

Generalized exclusion process のスペクトルギャップの 評価

慶應義塾大学大学院 理工学研究科 基礎理工学専攻 数理科学専修
和知秀忠 (Hidetada WACHI)

概要

スペクトルギャップはマルコフ過程の緩和時間の評価において重要な値であるが、複雑なマルコフ過程のスペクトルギャップを計算により直接求めることは困難である。今回は interchange process が持つ対称性と群作用に注目することで、generalized exclusion process のスペクトルギャップが、同一グラフ上の random walk のスペクトルギャップに一致することを示した (Theorem 4.3)。本研究は鐘ヶ江和菜氏 (慶應義塾) との共同研究である。

1 イントロダクション

スペクトルギャップはマルコフ連鎖の時間発展に関する研究において重要な役割を果たしている。Process $P = P(S, C)$ を状態空間と呼ばれる集合 S と遷移率 $C : S \times S \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ であって、 $C(x, x) = 0$, $x \in S$ を満たすものと定義する。 $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ に対して、無限小生成作用素 \mathcal{L}^P を

$$\mathcal{L}^P f(x) = \sum_{y \in S} C(x, y)(f(y) - f(x))$$

と定義する。 $-\mathcal{L}^P$ が半正定値であるとき、 $-\mathcal{L}^P$ の 0 でない最小の固有値 λ_1^P を process P のスペクトルギャップと呼ぶ。 C が推移確率を与えているとき、 process P の連続時間マルコフ連鎖において、状態 $x \in S$ が時刻 t において状態 $y \in S$ になる確率がある $a_{x,y}$ を用いて

$$P_x(X_t = y) = \nu(y) + a_{x,y}e^{-\lambda_1^P t} + o(e^{-\lambda_1^P t}), \quad y \rightarrow \infty$$

と表される。ただし、 ν はこのマルコフ連鎖の定常分布である。そのため、この連続時間マルコフ連鎖の緩和時間として $\frac{1}{\lambda_1^P}$ が参照されることがあり、 λ_1^P の値を求めることがマルコフ連鎖の時間発展を解析する上で重要である。しかし、その計算は一般に困難であり任意の process に適用できる効率的な手法は確立されていない。その中で Aldous' Conjecture は interchange process の spectral gap をより計算が容易な random walk の spectral gap を求めることで決定できること主張しており、 spectral gap を求める問題において重要な結果である。

Theorem 1.1 ([2, Theorem 1.1]). 有限グラフ $X = (V, E)$ 上の interchange process と random walk のスペクトルギャップをそれぞれ λ_1^{IP} , λ_1^{RW} とおくと、

$$\lambda_1^{IP} = \lambda_1^{RW}$$

が成立する.

この定理は Aldous [1] によって 1992 年に予想され, 最終的に Caputo, Ligget and Richthammer [2] によって 2009 年に解決された. また, Aldous' conjecture は Piras [3] によって, simple block shuffle に対して一般化されている. 今回は Caputo らによる結果を用いて, 特定の相互条件を持つ generalized exclusion process のスペクトルギャップが, 計算がより簡単な random walk のスペクトルギャップに等しくなることを示した (Theorem 4.3).

2 Process とスペクトルギャップ

2.1 Process and sub-process

はじめに Aldous' spectral gap conjecture の重要なポイントを説明するために sub-process という概念を導入したい. そのために, process の射を定義する. この定義は, [2, §1.1] における sub-process の定義と同値である.

Definition 2.1. 二つの process $P_1 = (S_1, C_1)$, $P_2 = (S_2, C_2)$ について, P_1 から P_2 への process の射とは, 集合の写像 $\varphi: S_1 \rightarrow S_2$ であって, 任意の $f \in M^{P_2}$ に対して

$$\mathcal{L}^{P_1}(f \circ \varphi) = (\mathcal{L}^{P_2} f) \circ \varphi$$

を満たすもののことである.

Subprocess は process の射を用いて次のように定義される.

Definition 2.2. Process P_2 が process P_1 の sub-process であるとは, P_1 から P_2 への process の射 φ で集合の射として全射なものが存在することをいう. 特に φ が全単射であるとき, P_1 と P_2 を同型な process と呼び, $P_1 \cong P_2$ と表す.

次の命題のように, sub-process はその無限小生成作用素の固有空間が元の process の無限小生成作用素の固有空間に含まれているということを意味している.

