

第 2 Betti 数 9 の有理曲面のコルク

大阪大学大学院 情報科学研究科 情報基礎数学専攻
若槇洋平 (Yohei WAKAMAKI)

概要

互いにエキゾチックな（同相だが微分同相でない）単連結閉 4 次元多様体 X, Y は、コルクと呼ばれる部分多様体の切り貼りで移り合う。その重要性のためコルクの研究は多く存在する一方、第 2 Betti 数の小さい単連結閉 4 次元多様体の微分構造を変えるコルクの具体例は少ない。例えば盛んにエキゾチック微分構造が研究されている $\mathbb{C}P^2 \# k\overline{\mathbb{C}P^2}$ ($k \geq 2$) でさえ、そのコルクが見つかっている最小の k の値は $k = 9$ である。本講演では $\mathbb{C}P^2 \# 8\overline{\mathbb{C}P^2}$ の微分構造を変える具体的なコルクを与え、関連する研究を紹介する。

1 導入

本稿では、明記しない限り多様体はすべて滑らかな閉多様体を意味するものとする。多様体の組 (X, Y) がエキゾチック対であるとは、 X と Y が互いに同相であるが微分同相ではないことを意味する。また、 X が標準的な*¹ ($S^2 \times S^2, \mathbb{C}P^2$ とその逆向き, $K3$ 曲面とその逆向きの有限個の連結和で表わされる) 4 次元多様体であるとき Y はエキゾチック X 、または X のエキゾチック微分構造と呼ばれたりする。4 次元多様体のエキゾチック微分構造については 1980 年代から活発に研究が続けられているが、多くの未解決問題が残されている状況である。特に第 2 ベッチ数 b_2 が小さいほど単連結閉 4 次元多様体のエキゾチック微分構造の構成は難しく、 b_2 が 2 以下の単連結閉 4 次元多様体のエキゾチック微分構造の存在は 1 つも知られていない。

単連結閉 4 次元多様体のエキゾチック微分構造を調べる上で、最も重要と思われる対象の 1 つにコルクと呼ばれるものがある。コンパクトで可縮な 4 次元多様体 C とその境界 ∂C 上の対合写像 τ の組 (C, τ) がコルクであるとは、 τ が C の自己同相写像に拡張するが、 C の自己微分同相には拡張しないことを意味する。コルク (C, τ) に関して、 C が 4 次元多様体 X に埋め込まれているとき $X_{(C, \tau)} := X - \text{int}(C) \cup_{\tau} C$ と定め、この C の切り貼り操作（または $X_{(C, \tau)}$ 自体）をコルク (C, τ) に沿った X のコルクツイストという。 τ が C の自己同相に拡張されることから、コルクツイストは X の同相類を変化させないことが分かる。コルク (C, τ) に沿ったコルクツイストが X の微分構造を変化させるとき、コルク (C, τ) を X のコルクという。コルクの重要性は、次の定理によく表れている。

定理 1.1 (Curtis-Freedman-Hsiang-Stong [7], Matveyev [9]). 任意の単連結閉 4 次元多様体のエキゾチック対 (X, Y) に対して、 X のあるコルク (C, τ) で、コルクツイスト $X_{(C, \tau)}$ が Y と微分同相で

*¹ $\frac{11}{8}$ 予想という予想が正しければ単連結閉 4 次元多様体の位相型は標準的なものしかないことが分かる。

あるようなものが存在する.

この定理から特に, 標準的な単連結閉 4 次元多様体 X のどのようなエキゾチック微分構造も, 必ず X をコルクツイストすることで得られるということが分かる. では, どのようなコルクとそのコルクツイストが X のエキゾチック微分構造を生み出すのか? と問うのは自然だろう. 実際, これまでに多くの標準的な単連結閉 4 次元多様体に対して, そのコルクが発見されてきている ([1, 6, 4, 2, 5]). 一方で興味深いのは, 現状においてコルクの具体例が発見されている標準的な単連結閉 4 次元多様体は第 2 Betti 数が 10 以上のものしかないということである. この事実から, 次のような問題を考えることができる.

問題 1.2. 第 2 Betti 数 b_2 が 9 以下の標準的な単連結閉 4 次元多様体のコルクの具体例を発見せよ.

2 主定理

本稿の主定理は以下の 2 つである.

定理 2.1. 図 1 の Kirby 図式で表わされるコルク (W_1, f_1) は, $\mathbb{C}P^2 \# 9\overline{\mathbb{C}P^2}$ のコルクである.

