Yetter-Drinfeld データを用いた低次元ホップ・スーパー代数の分類について

岡山理科大学大学院 理学研究科 応用数学専攻
若尾亮太 (Ryota WAKAO)

概要

有限群のように有限次元ホップ代数の分類は盛んに行われている．一方で，有限次元ホップ・スーパー代数の分類は始まって間もない．本講演では，Yetter-Drinfeld データと呼ばれる，ボゾン化のある意味での逆操作を与える対象を考えることにより，ホップ・スーパー代数の研究が可能であることを説明する．特に，10 次元以下のホップ・スーパー代数の完全な分類を与える．

1 ホップ代数

以下で，標数 0 の代数閉体である基礎体 $\Bbbk$ を固定し，$\Bbbk$ 上のテンソル $\otimes_{\Bbbk}$ は $\otimes$ とかく．

1.1 ホップ代数

群 G に対して群環 $\Bbbk G$ は代数だけでなく，ホップ代数の構造をもつ．ここでホップ代数とは次のように与えられる代数系を指す：

定義 1.1. ベクトル空間 H が**ホップ代数**であるとは，代数射たち $m : H \otimes H \to H$ と $u : H \to \Bbbk$ と**余積** $\Delta : H \otimes H \to H$ と**余単位** $\varepsilon : H \to \Bbbk$ が存在して

(1) $m \circ (\mathrm{id}_H \otimes m) = m \circ (m \otimes \mathrm{id}_H)$
(2) $m \circ (\mathrm{id}_H \otimes u) = m \circ (u \otimes \mathrm{id}_H)$
(3) $(\mathrm{id}_H \otimes \Delta) \circ \Delta = (\Delta \otimes \mathrm{id}_H) \circ \Delta$
(4) $(\mathrm{id}_H \otimes \varepsilon) \circ \Delta = (\varepsilon \otimes \mathrm{id}_H) \circ \Delta$

の 4 条件を満たし，さらに

$$m \circ (S \otimes \mathrm{id}_H) \circ \Delta = u \circ \varepsilon = m \circ (\mathrm{id}_H \otimes S) \circ \Delta$$

を満たすような**対合射**と呼ばれる線型写像 $S : H \to H$ が存在するときをいう．さらに，線形写像 $\mathrm{flip} : H \otimes H \to H \otimes H; a \otimes b \mapsto b \otimes a$ とおく．このとき，ホップ代数 H が**余可換**であるとは $\Delta = \mathrm{flip} \circ \Delta$ が成り立つときをいう．

ホップ代数 H に対して $g.\ell(H) := \{g \in H \mid 0 \neq g, \Delta(g) = g \otimes g\}$ と定義して，この集合の元を **group like 元**という．

命題 1.2. $g.\ell(H)$ は H の積に関して群をなす．

群環 $\Bbbk G$ の場合は $g \in G$ に対して $\Delta(g) = g \otimes g$, $\varepsilon(g) = 1$, $S(g) = g^{-1}$ とすることでホップ代数をなす．すぐにしたがうように群環 $\Bbbk G$ に対して，その group like 元全体は $g.\ell(\Bbbk G) = G$ となることがわかる．このことからホップ代数は群環を一般化した対象と思える．

例 1.3. 有限次元ホップ代数 H に対して双対空間 $H^* := \hom(H, \Bbbk)$ に積を $f * g := m \circ (f \otimes g) \circ \Delta$ とすることで代数をなし，代数射 $\Delta^* : H^* \to H^* \otimes H^*$, $u^* : H^* \to \Bbbk$ を

$$\Delta^*(f) := \sum f_1 \otimes f_2 \quad \text{with 「任意の } a, b \in H \text{ に対して } f(ab) = \sum f_1(a) f_2(b)\text{」}$$

$u : H^* \to \Bbbk; f \mapsto f(1_H)$，対合射 $S^* : H^* \to H^*$ は $a \in H$ に対して $S^*(f)(a) = S(f(a))$ と定義することでホップ代数をなす．

双対 H^* の余積は複雑であるが，group like 元 $g.\ell(H^*)$ は次のように比較的簡単に表すことが出来る．

命題 1.4. 有限次元ホップ代数 H に対して $g.\ell(A^*) = \mathsf{Alg}(A, \Bbbk) := \{f \in A^* \mid f \text{ は環準同型}\}$ が成立．

