3 次元多様体の随伴表現のトーションについて

東京工業大学 理学院 数学系 数学コース
脇條奈生子 (Naoko WAKIJO)

概要

コンパクトな 3 次元多様体 M に対し、随伴ライデマイスタートーションというトポロジカルな不変量が定義される。M が境界付きの双曲多様体である場合に、適当な条件のもと、上記のトーションが “vanishing identity”を満たすという予想があり、これは数理物理と関連する様で近日研究が盛んである。本発表では、この予想を M が境界がない場合に考察し、8 の字結び目に沿ったあるデーン手術で得られるクラスに対して計算例を与え、予想の肯定的例を初めて与えた。

1 導入

（捩れ）ライデマイスタートーションとは、大まかには、多様体 M とその基本群の表現 $\varphi : \pi_1(M) \to \mathrm{GL}(n;\mathbb{F})$ から適切な線型写像と完全列を設定した後、その行列式の交代積の形で定められる多様体の表現付き不変量である（ここで、$\mathbb{F}$ は可換体である）。本不変量は K. Reidemeister (1935) によって 3 次元多様体に対して導入され、ホモトピー同値類では区別出来ないレンズ空間の同相類の分類を与えることに寄与した。加えて M が 3 次元の場合には、“アレクサンダー多項式”や“サイバーグ-ウィッテン不変量”など、他の不変量との関連性が知られている [6]。

ライデマイスタートーションは、定義は素朴なものの計算は一般には難しい。これは、3 次の境界準同型の記述がしばしば容易ではないことに起因する。しかし、例えば結び目に沿った $p/1$-と $1/q$-デーン手術については、[4] の結果を用いれば、これを記述することが出来る（定理 3.1）。ここで、p, q は整数である。

ライデマイスタートーションの先行研究では、可換表現や $\mathrm{SL}(2;\mathbb{C})$ 標準表現を扱う場合が多かったが、本稿では、$\mathrm{SL}(2;\mathbb{C})$ 随伴表現に付随するライデマイスタートーションについて扱う。計算例として、8 の字結び目に沿ったあるデーン手術に対してその値を与える（定理 3.3）。

G を半単純リー群、$\mathfrak{g}$ をそのリー環とする。表現 $\varphi : \pi_1(M) \to G$ と、G の $\mathfrak{g}$ 上への随伴作用によって定義されるライデマイスタートーションを**随伴ライデマイスタートーション**といい、$\tau_{\mathfrak{g}_\varphi}(M)$ と書く。M が境界付き双曲多様体の場合に、このトーションが *vanishing identity* を満たすという予想が知られている [1, 2, 3]。詳細は省略するが、これは概ね「M が適当な条件を満たすとき、$\mathrm{SL}(2;\mathbb{C})$-character variety のある部分集合 $\chi(M)$ が存在して、$\sum_{\varphi\in\chi(M)} \frac{1}{\tau_{\mathfrak{sl}(2;\mathbb{C})_\varphi}(M)} = 0 \in \mathbb{C}$ となる」という予想である。本稿では、M に境界がない場合に次の予想を立てた。

予想 1.1. M を向き付け可能で連結な閉 3 次元多様体とし、G を半単純リー群、$\mathfrak{g}$ をそのリー環とする。$\pi_1(M)$ の G-表現の既約表現全体を共役類で割った集合を $R^{\mathrm{irr}}_G(M)$ とする（すなわち、

$R^{\mathrm{irr}}_G(M) = \{\varphi : \pi_1(M) \to G \,|\, \varphi$ は既約表現 $\}/\mathrm{conj.}$ とする)。$R^{\mathrm{irr}}_G(M)$ が有限集合であるとき、次が成立する;

$$\sum_{\varphi \in R^{\mathrm{irr}}_G(M)} \frac{1}{\tau_{\mathfrak{g}_\varphi}(M)} \in \mathbb{Z}.$$

さらに、M が双曲構造を持つとき、上記の値は 0 である。

整数 p, q に対し、$S^3_{p/q}(K)$ を S^3 上の結び目 K に沿った p/q-デーン手術で得られる閉 3 次元多様体とする。予想 1.1 の肯定的例として、次の定理が与えられる。

