア理論の拡張と考えることができ、K の構造を調べる事と G_K の構造を調べる事が等価であることを示している。従って、この定理は体 K と (位相) 群 G_K という全く異なる二つの代数的構造の完全な橋渡しを与えていると言える。遠アーベル幾何学においては、定理 1 の K、L を代数曲線に置き換えた予想を考える。これが、以下に述べるグロタンディーク予想である。

1.2 グロタンディーク予想

以下、k を体とし、U を k 上の代数多様体とする。U の関数体 $K(U)$ の代数閉包 $\overline{K(U)}$ を一つ固定し、対応する射 $\mathrm{Spec}(\overline{K(U)}) \to U$ を $\overline{u}$ と書く。体の有限次分離拡大の類似として、我々は U の有限次エタール被覆 ($\overline{u} \to$) $U' \to U$ を考える。この時、

$$\mathrm{Aut}_U(U') := \left\{ \phi \in \mathrm{Aut}_{\mathrm{scheme}}(U') \;\middle|\; \begin{tikzcd} U' \arrow[rr, "\phi"] \arrow[dr] & & U' \arrow[dl] \\ & U & \end{tikzcd} \text{は可換} \right\}$$

は有限群となる。(離散位相群とみなす。) $U' \to U$ の $\overline{u}$ におけるファイバーへの $\mathrm{Aut}_U(U')$ の作用が推移的であるとき、我々は $U' \to U$ をガロア被覆と呼ぶ。U の全てのガロア被覆を走るような射影極限を考える事により、我々は U の ($\overline{u}$ に関する) エタール基本群 $\pi_1(U,\overline{u}) := \varprojlim_{U'/U:\mathrm{fin.Gal.}} \mathrm{Aut}_U(U')$ を得る。($\mathrm{Aut}_U(U')$ の離散位相の射影極限を考えて $\pi_1(U,\overline{u})$ を位相群とみなす。) エタール基本群の簡単な例として、我々は 1.1 節で定義した体の絶対ガロア群を、次のようにとらえなおすことが出来る。

$$\pi_1(\mathrm{Spec}(K),\overline{\omega}) \cong G_K$$

ここで、K の代数閉包 $\overline{K}$ を一つ固定し、対応する射 $\mathrm{Spec}(\overline{K}) \to \mathrm{Spec}(K)$ を $\overline{\omega}$ と書いた。このように、エタール基本群とは体の絶対ガロア群の拡張であるとみなせる。一方、$k \subset \mathbb{C}$ の場合には、代数多様体 $U_{\mathbb{C}}$ から得られる複素解析空間 U^h の位相空間としての基本群 $\pi_1^{\mathrm{top}}(U^h,\overline{u}^h)$ と $U_{\overline{k}}$ のエタール基本群の間には次のような同型が存在する。

$$\pi_1(U_{\overline{k}},\overline{u}) \cong \widehat{\pi_1^{\mathrm{top}}(U^h,\overline{u}^h)}$$

ここで、群 G に対し、$\hat{G}$ は G の副有限完備化 (i.e., G の有限剰余群全てを走る射影極限) を表す。このように、エタール基本群は位相空間の基本群とも強い関係を持っている。

エタール基本群を使うことにより、我々は定理 1 の代数多様体への拡張を考える事が出来る。これは Alexander Grothendieck 氏が Gerd Faltings 氏への手紙の中で述べた予想であり、双曲的代数曲線の場合は正確には次のようになる。(以下、記号の見やすさのため、数論的基本群 $\pi_1(U,\overline{u})$ を Π_U、幾何的基本群 $\pi_1(U_{\overline{k}},\overline{u})$ を $\overline{\Pi}_U$ でそれぞれ表す。自然な全射 $\Pi_U \to G_k$ があることに注意する。)

定理 2 (グロタンディーク予想、中村-玉川-望月の定理)**.** k を $\mathbb{Q}$ 上有限生成と仮定し、U、V を k 上の双曲的代数曲線と仮定する。$\overline{v} : \mathrm{Spec}(\overline{K(V)}) \to V$ を $\overline{u}$ と同様に取り、$\Pi_V := \pi_1(V,\overline{v})$、$\overline{\Pi}_V := \pi_1(V_{\overline{k}},\overline{v})$ を同様に定める。この時、次の自然な写像

$$\mathrm{Isom}_k(U,V) \to \mathrm{Isom}_{G_k}(\Pi_U,\Pi_V)/\mathrm{Inn}(\overline{\Pi}_V)$$