群環は余可換なホップ代数をなしたが，次は非余可換なホップ代数をなす．

例 1.5. 自然数 $2 \leq n$ と $\Bbbk$ 上の 1 の原始 n 乗根 ζ_n をとり固定する．$\langle c, x \rangle$ は 2 元 c, x で生成されるような自由代数を表す．このとき

$$T_{n,\zeta_n} := \langle c, x \rangle / (c^n - 1, x^n, cx - \zeta_n xc)$$

上に Δ, ε, S を

$$\Delta(c) = c \otimes c,\ \Delta(x) = x \otimes 1 + c \otimes x, \quad \varepsilon(c) = 1, \varepsilon(x) = 0, \quad S(c) = c^{-1}, S(x) = -c^{-1}x.$$

と定義することで n^2 次元の余可換でないホップ代数をなす．これは **Taft 代数**と呼ばれる．

1.2　Yetter Drinfeld 加群

定義 1.6. H をホップ代数とする．ベクトル空間 V が**左 H-余加群**であるとは，次の 2 条件：

(1) $(\mathrm{id}_H \otimes \rho) \circ \rho = (\Delta \otimes \mathrm{id}_V) \circ \rho$
(2) $(\varepsilon \otimes \mathrm{id}_V) \circ \rho = \varphi$ with $\varphi : V \to \Bbbk \otimes V; v \mapsto 1 \otimes v$: 線型同型射.

が成り立つような線形写像 $\rho : V \to H \otimes V$ が存在するときをいう．この ρ を**余作用**という．左 H-余加群全体と上の条件を保つ射を考えることで，これは圏をなし ${}^H\mathcal{M}$ とかく．

ホップ代数として群環 $\Bbbk G$ が考えられたのだった．この余加群圏に関して，次が知られている．

事実 1.7. 群 G に対して ${}^{\Bbbk G}\mathcal{M}$ の対象全体は G で次数付けられるようなベクトル空間全体と一致する．

このもとで，“Yetter-Drinfeld 加群” という対象は，加群構造と今の余加群構造を両立させるようなものとして定義される．

定義 1.8. ホップ代数 H を固定する．このとき，ベクトル空間 V が **Yetter-Drinfeld 加群**であるとは，作用 $H \otimes V \to V; h \otimes v \mapsto h.v$ と余作用 $\delta : V \to H \otimes V; v \mapsto v_{-1} \otimes v_0$ が存在して，次の両立条件を満たす：

$$\delta(h.v) = h_1 v_{-1} S(h_3) \otimes h_2.v_0 \text{ for } h \in H,\ v \in V.$$

この条件を満たすベクトル空間全体と，両立条件を保つ線型写像を考えることで，これは圏をなす．以下では ${}^H_H\mathcal{YD}$ とかく．

1.3 ボゾン化（bosonization）

${}^H_H\mathcal{YD}$ を考える利点のひとつには，群論における半直積の一般化である “ボゾン化” を考えることができることにある．これは Radford-Majid[R85, Mj94] によってよく研究なされており，Andruskiewitsch-Schneider[AS02] は以下に述べる事実を体系的にまとめている．

事実 1.9. ホップ代数たち A, H を固定する．ホップ代数射たち $\pi : A \to H$ と $\pi \circ \iota = \mathrm{id}_H$ を満たすような $\iota : A \to H$ が与えられたとき，

$$B := A^{\mathrm{co}(\pi)} := \{a \in A \mid (\mathrm{id}_A \otimes \pi)(\Delta_A(a)) = a \otimes 1_H\}$$

は次の構造で ${}^H_H\mathcal{YD}$ のホップ代数対象となる．

(1) $\Delta_H(h) = h_1 \otimes h_2$ と表示するとき，作用は $h \otimes a \mapsto \iota(h_1) a \iota(S(h_2))$.
(2) 余作用は $a \mapsto (\pi \otimes \mathrm{id}_A)(\Delta_A(a))$.
(3) B は A の部分代数をなす．
(4) $\Delta_A(a) = a_1 \otimes a_2$ と表示するとき，余積 Δ_B は $\Delta_B : B \to B \otimes B; a \mapsto a_1(\iota \circ \pi)(S(a_2)) \otimes a_3$.