Proposition 2.3 ([2, §1.1]). P_2 を P_1 の sub-process, sub-process を定める射を $\varphi: P_1 \rightarrow P_2$ とおく. このとき, $-\mathcal{L}^{P_2}$ の固有値は全て $-\mathcal{L}^{P_1}$ の固有値である. 特に, P_1 が半正定値ならば P_2 も半正定値になる. したがって, P_1, P_2 のスペクトルギャップ $\lambda_1^{P_1}, \lambda_1^{P_2}$ の間には

$$\lambda_1^{P_1} \leq \lambda_1^{P_2}$$

が成立する.

一般にスペクトルギャップを求める問題は process よりも sub-process の方が, 無限小生成作用素の表現行列の次数 (状態空間のサイズ) が小さいという点で容易である. そのため, スペクトルギャップを求めたい process が別の process の sub-process になることを示せたとしても, 問題が容易になるとは限らない. また, [2] でも指摘されているように random walk は interchange process の sub-process

になっていることが知られている。そのため, Aldous' conjecture において,

$$\lambda_1^{IP} \leq \lambda_1^{RW}$$

という不等式が成り立つことは容易にわかる。したがって, 定理の証明の困難さは反対向きの不等号を示す部分にあり, この困難が解決されたおかげで interchange process のスペクトルギャップを求める問題が, より計算が容易な random walk のスペクトルギャップを求める問題に帰着されたのである。

2.2 Group process

この節では, 我々の GEP のスペクトルギャップの評価において重要になってくる process である group process について定義したい。このレポートでは G を有限群とする。

Definition 2.4. 群 G を集合とみなして $\hat{S} := \text{Set}(G)$ とおく。このとき \hat{S} には群 G の右作用と左作用が自然に入っている。また, 写像 $C_G : G \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ で $C_G(e) = 0$ を満たすものを一つとる。このとき, 任意の $x, y \in \hat{S}$ に対して $y = gx$ となる $g \in G$ を用いて, $\hat{C}(x, y) = C_G(g)$ と定めることで, $\hat{C} : \hat{S} \times \hat{S} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ を得る。このようにして得られる process $\hat{P} = \hat{P}(G, C_G) = (\hat{S}, \hat{C})$ を群 G に付随する group process と呼ぶ。

Group process の利点の一つは自然な群作用の商によって簡単に sub-process を容易に構成することができることである。

Definition 2.5. $\hat{P}(G, C_G)$ を群 G に付随する group process とする。部分群 $H, H' \subset G$ の組 (H, H') が, 任意の $g \in G$ に対して

$$C_G(g) = C_G(hgh^{-1}), h \in H \quad (\spadesuit)$$

を満たすとき, $\bar{S} := H \backslash \hat{S} / H'$ と定めて, $x \in \bar{S}$ に対して $[x] = HxH' \in \bar{S}$ とおく。 $\bar{C} : \bar{S} \times \bar{S} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ を

$$\bar{C}([x], [y]) = \sum_{y' \in [y]} \hat{C}(x, y'), x, y \in \hat{S}$$

と定めれば, $\bar{P} = H \backslash P / H' := (\bar{S}, \bar{C})$ は process になる。ただし, \bar{C} が代表元の取り方によらないことが (\spadesuit) と簡単な計算からわかる。このとき, \bar{P} を組 (H, H') による group process \hat{P} の quotient process と呼ぶ。

Quotient process は sub-process 同士の比較が容易である。次の命題は, quotient process のスペクトルギャップについて重要な関係を示している。

Lemma 2.6. $\hat{P}(G, C_G)$ を群 G に付随する group process とする。部分群の組 $(H_i, H'_i), i = 1, 2$ に対して, $\bar{P}_i = H_i \backslash P / H'_i$ とおく。 $H_1 \subset H_2, H'_1 \subset H'_2$ が成立するならば, \bar{P}_2 は \bar{P}_1 の sub-process になる。

この補題は二つの quotient process を構成する部分群 (H_i, H'_i) を比較すれば, スペクトルギャップの大小関係がわかるということを主張している。一方で, 次の補題はこの補題と逆向きの大小関係を与えるものであり, 前節で述べた困難を克服する手段を与えるものである。

Lemma 2.7. $C_G(g) = C_G(g^{-1})$ を満たすと仮定する. $\hat{P}(G, C_G)$ を G に付随する *group process* とする. 部分群の組 (H_0, H) , (H_0, H_a) に対して, $\bar{P} = H_0 \backslash \hat{P} / H$, $\bar{P}_a = H_0 \backslash \hat{P} / H_a$ とおく. また, $H^a := \{hHh^{-1} \mid h \in H_a\}$ とおく. H, H_a が次の3つの条件を満たすとき,

$$\lambda_1^{\hat{P}} = \lambda_1^{\bar{P}_a}$$

が成立する.