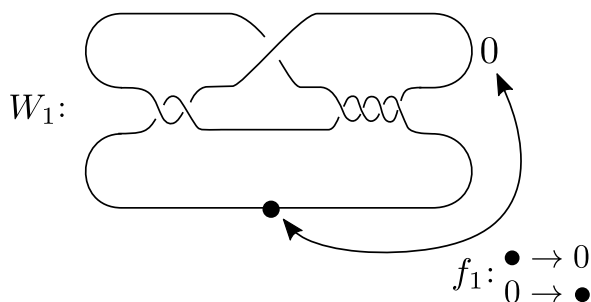


図 1 コルク (W_1, f_1) . 但し, f_1 は 0 とドットの交換で定義される ∂W_1 上の対合写像とする.

定理 2.2. 図 2 の Kirby 図式で表わされるコルク (W_2, f_2) は, $\mathbb{C}P^2 \# 8\overline{\mathbb{C}P^2}$ のコルクである.

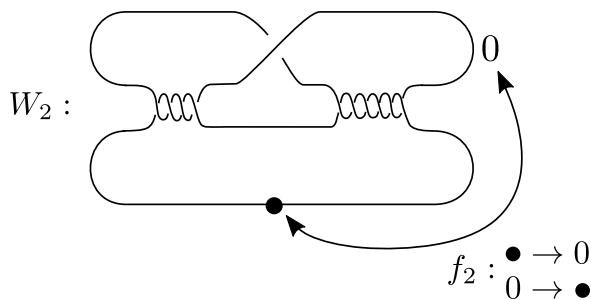


図 2 コルク (W_2, f_2) . 但し, f_2 は 0 とドットの交換で定義される ∂W_2 上の対合写像とする.

これまで $\mathbb{C}P^2 \# k\overline{\mathbb{C}P^2}$ のコルクが発見されているような k は, $k = 9$ が最小であった ([2]). 定理 2.2 は, そのような k の最小値を更新し, 問題 1.2 の $b_2 = 9$ の場合に対して 1 つの解答を与える事に注意されたい. なお, 定理 2.1 のコルクは, [2] において発見された $\mathbb{C}P^2 \# 9\overline{\mathbb{C}P^2}$ のコルクとは異なる

ものであることに注意されたい。

3 Kirby 図式

この章では、定理 2.2 の主張を理解するために Kirby 図式について説明を行う。4 次元多様体の Kirby 図式とは、4 次元多様体のハンドル分解における各ハンドルの接着を表わす図式のことである。従って多様体のハンドル分解から説明をする。

3.1 多様体のハンドル分解

以下、 k 次元円板を D^k で表わすものとする。このとき、 $D^k \times D^{n-k}$ を (n 次元) k ハンドルと呼ぶ。 k ハンドルに対して、 $\partial D^k \times D^{n-k}$ を接着領域と呼ぶ。接着領域の中心部分 $\partial D^k \times \{0\}$ を接着球面と呼ぶ。境界付き n 次元多様体 X の境界 ∂X への埋め込み $\varphi: \partial D^k \times D^{n-k} \rightarrow \partial X$ を k ハンドルの接着写像という。接着写像を用いて構成される多様体^{*2} $X \cup_{\varphi} (D^k \times D^{n-k}) = X \sqcup (D^k \times D^{n-k}) / \varphi$ を X に k ハンドルを φ で接着して得られた多様体と呼ぶ (図 5)。



図 3 4 次元 1 ハンドル $D^1 \times D^3$ の接着領域 $\partial D^1 \times D^3$.

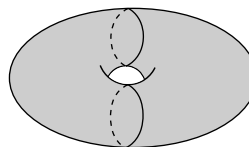


図 4 4 次元 2 ハンドル $D^2 \times D^2$ の接着領域 $\partial D^2 \times D^2$.

0 ハンドル D^n にハンドルを有限回接着して得られる多様体をハンドル体と呼ぶ。多様体 X があるハンドル体と微分同相であるとき、 X はハンドル分解を持つといい、そのハンドル体を X のハンドル分解と呼ぶ。コンパクト n 次元多様体はハンドル分解を持つことが知られており、特に連結なコンパクト n 次元多様体は次の 3 つの条件を同時に満たすようなハンドル分解を持つことが知られている (図 6)。

- (1) 0 ハンドルをちょうど 1 つ持つ。
- (2) ハンドル達は指数に関して昇順に接着されている。指数が同じハンドルに関してはどのような順番で接着してもよい。
- (3) 境界を持たない場合はちょうど 1 つの n ハンドルを持つ。境界を持つ場合は n ハンドルを持たない。

3.2 Kirby 図式による 4 次元多様体の表示

以下では、4 次元多様体 X のハンドル分解における各ハンドルの接着がどのように描かれるのか説明する。また、 X は連結、コンパクト、向き付け可能であり、上述の条件 (1)~(3) を満たすよう

^{*2} 正確には角の解消という操作をする必要がある。

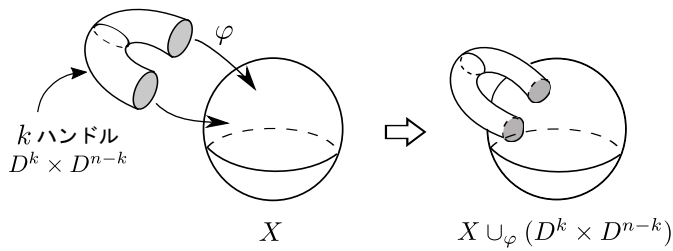


図5 ハンドルの接着のイメージ.