他方で，次の操作が考えられる．

定義 1.10. ホップ代数 H と ${}^H_H\mathcal{YD}$ のホップ代数対象 B に対してテンソル積 $B\#H := B \otimes H$ 上に

$$\begin{aligned}(b\#h)(b'\#h') &:= b(h_1.b')\#h_2h' \\ \Delta(b\#h) &:= b^{(1)}\#(b^{(2)})_{-1}h_1 \otimes (b^{(2)})_0\#h_2\end{aligned}$$

と，積と余積を定めることが出来る．

この操作は**ボゾン化**と呼ばれる．ボゾン化に関して，以下の事実が成り立つ：

事実 1.11. この $B\#H$ はホップ代数をなす．さらに B, H が有限次元ならば双対 $(B\#H)^*$ は $B^*\#H^*$ とホップ代数同型になる．

事実 1.12. ホップ代数 H に対して以下には 1 対 1 対応がある．

- ${}^H_H\mathcal{YD}$ 圏のホップ代数対象．
- $H \subset A$ かつ $\pi|_H = \mathrm{id}_H$ を満たすようなホップ代数 A とホップ代数射 $\pi : A \to H$ の組 (A, π).

条件に出てきた π を **split epi** とよぶ．

さて，ホップ代数 H を固定する．ホップ代数全体を対象として，ホップ代数構造を保つ射をもつ圏を Hopf とかく．このとき，上記のことから

$$\mathcal{F}_H : \{{}^H_H\mathcal{YD}\text{のホップ代数対象}\} \longrightarrow \mathsf{Hopf};\ K \longmapsto K\#H.$$

という関手 $\mathcal{F}_H : \{{}^H_H\mathcal{YD}$のホップ代数対象 $\} \to$ Hopf を得たことになる．この $\mathcal{F}_H$ に関して，Hopf を事実 1.9 を満たすものたちに制限することで，これは圏同値となる．つまり ${}^H_H\mathcal{YD}$ のホップ代数対象 B に対して $(B\#H)^{\mathrm{co}(\pi)} \cong B$ が成立する．

2　ホップ・スーパー代数

2.1　ホップ・スーパー代数

スーパーとは, $\mathbb{Z}_2 = \{0,1\}$ で次数付けられた対象の理論である．通常のベクトル空間の代わりに $\mathbb{Z}_2$-graded ベクトル空間 $V = V_0 \oplus V_1$ を考え，この V を**スーパーベクトル空間**という．各部分空間には名前がついていて V_0 は **even part** と V_1 は **odd part** と呼ばれ，元 $v \in V_0 \cup V_1$ に関して（**斉次元**という）$v \in V_0$ のときは $|v| := 0$, $v \in V_1$ のときは $|v| := 1$ と定め，これを v の **parity** と呼ぶ．スーパーベクトル空間たち全体と $\mathbb{Z}_2$-grading を保つ線型写像を考えることで，圏をなしこれを sVec とかく．またスーパーベクトル空間たち V, W に対して

$$V \otimes W := ((V_0 \otimes W_0) \oplus (V_1 \otimes W_1)) \oplus ((V_1 \otimes W_0) \oplus (V_0 \otimes W_1))$$

と $V \otimes W$ をスーパーベクトル空間とみることで，テンソル圏をなす．さらに次の**スーパー対称性**により対称テンソル圏をなす．

$$V \otimes W \to W \otimes V\,;\, v \otimes w \mapsto (-1)^{|v||w|} w \otimes v.$$

ここで v, w は斉次元としてとっている．

定義 2.1. スーパーベクトル空間 $V = V_0 \oplus V_1$ が **purely even** であるとは $V_1 = 0$ のときをいう．

ホップ・スーパー代数は圏 sVec を用いて次のように定義される．

定義 2.2. $\mathcal{H}$ が**ホップ・スーパー代数**であるとは $\mathcal{H}$ が sVec のホップ代数対象となるときをいう．

命題 2.3. ホップ・スーパー代数 $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1$ の余積 Δ は $\Delta(a) = \sum a_{(1)} \otimes a_{(2)}$ とかくとき $\Delta(ab) = \sum (-1)^{|a_{(2)}||b_{(1)}|} a_{(1)} b_{(1)} \otimes a_{(2)} b_{(2)}$ を満たす．