は全単射となる。特に、Π_U と Π_V が G_k 上の位相群として同型の時、U と V は k 上のスキームとして同型である。

定理 2 は、U が種数 0 の場合を中村博昭氏が、アフィンの場合を玉川安騎男氏がそれぞれ証明しており、最終的には望月新一氏が完全に証明した。また、グロタンディーク予想には k が正標数の場合の類似も存在し、それも玉川安騎男氏、望月新一氏、及び Jakob Stix 氏によって解決された。定理 2 により U の構造を調べる事と Π_U の構造を調べる事が等価であることが分かる。従って、この定理は双曲的代数曲線 U と位相群 Π_U という全く異なる二つの対象の完全な橋渡しを与えていると言える。定理 2 自体はすでに証明されているが、我々は次の節でこの定理の拡張を考える。

2 m 次可解グロタンディーク予想とその現状

以下、k、U、$\overline{K(U)}$、$\overline{u}$、Π_U 及び $\overline{\Pi}_U$ を 1.2 節と同様に定義する。また、$\overline{\Pi}_U$ の交換子群 $\overline{[\overline{\Pi}_U : \overline{\Pi}_U]}$ を $\overline{\Pi}_U^{[1]}$ と書き、$\overline{\Pi}_U^{[m]}(m \geq 1)$ の交換子群 $\overline{[\overline{\Pi}_U^{[m]}, \overline{\Pi}_U^{[m]}]}$ を $\overline{\Pi}_U^{[m+1]}$ と書く。さらに $\overline{\Pi}_U^{m} := \overline{\Pi}_U/\overline{\Pi}_U^{[m]}$ 及び $\Pi_U^{(m)} := \Pi_U/\overline{\Pi}_U^{[m]}$ と記号を定める。

定理 2 では、我々は U の情報との対応先として、Π_U の全ての情報を使った。しかしながら、定理 2 が証明される以前から、定理 2 の Π_U をある種の商に置き換えても同様の結果が得られるのではないかという形の予想が考えられていた。その予想のうちの一つ、Π_U を $\Pi_U^{(m)}$ に置き換えたものが今回の主題である m 次可解グロタンディーク予想であり、正確には次のようになる。

記号 3. U を k 上の双曲的代数曲線と仮定し、U のスムースコンパクト化 U^{cpt} の種数を g_U と置く。さらに、カスプの成す (被約) スキーム $U^{\mathrm{cpt}} - U$ の k 上の次数を r_U と置く。l を体とし、V を l 上の双曲的代数曲線とする (2 節では V は k 上であったので、この記号は 2 節とは異なる)。$\overline{v} : \mathrm{Spec}(\overline{K(V)}) \to V$ を $\overline{u}$ と同様に取り、$\Pi_V := \pi_1(V,\overline{v})$、$\overline{\Pi}_V := \pi_1(V_{\overline{l}},\overline{v})$ を同様に定める。

予想 4 ((相対版)m 次可解グロタンディーク予想)**.** $m \geq 2$ を整数とする。k を $\mathbb{Q}$ 上有限生成な体と仮定し、$k = l$ とする。この時、次が成り立つ。

(i) $\Pi_U^{(m)}$ と $\Pi_V^{(m)}$ が G_k 上の位相群として同型の時、U と V は k 上のスキームとして同型である。
(ii) n を $m > n \geq 0$ を満たす整数とし、$\mathrm{Isom}_{G_k}^{(m)}(\Pi_U^{(m-n)}, \Pi_V^{(m-n)})$ を写像 $\mathrm{Isom}_{G_k}(\Pi_U^{(m)}, \Pi_V^{(m)}) \to$

$\mathrm{Isom}_{G_k}(\Pi_U^{(m-n)}, \Pi_V^{(m-n)})$ の像として定める。この時、次の自然な写像

$$\mathrm{Isom}_k(U,V) \to \mathrm{Isom}_{G_k}^{(m)}(\Pi_U^{(m-n)}, \Pi_V^{(m-n)})/\mathrm{Inn}(\overline{\Pi}_V^{m-n})$$

は全単射となる。

(k が有限体上有限生成な体である場合にも類似の予想が存在する。以下、これを正標数類似と呼ぶ。)

注意として、予想 4 は m 及び n が小さいほど強い結果となる。定理 2 では U の構造を調べる事と Π_U の構造を調べる事の等価性を見たが、予想 4 はより強く、U の構造を調べる事と (Π_U の商) $\Pi_U^{(m)}$ の構造を調べる事が等価であると主張している。予想 4 には、以下のような 3 つの先行研究が存在している。

- [中村、1990] $m \geq 2$、k がある種の代数体、かつ U、V が 4 点抜き射影直線の場合の (i)
- [望月、1999] $m \geq 5$ かつ $m > n \geq 3$ の場合の (ii)、特に $m \geq 5$ の場合の (i)
- [山口、2020] $m \geq 3$ かつ U、V が種数 0 の場合の (i)