定理 1.2. $G = \mathrm{SL}(2;\mathbb{C}), K = 4_1$ とする。任意の整数 p, q に対し、$M = S^3_{p/1}(K)$ と $M = S^3_{1/q}(K)$ について、予想 *1.1* は正しい。

2 定義

2.1 コチェイン複体に対する sign-refined Reidemeister torsion

以下、ベクトル空間の基底は全て順序付きであるとする。

$$C^* = (0 \to C^0 \xrightarrow{\delta^1} C^1 \xrightarrow{\delta^2} \cdots \xrightarrow{\delta^m} C^m \to 0)$$

を体 $\mathbb{F}$ 上の有限次元ベクトル空間のコチェイン複体とする。さらに、$\mathbf{c}^i$ を C^i の基底とし、$\mathbf{h}^i$ を i 次コホモロジー群 $H^i = H^i(C^*)$ の基底とする。C^* の基底 $\mathbf{c}^* = (\mathbf{c}^0, \ldots, \mathbf{c}^m)$ と H^* の基底 $\mathbf{h}^* = (\mathbf{h}^0, \ldots, \mathbf{h}^m)$ が与えられたとき、*sign-refined Reidemeister torsion* が次のように定義される。

$\widetilde{\mathbf{h}}^i$ を $\mathbf{h}^i$ の C^i への持ち上げとする。$\mathbf{b}^i$ を C^i のベクトルの列で、 $\delta^{i+1}(\mathbf{b}^i)$ が $B^{i+1} = \mathrm{Im}\,\delta^{i+1}$ の基底であるものとする。このとき、ベクトルの列の (順序付き) 和集合の列 $(\delta^i(\mathbf{b}^{i-1})\widetilde{\mathbf{h}}^i\mathbf{b}^i)$ は C^i の基底を与える。基底 $\mathbf{c}^i$ から $(\delta^i(\mathbf{b}^{i-1})\widetilde{\mathbf{h}}^i\mathbf{b}^i)$ への変換行列の行列式を $[\delta^i(\mathbf{b}^{i-1})\widetilde{\mathbf{h}}^i\mathbf{b}^i/\mathbf{c}^i] \in \mathbb{F}^\times = \mathbb{F}\backslash\{0\}$ と書く。$\alpha_i(C^*) = \sum_{i=0}^m \dim C^i$ と $\beta_i(C^*) = \sum_{i=0}^m \dim H^i$ に対し、$|C^*| = \sum_{i=0}^m \alpha_i(C^*)\beta(C^*)$ と定める。すると、次の交代積を定義することができ、これを *sign-refined Reidemeister torsion* と呼ぶ。

$$\mathrm{Tor}(C^*, \mathbf{c}^*, \mathbf{h}^*) = (-1)^{|C^*|} \prod_{i=0}^m [\delta^i(\mathbf{b}^{i-1})\widetilde{\mathbf{h}}^i\mathbf{b}^i/\mathbf{c}^i] \in \mathbb{F}^\times.$$

上のトーション $\mathrm{Tor}(C^*, \mathbf{c}^*, \mathbf{h}^*)$ は、$\widetilde{\mathbf{h}}^i$ と $\mathbf{b}^i$ の選び方に依らず、C^*, $\mathbf{c}^*$ と $\mathbf{h}^*$ のみに依って決まることが知られている。簡単のため、 C^* が**非輪状**、すなわち、$H^*(C^*) = 0$ であるとき、$\mathrm{Tor}(C^*, \mathbf{c}^*, \mathbf{h}^*)$ を $\mathrm{Tor}(C^*, \mathbf{c}^*)$ と表記する。

2.2 3 次元閉多様体の随伴ライデマイスタートーション

M を向き付け可能で連結な閉 3 次元多様体とし、G を半単純リー群、$\mathfrak{g}$ をそのリー代数とする。$\varphi : \pi_1(M) \to G$ を表現、つまり群準同型写像とする。$\mathfrak{g}$ が半単純であることから、キリング形式 B は非退化である（ここで、B は $x, y \in \mathfrak{g}$ に対して $B(x, y) = \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}(x), \mathrm{ad}(y))$ で定められる双線形形式である)。したがって、B に関する $\mathfrak{g}$ の直交基底 $B = (e_1, e_2, \ldots, e_d)$ を取ることが出来る。