2.2　ホップ・スーパー代数の例

ホップスーパー代数の例として，例えば次があげられる：

例 2.4. purely even であるような任意のホップ代数 H は自然にホップ・スーパー代数構造をもつ．

例 2.5. 自然数 n に対して**外積代数** $\bigwedge(\Bbbk^n) := \Bbbk\langle x_1, x_2, \ldots, x_n\rangle / (x_i x_j + x_j x_i,\, i, j \in \{1, \ldots, n\})$ は次の構造で n^2 次元のホップスーパー代数をなす．

$$\Delta(x_i) = x_i \otimes 1 + 1 \otimes x_i, \quad \varepsilon(x_i) = 0, \quad S(x_i) = -x_i.$$

2.3　スーパーベクトル空間と Yetter-Drinfeld 加群

この節では，ホップ・スーパー代数に対しても §1.3 で紹介したボゾン化が可能であることを確かめる．

命題 2.6. sVec は ${}^{\Bbbk\mathbb{Z}_2}_{\Bbbk\mathbb{Z}_2}\mathcal{YD}$ の full subcategory をなす．

Proof. 事実 1.7 から ${}^{\Bbbk\mathbb{Z}_2}_{\Bbbk\mathbb{Z}_2}\mathcal{YD}$ の対象は少なくとも $\Bbbk\mathbb{Z}_2$ で次数付けられたベクトル空間になることから，対象に関して閉じていることはよい．スーパーベクトル空間 V を固定する．作用 $\Bbbk\mathbb{Z}_2 \otimes V \to V$ と余作用 $\delta : V \to \Bbbk\mathbb{Z}_2 \otimes V$ は $\mathbb{Z}_2 = \langle\sigma\rangle = \{e, \sigma\}$ と勝手な V の元 $v = v_0 + v_1$ with $v_0 \in V_0,\, v_1 \in V_1$ に対して

$$e.v = v,\ \sigma.v := v_0 - v_1, \quad \delta(v_0) = e \otimes v_0,\ \delta(v_1) = \sigma \otimes v_1$$

とすればよい．両立条件が成り立つことを示す．$\Bbbk\mathbb{Z}_2 = \Bbbk e \oplus \Bbbk\sigma$ の余積は $\Delta(\sigma^i) = \sigma^i \otimes \sigma^i$ で対合射は $S(\sigma^i) = \sigma^i$ であることに注意すると次の関係式

$$\delta(\sigma^i.v) = e \otimes v_0 + (-1)^i \sigma \otimes v_1$$

が任意の $v \in V$ に対して成り立てばよい．実際に $v = v_0 + v_1$ with $v_0 \in V_0, v_1 \in V_1$ に対して

$$\begin{aligned}\delta(\sigma^i.v) &= \delta(v_0 + (-1)^i v_1)\\ &= \delta(v_0) + (-1)^i \delta(v_1)\\ &= e \otimes v_0 + (-1)^i \sigma \otimes v_1\end{aligned}$$

となるので両立条件もよい．subcategory をなすことはこれでよく，full subcategory であることは sVec の射は $\mathbb{Z}_2$-次数付けを保つ射であったことからしたがう． □

このことからホップ・スーパー代数 $\mathcal{H}$ に対して事実 1.12 から（通常の）ホップ代数 $\hat{\mathcal{H}}$ を考えることができ，その構造たちは次のように書き下すことが出来る：

$$(a \otimes \sigma^i)(b \otimes \sigma^j) := a(b_0 + (-1)^i b_1) \otimes \sigma^{i+j}, \qquad 1_{\mathcal{H}} \otimes 1_{\Bbbk\mathbb{Z}_2}$$

ただし，$b = b_0 + b_1 \in \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1$ と表示しており $1_{\mathcal{H}}, 1_{\Bbbk\mathbb{Z}_2}$ はそれぞれの単位元である．

$$\widehat{\Delta}(a \otimes \sigma^i) := (a_{0(1)} \otimes \sigma^i) \otimes (a_{0(2)} \otimes \sigma^i) + (a_{1(1)} \otimes \sigma^{i+1}) \otimes (a_{1(2)} \otimes \sigma^i), \qquad \varepsilon_{\mathcal{H}} \otimes \varepsilon_{\Bbbk\mathbb{Z}_2}$$