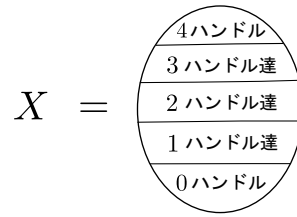


図6 閉4次元多様体のハンドル分解のイメージ.

にハンドル分解されているものとする. 指数が i 以下のハンドルからなる X の部分ハンドル体を X_i と表わすことにする.

- (1) (1ハンドルの接着) 1ハンドルの接着写像は2つの3次元球体 $D^3 \sqcup D^3$ の $S^3 = \partial D^4 = \partial X_0$ への埋め込みである. 従って, 1ハンドルの接着写像は図3のように $S^3 = \mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$ 内に3次元球体 D^3 を2つ描くことで表わされる. 但し, 1ハンドルの接着を表わすために, これらの D^3 は間にある平面に関して鏡映で同一視されているとする (図7).
- (2) (2ハンドルの接着) 2ハンドルの接着写像はソリッドトーラス $S^1 \times D^2$ の ∂X_1 への埋め込みである. この埋め込みは結び目 (接着球面 $S^1 \times \{0\}$ の埋め込み) とフレーミング係数 (ソリッドトーラスが D^2 方向に何回捻じれているか^{*3}を表わす整数) で決定できることが知られている. 従って, 2ハンドルの接着写像は結び目とそれに付随するフレーミング係数で表わされる (図8). 但し, 結び目が1ハンドルの上を通ることがあることに注意されたい (図10内の赤い成分).
- (3) (3,4ハンドルの接着) 閉4次元多様体のハンドル分解は3,4ハンドルの接着によらず微分同相類が一意に定まることが知られている. 従って, 3,4ハンドルはいくつ接着されているかだけを図式中に書いておくことにする. 境界がある場合も, 3,4ハンドルの接着を表示しなくてよいため十分条件が知られている ([10]).

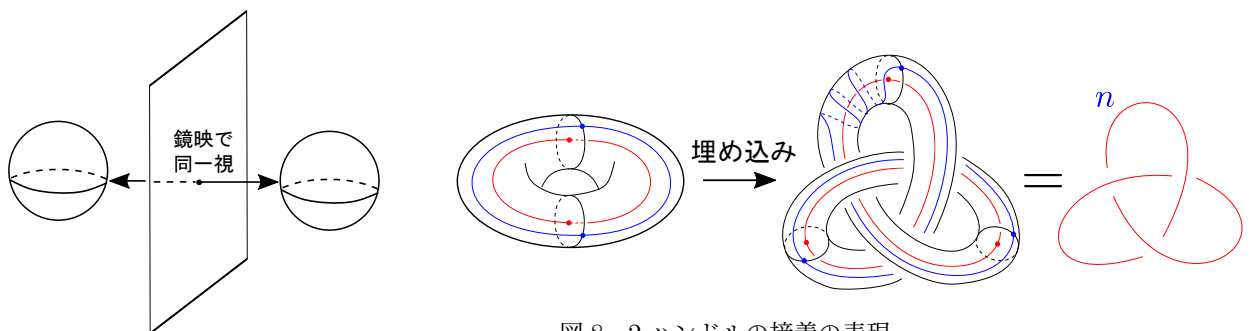


図8 2ハンドルの接着の表現.

図7 1ハンドルの接着領域の間の関係.

^{*3} 基準となる0回捻じれている埋め込みの定め方はいろいろあるが, 簡単のためここでは述べない. 詳しくは [8] の第4章参照.

以上の手順により描かれる図式を、4次元多様体 X の **Kirby 図式** という (図 10).

注意 3.1 (1 ハンドルのドット付き円周による表現). 1 ハンドルの接着領域である二つの D^3 を互いに近づけたとき, 間に現れる円板の境界の円周にドットを付け, このドット付き円周で 1 ハンドルの接着領域を指定することもある. ドット付き円周は常に自明な結び目になることに注意されたい.

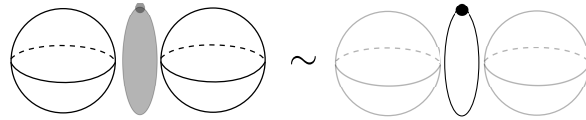


図 9 1 ハンドルのドット付き円周による表現.