まず、M の有限胞体分割を与え、M の普遍被覆空間 $\widetilde{M}$ を考える。$\widetilde{M}$ に M の胞体分割から誘導される胞体構造を与えると、CW 複体のチェイン複体 $(C_*(\widetilde{M};\mathbb{Z}),\partial_*)$ を考えることができる。ここで、$\widetilde{M}$ の被覆変換を $\pi_1(M)$ から $\widetilde{M}$ への左作用とみなすと、この作用は $\mathbb{Z}[\pi_1(M)]$ から $C_*(\widetilde{M};\mathbb{Z})$ への左作用に自然に拡張される。この作用により、$C_*(\widetilde{M};\mathbb{Z})$ を左 $\mathbb{Z}[\pi_1(M)]$ 加群とみなし、これを $C_*^{\varphi}(\widetilde{M};\mathbb{Z})$ と書く。さらに、随伴作用 $\mathrm{ad}_\varphi:\pi_1(M)\to\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ の自然な拡張によって $\mathfrak{g}$ を左 $\mathbb{Z}[\pi_1(M)]$ 加群とみなし、これを $\mathfrak{g}_\varphi$ と書く。次のコチェイン複体が定義される;

$$(C_\varphi^*(\widetilde{M};\mathfrak{g}),\delta^*):=(\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[\pi_1[M]]}(C_*^{\varphi}(\widetilde{M};\mathbb{Z}),\mathfrak{g}_\varphi),\delta^*).$$

ここで、δ^i は $\delta^i(f)=f\circ\partial_i$ によって定められる準同型である。

次に、$\mathbf{c}_i=(c_{i,1},c_{i,2},\ldots,c_{i,\dim_{\mathbb{Z}}C_i(M;\mathbb{Z})})$ を M の i-胞体全体から定められる $C_i(M;\mathbb{Z})$ の基底とする。M の各 i-胞体に対して $\widetilde{M}$ への持ち上げを固定すると、$\mathbb{Z}[\pi_1(M)]$ 上の自由加群 $C_i^{\varphi}(\widetilde{M};\mathbb{Z})$ の基底 $\widetilde{\mathbf{c}}_i=(\widetilde{c}_{i,1},\widetilde{c}_{i,2},\ldots,\widetilde{c}_{i,\dim_{\mathbb{Z}}C_i(M;\mathbb{Z})})$ が与えられる。任意の $i\in\{1,2,3\}$ と $j,\ell\in\{1,2,\ldots,\dim_{\mathbb{Z}}C_i(M;\mathbb{Z})\}$、$k\in\{1,2,\ldots,k\}$ に対し、$c_{i,j}^k(\widetilde{c}_{i,\ell})=\delta_{j,\ell}e_k$ となるような $\mathbb{Z}[\pi_1(M)]$-準同型を $c_{i,j}^k\in C_\varphi^i(\widetilde{M};\mathfrak{g})$ と書く。ここで、$\delta_{j,\ell}$ はクロネッカーのデルタである。このとき、列

$$\mathbf{c}^i=(c_{i,1}^1,c_{i,1}^2,\ldots,c_{i,1}^k,c_{i,2}^1,c_{i,2}^2,\ldots,c_{i,2}^k,\ldots,c_{i,\dim_{\mathbb{Z}}C_i(M;\mathbb{Z})}^1,c_{i,\dim_{\mathbb{Z}}C_i(M;\mathbb{Z})}^2,\ldots,c_{i,\dim_{\mathbb{Z}}C_i(M;\mathbb{Z})}^k)$$