1. $H_b = \cap_{H_\alpha \in H^a} H_\alpha \subset H'$ を満たす.
2. $\lambda_1^{\hat{P}} = \lambda_1^{\bar{P}}$ が成立する.
3. 任意の $H_\alpha \subset H^a$ に対して, $\langle H_\alpha, \cap_{H_\beta \in H^a \setminus \{H_\alpha\}} H_\beta \rangle = G$ が成立する.

3 様々な process

この章ではグラフ上の多粒子系 Markov 連鎖の process を *group process* の言葉を用いて記述する. 特に Definition 3.2 で定義する *interchange process* は重要で, 様々な多粒子系 Markov 連鎖の process を *interchange process* の *quotient process* として記述することができる.

Notation 3.1. V を集合として, $n = |V|$ とおく. $E = \{(u, w) \in V \times V \mid u \neq w\}$ とおく. $o, t : E \rightarrow V$ を $o((u, w)) = u$, $t((u, w)) = w$ と定め, $e \in E$ に対して $e_o := o(e)$, $e_t := t(e)$ と表す. また, $e = (u, w) \in E$ に対して, $\bar{e} := (w, u) \in E$ とおく. n 頂点完全グラフとは, 組 $X = (V, E)$ のことであって, V を X の頂点集合, E を X の辺集合と呼ぶ.

写像 $r_X : E \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ を X の辺重みと呼び, 組 (X, r_X) を辺重み付きグラフと呼ぶ. 特に, 任意の $e \in E$ に対して $r_X(e) = r_X(\bar{e})$ が成立するとき, r_X は対称であるといい, (X, r_X) を対称な辺重み付き n 頂点完全グラフと呼ぶ.

また, 任意の n 頂点完全グラフ X に対して全単射 $\xi_X : V \rightarrow \{1, \dots, n\}$ を一つ固定しておく. 以下では, 重み r_X と ξ_X は混乱を招かない場合には, 添字を省略する.

3.1 Interchange process

Definition 3.2. (*Interchange process*) (X, r) を対称な辺重み付き n 頂点完全グラフとする. 集合 $S_{IP} = S_{IP}(X)$ を

$$S_{IP} := \text{Bij}(V, \{1, \dots, n\})$$

で定め, $x \in S_{IP}$, $v \in V$ に対して $x(v)$ を v の x -label, または x に拘らない場合には単に *label* と呼ぶ. 任意の $e \in E$ に対して, $\eta_e : V \rightarrow V$ を

$$\eta_e(v) = \begin{cases} w & v = e_o \\ u & v = e_t \\ v & \text{otherwise} \end{cases}$$

と定める. $C_{IP} = C_{IP}(r) : S_{IP} \times S_{IP} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ を $x, y \in S_{IP}$ について

$$C_{IP}(x, y) = \begin{cases} r(e) & \exists e \in E \text{ s.t. } x \circ \eta_e = y \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

で定める. このとき, $P_{IP} = P_{IP}(X, r) = (S_{IP}, C_{IP})$ は process であり interchange process (以下, IP) と呼ばれる. これは辺重み付きグラフ上の label の交換から定まるマルコフ連鎖に対応している. (cf. 図 1)

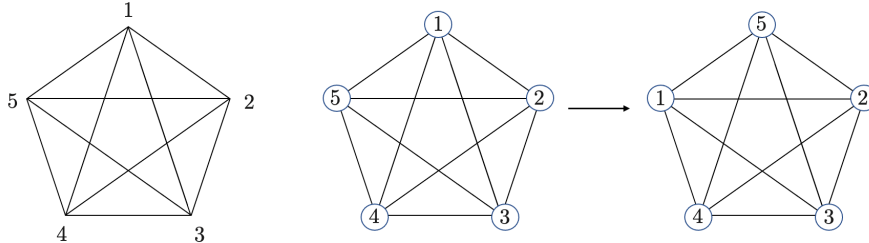


図 1 $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 上の interchange process に対応するマルコフ連鎖. 図はプロセスが定義されているグラフと, $S_{IP} \cong \mathfrak{S}_n$ とみなすことで $x = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ から $y = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ への遷移を表している.