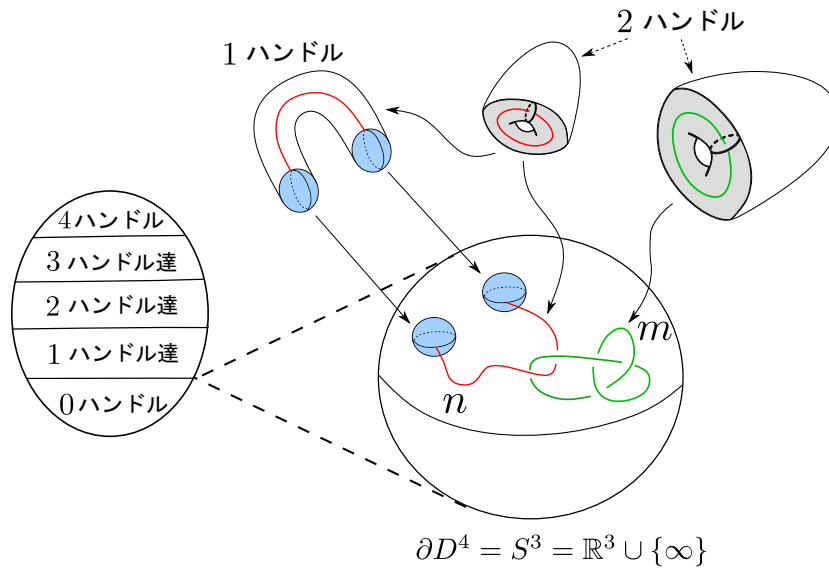


図 10 Kirby 図式のイメージ.(cf.[3, pp.2])

4 主定理の証明の概略

定理 2.2 の証明についてのみ述べる. 証明は大きく 3 つのステップに分かれる. まず, [11] で構成されたエキゾチック $\mathbb{C}P^2 \# 8\overline{\mathbb{C}P^2}$ (以下, R_8 と表わすことにする.) に対して明示的な Kirby 図式を与える. これまで上記の R_8 の明示的な Kirby 図式は与えられていなかったことに注意されたい. 次に, R_8 の Kirby 図式を変形することで図式内に W_2 を構成する. 最後に, R_8 の (W_2, f_2) に沿ったコルクツイストが通常の $\mathbb{C}P^2 \# 8\overline{\mathbb{C}P^2}$ に一致していることを図式の変形を用いて証明する. コルクツイストは可逆であることから, $\mathbb{C}P^2 \# 8\overline{\mathbb{C}P^2}$ を (W_2, f_2) に沿ってコルクツイストをすると R_8 が得られることが分かる. 以上の手順により, 定理 2.2 が証明される.

参考文献

- [1] S. Akbulut *A fake compact contractible 4-manifold*, J. Differential Geom. **33** (1991), no. 2, 335–356.
- [2] S. Akbulut, *The Dolgachev surface. Disproving the Harer-Kas-Kirby conjecture*, Comment. Math. Helv. **87** (2012), no. 1, 187–241.
- [3] S. Akbulut, *4-manifolds*, Oxford Graduate Texts in Mathematics, vol. 25, Oxford University Press, Oxford, 2016.
- [4] S. Akbulut and K. Yasui, *Corks, plugs and exotic structures*, J. Gökova Geom. Topol. GGT **2** (2008), 40–82.
- [5] D. Auckly, H. J. Kim, P. Melvin and D. Ruberman, *Stable isotopy in four dimensions*, J. Lond. Math. Soc. (2) **91** (2015), no. 2, 439–463.
- [6] Ž. Bižaca and R. E. Gompf, *Elliptic surfaces and some simple exotic R^4 's*, J. Differential Geom. **43** (1996), no. 3, 458–504.
- [7] C. L. Curtis, M. H. Freedman, W. C. Hsiang and R. Stong, *A decomposition theorem for h -cobordant smooth simply-connected compact 4-manifolds*, Invent. Math. **123** (1996), no. 2, 343–348.
- [8] R. E. Gompf and A. I. Stipsicz, *4-manifolds and Kirby calculus*, Graduate Studies in Mathematics, **20**. American Mathematical Society, Providence, RI, 1999.
- [9] R. Matveyev, *A decomposition of smooth simply-connected h -cobordant 4-manifolds*, J. Differential Geom. **44** (1996), no. 3, 571–582.
- [10] B. Trace, *On attaching 3-handles to a 1-connected 4-manifold*, Pacific J. Math. **99** (1982), no. 1, 175–181.
- [11] K. Yasui, *Small exotic rational surfaces without 1- and 3-handles*, Trans. Amer. Math. Soc. **362** (2010), no. 11, 5893–5907.