は $C_\varphi^i(\widetilde{M};\mathfrak{g})$ の基底を与える。

さらに、CW 複体 M の実数係数のコチェイン複体 $C^*(M;\mathbb{R})$ を考える。上記の $\mathbf{c}_i$ に対応して、$C^i(M;\mathbb{R})$ の基底 $\mathbf{c}_{\mathbb{R}}^i=(c_1^i,\ldots,c_{\dim_{\mathbb{Z}}C_i(M;\mathbb{Z})}^i)$ を取ることが出来る。ここで、$c_j^i:C_i(M;\mathbb{Z})\to\mathbb{R}$ は、$c_j^i(c_{i,k})=\delta_{j,k}$ で定義される準同型である。ポアンカレ双対性により、$H^*(M;\mathbb{R})=\bigoplus_{i\geq 0}H^i(M;\mathbb{R})$ の *homology orientation* を標準的に固定することが可能である。この向きに一致するように、$H^*(M;\mathbb{R})$ の基底 $\mathbf{h}_{\mathbb{R}}^*=(\mathbf{h}_{\mathbb{R}}^0,\mathbf{h}_{\mathbb{R}}^1,\mathbf{h}_{\mathbb{R}}^2,\mathbf{h}_{\mathbb{R}}^3)$ を取る。$C^*(M;\mathbb{R})$ の $\mathbf{c}_{\mathbb{R}}^*$ と $\mathbf{h}_{\mathbb{R}}^*$ に付随する sign-refined Reidemeister torsion は、$\mathbb{R}^\times$ の元である。したがって、符号を取ることができ、これを

$$\tau_0:=\mathrm{sgn}(\mathrm{Tor}(C^*(M;\mathbb{R}),\mathbf{c}_{\mathbb{R}}^*,\mathbf{h}_{\mathbb{R}}^*))\in\{\pm 1\}$$

とおく。

以上を用いて、 φ に付随する M の**随伴ライデマイスタートーション** $\tau_{\mathfrak{g}_\varphi}(M)$ が次のように定義される。$C_\varphi^*(\widetilde{M};\mathfrak{g})$ が非輪状であるとき、

$$\tau_{\mathfrak{g}_\varphi}(M):=\tau_0\cdot\mathrm{Tor}(C_\varphi^*(\widetilde{M};\mathfrak{g}),\mathbf{c}^*)\in\mathbb{F}^\times$$

とし、$C_\varphi^*(\widetilde{M};\mathfrak{g})$ が非輪状でないとき、$\tau_{\mathfrak{g}_\varphi}(M):=0$ とする。

$\tau_{\mathfrak{g}_\varphi}(M)$ は、$\mathfrak{g}$ の直交基底 B、M の有限胞体分割、$\widetilde{\mathbf{c}}_i,\mathbf{h}_{\mathbb{R}}^i$ の選び方に依らず、M と φ の共役類にのみ依存することが知られている。

3　定理 1.2 の証明

本章では、定理 1.2 の多様体、すなわち、8 の字結び目に沿ったデーン手術で得られる多様体 $M=S_{p/1}^3(4_1)$ と $M=S_{1/q}^3(4_1)$ について考える。また、$G=\mathrm{SL}(2;\mathbb{C}),\mathfrak{g}=\mathfrak{sl}(2;\mathbb{C})$ とする。

3.1 準備

[4] より、次のような基本群の表示を与えることが出来る;

$$\pi_1(S^3_{p/1}(4_1)) = \langle x_1, x_2, \mathfrak{m} \mid \mathfrak{m}x_1x_2\mathfrak{m}^{-1}x_1^{-1}, \mathfrak{m}x_2x_1x_2\mathfrak{m}^{-1}x_2^{-1}, [x_1, x_2]\mathfrak{m}^p \rangle$$

$$\pi_1(S^3_{1/q}(4_1)) = \langle x_1, x_2, \mathfrak{m}, \mathfrak{m}' \mid \mathfrak{m}x_1x_2\mathfrak{m}^{-1}x_1^{-1}, \mathfrak{m}x_2x_1x_2\mathfrak{m}^{-1}x_2^{-1}, \mathfrak{m}[x_1, x_2]^q, \mathfrak{m}'[x_1, x_2]^{-1} \rangle$$

ここで、$[x, y] := xyx^{-1}y^{-1}$ である。この基本群の表示の語の個数を g とおく。また、生成子を左から順に $x_1, \ldots, x_g$ とし、関係子を同様に $r_1, \ldots, r_g$ とする。上の基本群の表示に対応して、自然な同型