IP は group process の言葉を用いると以下のように記述される.

Proposition 3.3. (X, r) を辺重み付き n 頂点完全グラフとする. $C_r : \mathfrak{S}_n \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ を

$$C_r(g) = \begin{cases} r((\xi^{-1}(i), \xi^{-1}(j))) & g = (ij), i \neq j \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

で定める. このとき, $IP P_{IP}(X, r)$ は $\hat{P}(\mathfrak{S}_n, C_r)$ に同型である.

今回は IP の場合のみ証明を与えるが, そのほかの process と group process の同型を示すときも方針は同様である.

Proof. 集合の全単射 $\varphi : \hat{S} \rightarrow S_{IP}$ を

$$\varphi(x) = x \circ \xi$$

によって定めると, これは全単射になっている. 従って, これが process の射になっていることを示せば良い. しかし, これは $x \in S$ に対して

$$\hat{C}(x, gx) = C_r(g) = C_{IP}(\varphi(x), \varphi(gx))$$

となることからわかる. 従って, $\hat{P} \cong P_{IP}$ であることがわかった. □

3.2 random walk

この節では random walk を定義し, IP の quotient process として記述する.

Definition 3.4. (X, r) を辺重み付き n 頂点完全グラフとする. 粒子数 $l \geq 1$ を定める. 集合 $S_{RW} = S_{RW}(X)$ を

$$S_{RW} := \{x : V \rightarrow \{0, 1\} \mid \#x^{-1}(1) = l\}$$

で定める. また, $C_{RW} = C_{RW}(r) : S_{RW} \times S_{RW} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ を $x, y \in S_{ASEP}$ に対して,

$$C_{RW}(x, y) := \begin{cases} r(e) & \exists e \in E \text{ s.t. } y = x \circ \eta_e, x(e_o) = 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

で定める. このとき, $P_{RW} = P_{RW}(X, r) = (S_{RW}, C_{RW})$ は process であり random walk(以下, RW と書く)と呼ぶ.

Remark 3.5. r が対称ならば RW は正定値になるが, 一般には正定値ではない.

Proposition 3.6. r が対称であると仮定する. IP $P_{IP}(X, r)$ に対応する group process を $\hat{P} = \hat{P}(\mathfrak{S}_n, C_r)$ とおく. $\rho : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{0, 1\}$ で $\rho \circ \xi \in S^{RW}$ となるものを一つ固定する. $H_0 \subset \mathfrak{S}_n$ を $\rho^{-1}(0)$ の並び替えに対応する \mathfrak{S}_n の部分群とすると, $\bar{P} = \hat{P}/H_0$ は $P_{RW}(X, r)$ と同型である.

3.3 Generalized Exclusion Process

この節では, generalized exclusion process を定義し, IP の quotient process として記述する. 特にこの quotient process としての表示が §4 における generalized exclusion process のスペクトルギャップの評価で重要になる.

Definition 3.7. (Generalized exclusion process) (X, r) を対称な辺重み付き n 頂点完全グラフとする. 各頂点 $v \in V$ に対して許容数 $k_v \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ を一つ定め, $k = (k_v)_{v \in V}$ とおく. $N = \sum_{v \in V} k_v$ とおき, 粒子数 $1 < l < N$ を固定する. 集合 $S_{GEP} = S_{GEP}(X, r, (k_v), l)$ を

$$S_{GEP} := \left\{ x : V \rightarrow \{0, \dots, l\} \mid x(v) \leq k_v, \sum_{v \in V} x(v) = l \right\}$$

で定める.