本研究では、U がアフィンの場合に予想 4 の多くの部分を解決した。以下、本研究の主定理を述べる。

定理 5 (素体上有限生成の場合)**.** k を $\mathbb{Q}$ 上 (resp. 有限体 $\mathbb{F}_p$ 上) 有限生成な体とし、$k = l$ を仮定する。さらに、U をアフィン (resp. かつ $U_{\overline{k}}$ が $\overline{\mathbb{F}}_p$ 上の代数曲線に降下しない) と仮定する。この時、次が成り立つ。

(i) m に対し、$r_U < 3$ または $(g_U, r_U) = (0,3)$, $(0,4)$ の場合は $m \geq 5$ を、それ以外の場合は $m \geq 4$ を仮定する。この時、予想 4(i) (resp. 予想 4(i) の正標数類似) が成り立つ。
(ii) $m \geq 5$ かつ $m > n \geq 4$ を仮定する。この時、予想 4(ii) (resp. 予想 4(ii) の正標数類似) が成り立つ。

k の標数が 0 または $g_U = 0$ の場合、定理 5 は中村博昭氏、望月新一氏、及び筆者の上記の先行研究と部分的に重なっているが、標数が正かつ $g_U \geq 1$ の場合には予想 4 に対する完全に新しい結果を与えている。また、本研究では、k が有限体の場合の結果も得て、それを用いて定理 5 を証明した。有限体の場合は次のように予想 4 を絶対版として定式化することが必要となる。

定理 6 (有限体の場合)**.** k、l を有限体と仮定する。さらに、U をアフィンと仮定する。この時、次が成り立つ。

(i) m に対し、$r_U < 3$ または $(g_U, r_U) = (0,3)$, $(0,4)$ の場合は $m \geq 3$ を、それ以外の場合は $m \geq 2$ を仮定する。この時、$\Pi_U^{(m)}$ と $\Pi_V^{(m)}$ が位相群として同型の時、U と V はスキームとして同型である。
(ii) $m \geq 3$ を仮定し、n を $m > n \geq 2$ を満たす整数とする。$\mathrm{Isom}_{\text{top.group}}^{(m)}(\Pi_U^{(m-n)}, \Pi_V^{(m-n)})$ を写像 $\mathrm{Isom}_{\text{top.group}}(\Pi_U^{(m)}, \Pi_V^{(m)}) \to \mathrm{Isom}_{\text{top.group}}(\Pi_U^{(m-n)}, \Pi_V^{(m-n)})$ の像として定める。この時、次の自然な写像

$$\mathrm{Isom}_{\text{scheme}}(U,V) \to \mathrm{Isom}_{\text{top.group}}^{(m)}(\Pi_U^{(m-n)}, \Pi_V^{(m-n)})/\mathrm{Inn}(\Pi_V^{(m-n)})$$

は全単射となる。

k が有限体の場合には、予想 4 (の絶対版) が証明されているケースはなかったので、定理 6 は有限体上の予想に対する完全に新しい結果である。 また重要な点として、$r_U \geq 3$ かつ $(g_U, r_U) \neq (0,3)$, $(0,4)$ の場合は、(i) を $m=2$ の場合に証明できており、これは予想 4(i) (の絶対版) としては best possible な結果となる。

3 最後に

2 節で見たように m 次可解グロタンディーク予想についてさまざまな結果が得られているが、いまだ完全な解決を見てはいない。特に、k が有限体上有限生成な体の場合の予想 4（の正標数類似）は、U が固有な場合には手つかずである。今後の展望として、我々はまずこの場合の予想 4 を証明することが必要であると考えている。また、2 節で述べたように予想 4 は m が小さいほど強い結果となり、$m=2$ の場合が best possible な結果である。しかしながら、$\mathbb{Q}$ 上有限生成な体に関する $m=2$ での予想 4 については未だ中村博昭氏の結果 [中村、1990] が存在するのみである。予想 4 の証明において、$m \geq 3$ の場合と $m=2$ の場合では証明の様相が大きく変わるであろうと筆者は考えており、今後我々が予想 4 を完全な形で証明する事を目指す際、$m=2$ の場合が $m \geq 3$ の場合に比べて遥かに大きな課題となるだろうと考えている。

参考文献

[望月、1999] Shinichi Mochizuki. The local pro-p anabelian geometry of curves. *Invent. Math.*, 138(2): 319–423, 1999.

[中村、1990] Hiroaki Nakamura. Rigidity of the arithmetic fundamental group of a punctured projective line. *J. Reine Angew. Math.*, 405: 117–130, 1990.

[山口、2020] Naganori Yamaguchi. The m-step solvable Grothendieck conjecture for genus 0 curves over finitely generated fields. *Preprint, arXiv*: 2010.00290 [math.AG], 2020.