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[\pi_1[M]]}(C_0^{\varphi}(\widetilde{M}; \mathbb{Z}), \mathfrak{g}_{\varphi}) \cong \mathfrak{g},$$

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[\pi_1[M]]}(C_1^{\varphi}(\widetilde{M}; \mathbb{Z}), \mathfrak{g}_{\varphi}) \cong \mathfrak{g}^g,$$

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[\pi_1[M]]}(C_2^{\varphi}(\widetilde{M}; \mathbb{Z}), \mathfrak{g}_{\varphi}) \cong \mathfrak{g}^g,$$

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[\pi_1[M]]}(C_3^{\varphi}(\widetilde{M}; \mathbb{Z}), \mathfrak{g}_{\varphi}) \cong \mathfrak{g}$$

を与えることが出来る。この同型による同一視により、

$$(C^*_{\varphi}(\widetilde{M}; \mathfrak{g}), \delta^*) = (0 \to \mathfrak{g} \xrightarrow{\delta^1} \mathfrak{g}^g \xrightarrow{\delta^2} \mathfrak{g}^g \xrightarrow{\delta^3} \mathfrak{g} \to 0)$$

を考える。[4, §3.1] から、δ^* は次のように基本群の語で記述される。

定理 3.1 ([4, Corollary 3.2])**.** $M = S^3_{p/1}(4_1)$ のとき、

$$W = \rho_1 \cdot x_1\rho_2x_1^{-1} \cdot (x_1x_2x_1^{-1})\rho_1^{-1}(x_1x_2x_1^{-1})^{-1} \cdot ([x_1, x_2])\rho_2^{-1}([x_1, x_2])^{-1} \cdot \rho_3 \cdot \mathfrak{m}\rho_3^{-1}\mathfrak{m}^{-1}$$

とし、$M = S^3_{1/q}(4_1)$ のとき、

$$W = \rho_1 \cdot x_1\rho_2x_1^{-1} \cdot (x_1x_2x_1^{-1})\rho_1^{-1}(x_1x_2x_1^{-1})^{-1} \cdot ([x_1, x_2])\rho_2^{-1}([x_1, x_2])^{-1} \cdot \rho_4^{-1} \cdot \mathfrak{m}'\rho_3\mathfrak{m}'^{-1} \cdot \rho_4 \cdot \rho_3^{-1}$$

とする。このとき、次が成立する*;*

$$\delta^1 = \left(1 - x_j\right)_{j=1,\ldots,g}, \ \ \delta^2 = \left(\frac{\partial r_j}{\partial x_i}\right)_{i,j=1,\ldots,g}, \ \ \delta^3 = \left(\frac{\partial W}{\partial \rho_i}\right)_{i=1,\ldots,g}.$$

ここで、$\frac{\partial *}{\partial *}$ は **Fox 微分**である（定義は *[6, §16.2]* など参照)。

さらに、$\pi_1(M)$ から $G = \mathrm{SL}(2; \mathbb{C})$ への既約表現の共役類全体の集合 $R_G(M)^{\mathrm{irr}}$ について、次の命題 3.2 が成り立つ。

$$D := \{a \in \mathbb{C} \mid |a| < 1\} \cup \{a \in \mathbb{C} \ \mid \ |a| = 1, \mathrm{Im}(a) > 0\}$$

とする。上記で $\mathrm{Im}(a)$ は a の虚部を表す。

命題 3.2. 任意の $p \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, q \in \mathbb{Z}$ に対し、$r = p/1$ または $r = 1/q$ とすると、次の写像は全単射である;

$$\Phi_r : R_G^{\mathrm{irr}}(S_r^3(4_1)) \to A_r, \quad [\varphi] \mapsto (D \text{ の元であるような} \varphi(\mathfrak{m}) \text{ の固有値}).$$