と入れる．ただし，余積を $\Delta(a) = a_{(1)} \otimes a_{(2)}$ と表示しており $\varepsilon_{\mathcal{H}}, \varepsilon_{\Bbbk\mathbb{Z}_2}$ はそれぞれの余単位である．これを $\hat{\mathcal{H}} := \mathcal{H} \otimes \Bbbk\mathbb{Z}_2$ とかく．さらに対合射は次で与えられる：

$$\hat{S} : \hat{\mathcal{H}} \to \hat{\mathcal{H}}\,;\, a \otimes \sigma^i \mapsto (-1)^{i+1} S(a) \otimes \sigma^{i+|a|}.$$

ここで S は $\mathcal{H}$ の対合射である．

ホップスーパー代数 $\mathcal{H}$ に対して，$g.\ell(\mathcal{H}) = \{0 \neq g \in \mathcal{H}_0 \mid \Delta(g) = g \otimes g\}$ とおく．purely even でない有限次元ホップスーパー代数 $\mathcal{H}$ に対して，そのボゾン化は以下の基本的な性質を満たす：

命題 2.7. 次元に関して $\dim\hat{\mathcal{H}} = 2\dim\mathcal{H}$ が成立する．

Proof. これは構成から明らかである． □

命題 2.8. 写像 $g.\ell(\mathcal{H}) \times \mathbb{Z}_2 \cong g.\ell(\hat{\mathcal{H}}); (h, \sigma^i) \mapsto h \otimes \sigma^i$ は群同型をなす．

Proof. 元 $h = h_0 + h_1 \in \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1$ with $h_0 \in \mathcal{H}_0,\, h_1 \in \mathcal{H}_1$ について．$h \otimes \sigma^i \in g.\ell(\hat{\mathcal{H}})$ を仮定する．まずボゾン化の余積 $\hat{\Delta}$ の定義から $\Bbbk\mathbb{Z}_2$ の元を見ることで $h_1 = 0$ でなくてはならない．つまり

$$\hat{\Delta}(a \otimes \sigma^i) \in \big((\mathcal{H}_0 \otimes \Bbbk\mathbb{Z}_2) \otimes (\mathcal{H}_0 \otimes \Bbbk\mathbb{Z}_2)\big) \oplus \big((\mathcal{H}_1 \otimes \Bbbk\mathbb{Z}_2) \otimes (\mathcal{H}_1 \otimes \Bbbk\mathbb{Z}_2)\big)$$

となる．そこで簡単のため $\Delta(h) = x \otimes y + z \otimes w \in (\mathcal{H}_0 \otimes \mathcal{H}_0) \oplus (\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_1)$ と表示する．もし $z \neq 0$ が成り立つときは先の議論と同じように $h \otimes \sigma^i \in g.\ell(\hat{\mathcal{H}})$ に反するので $\Delta(h) = x \otimes y \in \mathcal{H}_0 \otimes \mathcal{H}_0$ の形となる．最初の仮定から，

$$(h \otimes \sigma^i) \otimes (h \otimes \sigma^i) = \hat{\Delta}(h \otimes \sigma^i) = (x \otimes \sigma^i) \otimes (y \otimes \sigma^i)$$

なので $\Delta(h) = h \otimes h$ を強いる．つまり $h \in g.\ell(\mathcal{H})$ となる． □

命題 2.9. ボゾン化 $\hat{\mathcal{H}}$ は非可換かつ非余可換なホップ代数をなす．

Proof. 仮定から $0 \neq x \in \mathcal{H}_1$ なる元がとれる．積のほうは

$$(x \otimes \sigma)(1 \otimes \sigma) = x \otimes e \neq -x \otimes e = (1 \otimes \sigma)(x \otimes \sigma)$$

となり非可換性はよい．余積のほうは $\Delta(x) = x_{(1)} \otimes x_{(2)}$ と表示すれば

$$\hat{\Delta}(x \otimes \sigma) = (x_{(1)} \otimes e) \otimes (x_{(2)} \otimes \sigma)$$