関数 $\mu : E \times S_{GEP} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ を一つ定め, これを遷移率と呼ぶ. $e := (u, w) \in E$ に対して, $\sigma^e : V \rightarrow \{-1, 1\}$ を

$$\sigma^e(v) := \begin{cases} -1 & v = e_o \\ 1 & v = e_t \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

で定める. 写像 $C_{GEP} = C_{GEP}(r, \mu) : S_{GEP} \times S_{GEP} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ を $x, y \in S_{GEP}$ に対して,

$$C_{GEP}(x, y) := \begin{cases} \mu(e, x)r(e) & \text{if } \exists e \in E \text{ s.t. } y = x + \sigma^e \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

と定める. このとき, $P_{GEP} = P_{GEP}(X, r, (k_v), l, \mu) = (S_{GEP}, C_{GEP})$ は process であり Generalized exclusion process (以下, GEP と書く) と呼ばれる. GEP は各頂点に複数個の粒子がとどまれる exclusion process である. (cf. 図 2)

特別な遷移率 μ として, $uw \in E, x \in S_{GEP}$ に対して $\mu(e, x) = x(e_o)(k_{e_t} - x(e_t))$ となる場合の GEP について, そのスペクトルギャップを評価する. そこで, この遷移率 μ を持つ GEP を標準 GEP (standart GEP, 以下 sGEP) と呼び, μ を省略して $P_{sGEP} = P_{sGEP}(X, r, (k_v), l)$ と表すことにする.

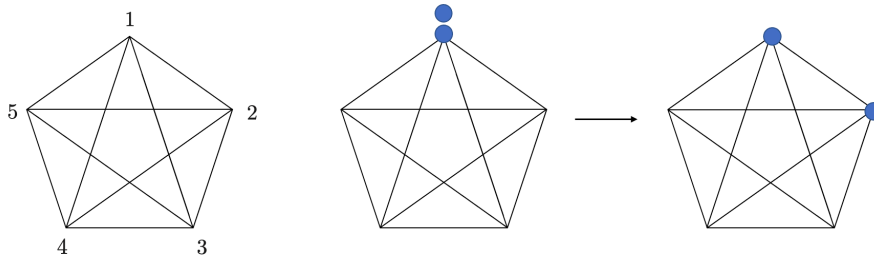


図2 $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 上の $l = 2, k_v = 2, v \in V$ の generalized exclusion process に対応したマルコフ連鎖. 図はプロセスが定義されているグラフと, ξ を恒等写像としたときの σ^{12} による状態の遷移を表している.

Remark 3.8. sGEP の遷移率は, 粒子が移動するにあたって始点に存在する粒子数が多く, 終点に存在する粒子数が少ないほど動きやすいという様子を最もシンプルに表していると考えられる. その意味で"標準的である"と言える.

以下では sGEP がある対称な辺重み付き N 頂点完全グラフ上の IP の sub-process とみなせることを示す.

対称な重み付き N 頂点グラフ $\tilde{X} = (\tilde{V}, \tilde{E}), \tilde{r} : \tilde{E} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ を以下のように構成する. $\tilde{V} = \{(v, m) \mid v \in V, m = 1, \dots, k_v\}$ と定め, $\tilde{E} = \{(u, w) \in \tilde{V} \times \tilde{V} \mid u \neq w\}$ とおく. $\tilde{e} = ((u, m_u), (w, m_w)) \in \tilde{E}$ に対して, $e \in E$ を $e = (u, w)$ と表すことにして,

$$\tilde{r}(\tilde{e}) := \begin{cases} r(e) & e_o \neq e_t \\ \left(\max_{u, w \in V} \frac{k_u}{k_w} \right) \sum_{e_o \neq v} r((e_o, v)) & e_o = e_t \end{cases}$$

と定める. このとき, $\tilde{X} = (\tilde{V}, \tilde{E})$ は次のような N 頂点完全グラフになっている. (cf. 図3)