ここで、

$$A_r := \{a \in D \mid Q_r(a) = 0\},$$

$$Q_r(a) := \begin{cases} 1 - a^{p-4} + a^{p-2} + 2a^p + a^{p+2} - a^{p+4} + a^{2p} & (r = p/1 \text{ のとき}) \\ 1 - a^{2q} - a^{4q-1} - 2a^{4q} - a^{4q+1} - a^{6q} + a^{8q} & (r = 1/q \text{ のとき}) \end{cases}$$

である。$p = 0$ のときは、$A_{0/1} := \{\pm\sqrt{-1}, \pm\frac{1}{2}(1 - \sqrt{5})\}$ に対し、全単射

$$\Phi_{0/1} : R_G^{\mathrm{irr}}(S_{0/1}^3(4_1)) \to A_{0/1}$$

を定めることが出来る。

Proof. $p \neq 0, r = p/1$ とする。$\varphi : \pi_1(S_r^3(4_1)) \to \mathrm{SL}(2; \mathbb{C})$ を既約表現とする。$\varphi(\mathfrak{m})$ の固有値の一つが A_r の元となることを示す。φ の共役類で、ある $a \in D$ に対して $\varphi'(\mathfrak{m}) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}$、または、ある $a' \in \mathbb{C}^\times$ に対して $\varphi'(\mathfrak{m}) = \begin{pmatrix} 1 & a' \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ となるような代表元 φ' が存在する。$\varphi'(x_1) = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ として $\varphi'(r_i)$ を計算すると、各 $\varphi'(r_i)$ が単位行列であることから、$\varphi'(\mathfrak{m})$ は前者の形を取り、$y \neq 0$ で、x, z, w は a と y により一意に決定され、a が $Q_r(a) = 0$ を満たすことがわかる。

さらに、この議論を逆に辿れば、逆写像 Φ_r^{-1} を構成することが出来る。$p = 0$ と $r = 1/q$ のときも、同様の方針で計算することにより示される。 □

命題 3.2 の写像 Φ_r を用い、随伴ライデマイスタートーションが次で与えられる。

定理 3.3. 既約表現 $\varphi : \pi_1(M) \to \mathrm{SL}(2; \mathbb{C})$ に付随する随伴ライデマイスタートーションは、$\Phi_r([\varphi]) = a$ とすると、

- $M = S_{p/1}^3(4_1), p \neq 0$ のとき、

$$\tau_{\mathfrak{g}_\varphi}(S_{p/1}^3(4_1)) = -\frac{4 - p + (-2 + p)a^2 + 2pa^4 + (2 + p)a^6 - (4 + p)a^8 + 2pa^{4+p}}{2(a^2 - 1)^3(1 + a^2)},$$

- $M = S_{1/q}^3(4_1)$ のとき、

$$\tau_{\mathfrak{g}_\varphi}(S_{1/q}^3(4_1)) = -\frac{a^{6q}(-1 + 4q + (1 - 2q)a^{2q} + 2(1 + a)a^{4q} + (1 + 2q)a^{6q} - (1 + 4q)a^{8q})}{2(a^{4q} - 1)^3(1 - 2a^{2q} - a^{4q} - 2a^{6q} + a^{8q})}$$

である。

Proof. 命題 3.2 の逆写像 Φ_r^{-1} と定理 3.1 を用いれば、$\mathfrak{g} \cong \mathbb{C}^3$ の同一視の下、

$$(C_\varphi^*(\widetilde{M}; \mathfrak{g}), \delta^*) = (0 \to \mathbb{C}^3 \xrightarrow{\delta^1} \mathbb{C}^{3g} \xrightarrow{\delta^2} \mathbb{C}^{3g} \xrightarrow{\delta^3} \mathbb{C}^3 \to 0)$$

の各 δ^i の $\mathbb{C}$ 係数表現行列が a を用いて記述できる。[6, §2.1] の τ-chain の手法により、Mathematica を用いて計算すると、定理の値が導出される。 □

注意 3.4. • $M=S^3_{p/1}(4_1)$ のとき、[5] によって、$\tau_{\mathfrak{g}_\varphi}(M)$ は ± 1 倍の差を除いて計算されていた。上定理の利点は、後に $\frac{1}{\tau_{\mathfrak{g}_\varphi}(M)}$ を足し上げる際、符号の補正を行える点にある。