となり明らかに非余可換となる． □

補題 2.10. ホップ代数 $\Bbbk\mathbb{Z}_2$ と双対 $(\Bbbk\mathbb{Z}_2)^*$ はホップ代数として同型となる．

定理 2.11. ボゾン化 $\hat{\mathcal{H}} = \mathcal{H} \otimes \Bbbk\mathbb{Z}_2$ の双対 $(\hat{\mathcal{H}})^*$ は $\mathcal{H}^* \otimes \Bbbk\mathbb{Z}_2$ と同型となる．

さて，ホップ代数 A で事実 1.12 の 2 番目の条件を満たすものを与えれば，A の部分代数として ${}^{\Bbbk\mathbb{Z}_2}_{\Bbbk\mathbb{Z}_2}\mathcal{YD}$ のホップ代数対象を得ることが出来る．ホップ・スーパー代数の分類を行うためには，対応で得られる $B \in {}^{\Bbbk\mathbb{Z}_2}_{\Bbbk\mathbb{Z}_2}\mathcal{YD}$ がホップ・スーパー代数とみなすことができる，つまり次の条件：

$$B \in {}^{\Bbbk\mathbb{Z}_2}_{\Bbbk\mathbb{Z}_2}\mathcal{YD} \iff B \in \mathsf{sVec}.$$

が満たされるような B に関する必要十分条件を考察すればよいことになる．

2.4 YD データ

ホップ代数 A と位数 2 の元たち $g \in g.\ell(A), \alpha \in g.\ell(A^*)$ であって $\alpha(g) = -1$ を満たす 3 つ組 (A, g, α) 全体を YD と定義する．

定義 2.12. 有限次元ホップ代数 A に対して

$$\mathsf{YD}(A) := \{(g, \alpha) \in g.\ell(A) \times g.\ell(A^*) \mid g^2 = 1,\ \alpha^2 = \varepsilon_A,\ \alpha(g) = -1\}$$

を A の YD（**Yetter-Drinfeld**）**データ**と呼ぶ．

この YD データは次のように特徴づけられる．

定理 2.13. 有限次元ホップ代数 A を固定する．次は 1 対 1 の対応を与える：

$$\mathsf{YD}(A) \longrightarrow \{{}^{\Bbbk\mathbb{Z}_2}_{\Bbbk\mathbb{Z}_2}\mathcal{YD}\text{のホップ代数対象で } A \text{ に関する split epi を持つもの}\}\ ;\ (g, \alpha) \longmapsto A^{\mathrm{co}(\pi_{g,\alpha})}$$

ここで $\pi_{g,\alpha} : A \to \Bbbk\mathbb{Z}_2 = \Bbbk e \oplus \Bbbk\sigma$ は split epi であり，

$$\pi_{g,\alpha} : A \to \Bbbk\mathbb{Z}_2; a \mapsto \varepsilon(a)\boldsymbol{e}_0 + \alpha(a)\boldsymbol{e}_1 \quad \text{with} \quad \boldsymbol{e}_0 := \frac{1}{2}(e + \sigma),\ \boldsymbol{e}_1 := \frac{1}{2}(e - \sigma).$$

で与えられる．さらにこの対応の逆はボゾン化 $B \mapsto \hat{B} = B \# \Bbbk\mathbb{Z}_2$ である．

この定理 2.13 から各 $(g,\alpha) \in \mathsf{YD}(A)$ に対して ${}^{\Bbbk\mathbb{Z}_2}_{\Bbbk\mathbb{Z}_2}\mathcal{YD}$ のホップ代数対象を得ることが出来る．しかし，今の構成では $(g,\alpha),(h,\beta) \in \mathsf{YD}(A)$ であってホップ代数同型 $A^{\mathrm{co}(\pi_{g,\alpha})} \cong A^{\mathrm{co}(\pi_{h,\beta})}$ が存在するような $A^{\mathrm{co}(\pi_{g,\alpha})}$ と $A^{\mathrm{co}(\pi_{h,\beta})}$ を区別できていない．したがって，同型類を分類するために $(g,\alpha),(h,\beta) \in \mathsf{YD}(A)$ に対して次の関係「$(g,\alpha) \sim (h,\beta) :\iff f(g)=h,\ \alpha=\beta\circ f$ を満たすようなホップ代数同型射 $f: A\to A$ が存在する」を $\mathsf{YD}(A)$ 上にいれる．