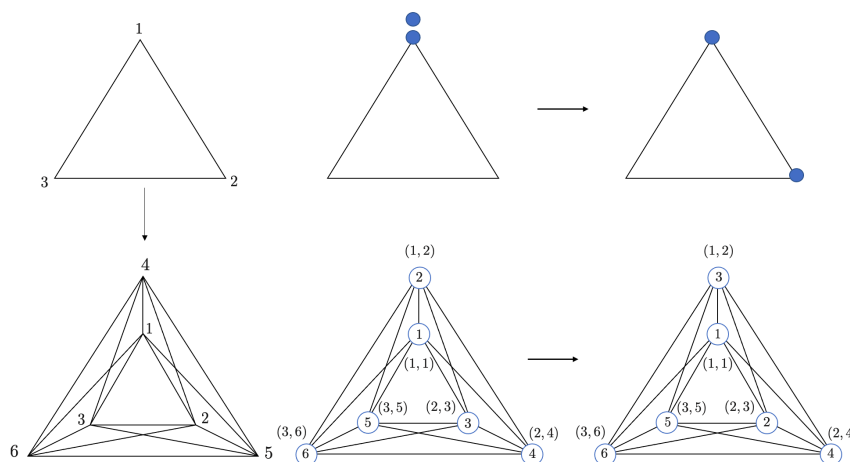


図3 グラフ X 上 $l = 2, k_v = 2, v \in V$ の generalized exclusion process とそれに対応するグラフ \tilde{X} 上の interchange process. 図はプロセスが定義されているグラフと, Proposition 3.9 で得られる対応を表している.

$\varphi_V : \tilde{V} \rightarrow V$ を $(v, m) \mapsto v$ によって定める. $\tilde{\xi} = \xi_{\tilde{X}} : \tilde{V} \rightarrow \{1, \dots, N\}$ 一つ固定しする. $\tilde{\xi}$ は全単射なので, 集合の射

$$\varphi_N := \xi \circ \varphi_V \circ \tilde{\xi}^{-1}$$

を定めることができる. $v \in V$ に対して \mathfrak{S}_n の部分群で $\tilde{\xi}(\varphi_V^{-1}(v))$ の置換に対応する置換群を $H_v \subset \mathfrak{S}_N$ とおく. 部分群 $H_0, H_1 \subset \mathfrak{S}_N$ をそれぞれ $\{l+1, \dots, N\}, \{1, \dots, l\}$ の置換群とする.

このとき, 次の命題が成立する.

Proposition 3.9. $P_{sGEP} = P_{sGEP}(X, r, (k_v), l)$ は, group process $\hat{P}(\mathfrak{S}_N, C_{\tilde{r}})$ の $(\prod_{v \in V} H_v, H_0 H_1)$ による quotient process $\bar{P} = (\bar{S}, \bar{C})$ と同型である.

Remark 3.10. $\prod_{v \in V} H_v$ で割ることが IP を構成するために増やした頂点の同一視, H_1 で割ることが label を粒子とみなすこと, H_0 で割ることが label を粒子のいない空白とみなすことにそれぞれ生じる同一視を表している.

Remark 3.11. Proposition 2.3, Proposition 3.9 から, P_{sGEP} は半正定値である.

4 GEP のスペクトルギャップの評価

この節では sGEP のスペクトルギャップがある RW のスペクトルギャップと一致することを示す. 繰り返しにはなるが, Lemma 2.7, Proposition 3.9 より $\lambda_1^{\hat{P}IP} \leq \lambda_1^{sGEP}$ であることは既にわかっているが, これは λ_1^{sGEP} の計算や評価が容易になったことを意味していない.

この章では次の条件 (\clubsuit) を満たす (X, r) を対称な辺重み付き n 頂点完全グラフと sGEP $P_{sGEP} = P_{sGEP}(X, r, (k_v), l)$ を固定する.

- $\clubsuit 1$ P_{sGEP} は既約である. Process $P = (S, C)$ が既約であるとは, 任意の $x, y \in S$ に対して S の元の列 $x_0 = x, x_1, \dots, x_m = y$ が存在して,

$$C(x_0, x_1) \cdots C(x_{m-1}, x_m) \neq 0$$

が成立することをいう.

- $\clubsuit 2$ 粒子数 l は $0 < l < N = \sum_{v \in V} k_v$ を満たす. もし, $l = 0, N$ だと S_{sGEP} が一点集合になってしまい, 無限小生成作用素は 0 以外の固有値を持たない.

$r_0 : E \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ を

$$r_0(e) = k_e r(e)$$

定め, 辺重み付き n 頂点完全グラフ (X, r_0) 上の RW を $P_{RW}(X, r_0)$ とおく. \tilde{X} と \tilde{r} を §3.3 で定めたグラフと辺重みとする. $G = \mathfrak{S}_N$ とおき, $1 \leq m \leq N$ に対して H_m を $\{1, \dots, m\}$ の並び替えに対応する置換群, H'_m を $\{m+1, \dots, N\}$ の並び替えに対応する置換群, $v \in V$ に対して H_v を $\tilde{\xi}(\tilde{\varphi}^{-1}(v))$ の並び替えに対応する置換群とする.