- 上記のトーションの値は a と a^{-1} で一致することが計算により確かめられる。
- $p=0$ のときは、$a=\sqrt{-1},-\sqrt{-1},\frac{1}{2}(1-\sqrt{5}),-\frac{1}{2}(1-\sqrt{5})$ に対し、随伴ライデマイスタートーションはそれぞれ $\frac{5}{4},\frac{5}{4},5,5$ である。

3.2 証明の概略

$M=S^3_{p/1}(4_1)$ の場合に、定理 1.2 の証明を行う。$M=S^3_{p/1}(4_1)$ に双曲構造が入るための必要十分条件は $|p|\geq 5$ であることが知られている。以下、予想 1.1 の随伴ライデマイスタートーションの逆数の和を $\sum_\varphi \frac{1}{\tau_\varphi}$ と略記する。

まず、$p\geq 5$ の場合に $\sum_\varphi \frac{1}{\tau_\varphi}=0$ となることを示す。定理 3.3 の前者の随伴ライデマイスタートーションの値を a に関する有理多項式とみなし、これを $T(a)$ とおく。さらに、

$$f(a):=4Q(a)=4(1-a^{p-4}+a^{p-2}+2a^p+a^{p+2}-a^{p+4}+a^{2p}),$$

$$g(a):=\frac{f'(a)}{T(a)}=-8(a^2-1)^3(a^2+1)a^{p-5},$$

$$F(a):=\frac{g(a)}{f(a)}$$

とすると、$p\geq 5$ より、f,g は $\mathbb{Z}$ 係数多項式で、$f(0)\neq 0$ である。従って、$\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ 上の複素関数の留数定理より、

$$0=\sum_{a\ \text{は}\ F\ \text{の極}}\mathrm{Res}[F,a]=\sum_{f(a)=0,\,a\neq 0,\pm 1}\frac{g(a)}{f'(a)}=2\sum_{a\in A_{p/1}}\frac{1}{T(a)}=2\sum_\varphi\frac{1}{\tau_\varphi}$$

となる。ここで、$\mathrm{Res}[F,a]$ は F の極 a における留数である。これより、$p\geq 5$ の場合に定理 1.2 が従う。$p\leq -5$ の場合も同様に示される。

$|p|\leq 4$ の場合は、命題 3.2 と定理 3.3 から Mathematica を用いて直接計算することにより、次を得る;

$$p=0,\pm1,\pm2,\pm3\ \text{のとき、}\sum_\varphi\frac{1}{\tau_\varphi}=2,$$

$$p=\pm4\ \text{のとき、}\sum_\varphi\frac{1}{\tau_\varphi}=8.$$

以上より、任意の整数 p に対し、定理 1.2 が示された。

$M=S^3_{1/q}(4_1)$ の場合も同様の方針で証明することが出来る。 □

参考文献

[1] Benini, F., Gang, D., Pando Zayas, L.A.: Rotating black hole entropy from M5-branes. J. High Energy Phys. (3), 057, 39 (2020)

[2] Gang, D., Kim, N., Pando Zayas, L.A.: Precision microstate counting for the entropy of wrapped M5-branes. J. High Energy Phys. (3), 164, 42, (2020)

[3] Gang, D., Kim, S., Yoon, S.: Adjoint Reidemeister torsions from wrapped M5-branes. Adv. Theor. Math. Phys. **25**(7), 1819–1845 (2021)

[4] Nosaka, T.: Cellular chain complexes of universal covers of some 3-manifolds. J. Math. Sci. Univ. Tokyo. **29**(1), 89–113 (2022)

[5] Ohtsuki, T.: On the asymptotic expansion of the quantum SU(2) invariant at $q = \exp(4\pi\sqrt{-1}/N)$ for closed hyperbolic 3-manifolds obtained by integral surgery along the figure-eight knot. Algebr. Geom. Topol. **18**(7), 4187–4274 (2018).

[6] Turaev, V.: Introduction to combinatorial torsions. Lectures in Mathematics ETH Zürich, Birkhäuser Verlag, Basel, Basel (2001)