命題 2.14. これは同値関係をなす．

Proof. 反射律は id_A でよい．対称律は仮定で与えられたホップ代数同型射 f の逆写像 f^{-1} を考えればよく，推移律は，ホップ代数同型 f,g たちの合成 $g\circ f$ (or $f\circ g$) が条件を満たすホップ代数同型射を与える． □

これにより，各 $(A,g,\alpha) \in \mathsf{YD}$ に対して ${}^{\Bbbk\mathbb{Z}_2}_{\Bbbk\mathbb{Z}_2}\mathcal{YD}$ のホップ代数対象は $\mathsf{YD}(A)/\sim$ の元を明示的に与えられれば決定できることがわかった．

さらに得られた対象がホップ・スーパー代数とみなせるための条件 $B \in {}^{\Bbbk\mathbb{Z}_2}_{\Bbbk\mathbb{Z}_2}\mathcal{YD} \iff B \in \mathsf{sVec}$ は次のように書き下すことができた．

補題 2.15. 上で得られた対象を $B = A^{\mathrm{co}(\pi_{g,\alpha})} \in {}^{\Bbbk\mathbb{Z}_2}_{\Bbbk\mathbb{Z}_2}\mathcal{YD}$ とかくとき，任意の $b \in B$ に対して

$$m\circ(\alpha\otimes \mathrm{id}_B)\circ\Delta_A(b) = gbg^{-1}$$

が成立することと $B \in \mathsf{sVec}$ は必要十分条件を与える．

2.5 分類への応用

この節では §2.2 までの，分類への応用に用いることができる性質をまとめる．まずホップ代数 A であって次の条件 $(*)$ を満たすものを決定する．

「A は可換でも余可換でもなく，位数が 2 であるような元たち $g \in g.\ell(A)$ と $\alpha \in g.\ell(A^*)$ が存在する」

次に条件 $(*)$ を満たす各 A に対して商集合 $\mathsf{YD}(A)/\sim$ を決定する．同値類を次のように書き下す：

$$\mathsf{YD}(A)/\sim = \{[(g_i,\alpha_i)] \mid (g_i,\alpha_i) \in \mathsf{YD}(A)\}$$

各 $[(g_i,\alpha_i)]$ に対して $A^{\mathrm{co}(\pi_{g_i,\alpha_i})}$ with $\pi_{g_i,\alpha_i}: A \to \Bbbk\mathbb{Z}_2; a \mapsto \varepsilon(a)\boldsymbol{e}_0 + \alpha_i(a)\boldsymbol{e}_1$ を知ればよい．すると，ホップ代数同型 $\widehat{A^{\mathrm{co}(\pi_{g_i,\alpha_i})}} \cong A$ を与えるような ${}^{\Bbbk\mathbb{Z}_2}_{\Bbbk\mathbb{Z}_2}\mathcal{YD}$ のホップ代数対象 $A^{\mathrm{co}(\pi_{g_i,\alpha_i})}$ を決定できたことになる．さらに，$A^{\mathrm{co}(\pi_{g_i,\alpha_i})}$ たちのうちで，補題 2.15 で与えた同値条件を満たすものがホップ・スーパー代数である．

2.6 具体例

この節では分類への応用に則って，ある 8 次元のホップ・スーパー代数を具体的に構成する．“pointed” と呼ばれるクラスのうちで，条件 $(*)$ を満たす 16 次元ホップ代数は次のように与えられる．

$$A = H(C_2\times C_2,(2,2),(c^*,c^*d^*),(c,c),(0,0)),\ H(C_2\times C_2,(2,2),(c^*,d^*),(c,d),(0,0)),\dots$$

ここで，記号の定義は [CDR00] を参照されたい．

以下では，この A に対して $\mathsf{YD}(A)/\sim$ を決定する．まず，A の構造は次のように書き下すことが出来る．

$$A = \langle c,d,x_1,x_2\rangle/(c^2=1=d^2, x_i^2=0, cx_ic=-x_i, dx_1d=x_1, dx_2d=-x_2, x_1x_2=-x_2x_1)$$

$$c, d \in g.\ell(A), \quad \Delta(x_i) = x_i \otimes 1 + c \otimes x_i.$$

次に YD(A) を決定する．自明な id_A を除いて，位数 2 で与えられる $g.\ell(A^*)$ の元は命題 1.4 から次の $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ のいずれかになる．