Lemma 4.1. P_{RW} は group process $\hat{P}(G, C_{\tilde{r}})$ の $(\prod_{v \in V} H_v, H_{N-1})$ に関する quotient process $\bar{P} = (\bar{S}, \bar{C})$ と同型である.

\tilde{X} 上の RW を $\tilde{P}_{RW} = P_{RW}(\tilde{X}, \tilde{r})$ とおく. このとき, [3, Proposition 3.1] の一般化が成立する.

Lemma 4.2 (c.f. [3, Proposition 3.1]). \tilde{P}_{RW} と P_{RW} のスペクトルギャップは一致する.

このとき, 次の定理が成立する.

Theorem 4.3. 上の条件において,

$$\lambda_1^{sGEP} = \lambda_1^{RW}$$

が成立する.

Proof. 次の図式にしたがって証明する. この図式ではスペクトルギャップが小さい方から大きい方へ矢印が引かれている.

$$\begin{array}{ccc}
 & & \text{quotient} \\
 & \tilde{P}_{IP} & \xrightarrow{\hspace{10em}} \tilde{P}_1 = \tilde{P}_{IP}/H_l \\
 \text{Proposition 1.1} \updownarrow & & \downarrow \text{quotient} \\
 \tilde{P}_{RW} \cong \tilde{P}/H_{N-1} & \xleftarrow{\hspace{10em}} \text{quotient} & \tilde{P}_1 \\
 \text{Lemma 4.2} \updownarrow & & \downarrow \text{quotient} \\
 P_{RW} = \prod_{v \in V} H_v \setminus \tilde{P}_{IP}/H_{N-1} & \xleftarrow{\hspace{10em}} \text{quotient} & \tilde{P}_2 = \prod_{v \in V} H_v \setminus \tilde{P}_{IP}/H_l \\
 & & \uparrow \text{Lemma 2.7} \\
 & & P_{sGEP} \cong \prod_{v \in V} H_v \setminus \tilde{P}_{IP}/H_l H'_l
 \end{array}$$

Proposition 1.1 より,

$$\lambda_1^{\tilde{P}_{IP}} = \lambda_1^{\tilde{P}_{RW}}$$

が成立する. また, $\tilde{P}_1 = \tilde{P}_{IP}/H_l$, $\tilde{P}_2 = \prod_{v \in V} H_v \setminus \tilde{P}_{IP}/H_l$ とおくと, Lemma 2.6, Lemma 4.2, (♣2) より,

$$\lambda_1^{\tilde{P}_{IP}} \leq \lambda_1^{\tilde{P}_1} \leq \lambda_1^{\tilde{P}_2} \leq \lambda_1^{P_{RW}} = \lambda_1^{\tilde{P}_{IP}}$$

が成立する. したがって, この不等号は全て等号で成立している.

最後に $\lambda_1^{P_{sGEP}} = \lambda_1^{\tilde{P}_2}$ を示す. $H_i \subset \mathfrak{S}_N$, $i = l+1, \dots, N$ を $\{1, \dots, N\} \setminus \{i\}$ の並び替えに対応する部分群とおくと, Lemma 2.7, (♣1) から, $\lambda_1^{P_{sGEP}} = \lambda_1^{\tilde{P}_2}$ が成立する. 以上から,

$$\lambda_1^{P_{sGEP}} = \lambda_1^{P_{RW}}$$

が成立することがわかった. □

Remark 4.4. Theorem 4.3 は sGEP P_{sGEP} のスペクトルギャップが, 状態空間のサイズがより小さく計算が容易な RW P_{RW} のスペクトルギャップを求めることで決定できることを意味している.

5 謝辞

本研究は JST CREST JPMJCR1913 「作用素論的データ解析に基づく複雑ダイナミクス計算基盤の創出」の支援を受けたものである.

参考文献

- [1] David Aldous, <https://www.stat.berkeley.edu/users/aldous/Research/OP/index.html>
- [2] Pietro Caputo, Thomas M. Liggett, and Thomas Richthammer, *Proof of Aldous' spectral gap conjecture*, J. Amer. Math. Soc. **23** (2010), no. 3, 831-851, DOI 10.1090/S0894-0347-10-00659-4. MR2629990
- [3] Daniele Piras, *Generalizations of Aldous' Spectral gap Conjecture* (2010). thesis.