(1) $\alpha_1(c) = -1, \alpha_1(d) = 1, \alpha_1(x_i) = 0,$
(2) $\alpha_2(c) = 1, \alpha_2(d) = -1, \alpha_2(x_i) = 0,$
(3) $\alpha_3(c) = -1, \alpha_3(d) = -1, \alpha_3(x_i) = 0.$

したがって，

$$\mathsf{YD}(A) \ = \ \{(c, \alpha_1), (cd, \alpha_1), (d, \alpha_2), (cd, \alpha_2), (c, \alpha_3), (d, \alpha_3)\}$$

商集合 YD$(A)/\sim$ はホップ代数同型写像 $A \to A$ を考察することで次を得る：

定理 2.16. YD(A) の商集合 YD$(A)/\sim$ は次で与えられる．

$$\mathsf{YD}(A)/\sim = \ \{[(c, \alpha_1)], [(cd, \alpha_1)], \ [(d, \alpha_2)]\}.$$

今得られた YD$(A)/\sim$ の元たちからホップ・スーパー代数を具体的に表示すると次のようになる：

$$A^{\mathrm{co}(\pi_{c,\alpha_1})} \ = \ \langle d, x_1, x_2 \rangle \quad \text{with} \quad \Delta(x_i) = x_i \otimes 1 + 1 \otimes x_i.$$

$$A^{\mathrm{co}(\pi_{cd,\alpha_1})} \ = \ \langle d, x_1, x_2 \rangle \quad \text{with} \quad \Delta(x_i) = x_i \otimes 1 + d \otimes x_i.$$

$$A^{\mathrm{co}(\pi_{d,\alpha_2})} \ = \ \langle c, x_1, x_2 \rangle \quad \text{with} \quad \Delta(x_i) = x_i \otimes 1 + c \otimes x_i.$$

3 主結果

上記の方法を各ホップ代数に適用することで，次元が 10 以下のホップ・スーパー代数全てを決定することができた．以下に得られた対象の個数を，既に知られているホップ代数の分類結果と合わせて紹介する．

次元	非スーパーなホップ代数	#1	#2	合計
2	$\Bbbk C_2$	1	1	2
4	$\Bbbk C_4, \Bbbk C_2^2, T_{4,-1}$	3	6	9
6	$\Bbbk C_6, \Bbbk S_3, (\Bbbk S_3)^*$	3	4	7
8	$\Bbbk C_8, \Bbbk(C_2 \times C_4), \Bbbk C_2^3,$ $\Bbbk D_8, \Bbbk Q_8, (\Bbbk D_8)^*, (\Bbbk Q_8)',$ $A_{C_2}, A_{C_2 \times C_2}, A'_{C_4}, A_8,$ $A''_{C_4}, A'''_{C_4,q}, (A'''_{C_4})^*$	14	34	48
9	$\Bbbk C_9, \Bbbk C_3^2, T_{9,\zeta_3}, T_{9,\zeta_3^2}$	4	0	4
10	$\Bbbk C_{10}, \Bbbk D_{10}, (\Bbbk D_{10})^*$	3	4	7
p（奇素数）	$\Bbbk C_p$	1	0	1

ここで，#1 はホップ代数の同型類の個数で #2 は purely even でないホップ・スーパー代数の同型類の個数．

参考文献

[AS02] N. Andruskiewitsch and H.-J. Schneider, *Pointed Hopf Algebras*, in: Recent developments in Hopf algebra Theorey,MSRI Publications **43** (2002), 168,Cambridge Univ. Press.

[CDR00] S. Caenepeel, S. Dăscălescu and Ş. Raianu, *Classfifying pointed Hopf algebras of dimension 16*, Comm. Algebra **28**, No.2 (2000), 541-568.

[Mj94] S. Majid, *Crossed products by braided groups and bosonization*, J.Algebra **163** (1994),pp. 165-190.

[R85] D. Radford,*The structure of Hopf algebras with a projection*, J. Algebra **92** (1985), 322-347.