2変数量子Garnier系の多項式ハミルトニアン

神戸大学大学院 理学研究科 数学専攻
皇學館大学 教育学部 教育学科
上野祐一 (Yuichi UENO)

概 要

Garnier 系とは，Painlevé 方程式の拡張であり，Frobenius 完全積分可能な多時間 Hamilton 系として与えられる．Garnier 系は Painlevé 方程式と同様に多項式 Hamiltonian H_{J} の Hamiltonian 系でかくことができる．ここでは，正則性により量子 Gariner 系を構築し，その特徴付けを行う．すなわち，Garnier 系の Hamiltonian 系がまた多項式 Hamiltonian 系に移るような正準変換を導入し，Hamiltonian がこの正則性によってただ一つに特徴付けることができることを示す.

1 Introduction

Painlevé 方程式 P_{J} $(\mathrm{J}=\mathrm{I},\cdots,\mathrm{VI})$ はある 2 階の線形常微分方程式

$$L_J : \frac{d^2y}{dx^2} = R_{\mathrm{J}}(x,\lambda,t)y$$

のモノドロミー保存変形やストークス係数を不変にする変形理論から導かれることが知られている [9]．このことは，P_{VI} については Fuchs により，他の P_{J} $(\mathrm{J}=\mathrm{I},\cdots,\mathrm{V})$ については Garnier によって最初に示された．これらの Painlevé 方程式は L_J の特異点の個数「4」の分割に対応させて考えることができる．

$$\begin{tikzcd}
 & & (2,2) \arrow[dr] & \\
(1,1,1,1) \arrow[r] & (1,1,2) \arrow[ur] \arrow[r] & (1,3) \arrow[r] & (4)
\end{tikzcd}$$

一方，N 変数 Garnier 系とは $N+3$ 個の確定特異点を持つ Riemann 球面 $\mathbb{P}^1$ 上の 2 階 Fuchs 型線型常微分方程式のモノドロミー保存変形から得られる N 個の時間変数を持つ Hamilton 系である．$N=1$ の場合は，Painlevé VI 型方程式と一致する．

また，H.Kimura により 2 変数の退化 Garnier 系が構築された．この 2 変数 Garnier 系には Painlevé 方程式の場合と同様に,「5」の分割に対応する次の退化系列がある [1, 2, 3].

$$\begin{tikzcd}
 & & (1,2,2) \arrow[r] \arrow[dr] & (2,3) \arrow[dr] & \\
(1,1,1,1,1) \arrow[r] & (1,1,1,2) \arrow[ur] \arrow[r] & (1,1,3) \arrow[r] \arrow[ur] & (1,4) \arrow[r] & (5)
\end{tikzcd}$$

古典 Painlevé 方程式の特徴付けには Takano やその共同研究者たちの仕事が知られている [4, 5, 14, 17]．これらの変換の下で， 古典 Painlevé 方程式は正則なハミルトニアン系に変換される [8]．さらには，古典 Painlevé 方程式がこれらの有理変換の下で，正則性によりただ一つに特徴付けられることを示した．これを高野理論と呼ぶ．

講演者は量子 Painlevé 方程式に対してもこれを適用し，高野理論の量子類似を構築した [18]．本稿では，量子 Painlevé 系において得られた結果を Garnier 系にも拡張し，$N=2$ の場合の Garnier 系 G(1,1,1,1,1) を特徴付ける量子正準変換とその結果として得られる量子 Garnier 系の多項式ハミルトニアンを与え，2 変数量子 Garnier 系を構築する．また，残りの各場合については決定された Hamiltonian のみを述べる．

なお，退化の場合も含めた $N=2$ の場合の Garnier 系 (G(1,1,1,1,2),G(1,1,3),G(1,2,2),G(1,4)) の各場合についても量子正準変換とその結果として得られる量子 Garnier 系の多項式ハミルトニアンが見つかっている．こちらについては現在論文を作成中である．

2　2 変数量子 Garnier 系

以下では，$N=2$ の場合の Garnier 系について，その量子版を考える．

2 変数量子 Garnier 系を適切に定義するために，次のような Hamilton 系を考える．

$$\begin{aligned} dq_1 &= [H_1, p_1]dt + [H_2, p_1]ds, \qquad dp_1 = -[H_1, q_1]dt - [H_2, q_1]ds \\ dq_2 &= [H_1, p_2]dt + [H_2, p_2]ds, \qquad dp_2 = -[H_1, q_2]dt - [H_2, q_2]ds \end{aligned} \tag{1}$$

ここで，q_1, q_2, p_1, p_2 は $[q_i, p_j] = \delta_{i,j} h \quad (h \in \mathbb{C})$ を満たす正準変数であり，t, s は 2 つの時間発展の独立変数とする．

また，H_1, H_2 は§ 3. で定める量子正準変換により正則となるように決めた q_1, q_2, p_1, p_2 の非可換多項式 Hamiltonian とする．

3　量子正準変換と決定された Hamiltonian

§ 1. で述べたように古典 Painlevé 系における特徴付けは Takano と彼の共同研究者たちの仕事によるものである．Painlevé 系の多変数化である Garnier 系については，2 変数と 3 変数の場合の正準変換については Sasano や Suzuki の仕事により分かっている [11, 12, 15, 16]．

本論文では 2 変数量子 Garnier 系について，正則性に基づいたアプローチを試みる．そのために，Sasano の導入した有理正準変換を自然に量子化したものを考え，これらの変換に対して正則に変換されるような Hamiltonian を探す．もちろん，正準変換の量子化にも曖昧さの問題は生じるが，変数の単純な順序交換を考えるだけであればその効果はパラメータの読み替えに吸収することができるため，順序をどのように指定しても実質的に等価であり，一般性を失わない．そのため，ここでは変数 q_i が変数 p_j よりも，また変数 x_i が変数 y_j よりも左にくるように非可換変数の順序を指定する．

我々が出発点とする量子正準変換とその逆変換は次のものである．これらの変換式は，古典の場合の Sasano による変換式と同一のように見えるが，ここでは変数 q_i, p_j と x_j, y_j は交換関係 $[q_i, p_j] = \delta_{i,j} h, [x_i, y_j] = \delta_{i,j} h \ (h \in \mathbb{C})$ を保つ量子正準変数，α_i はパラメータとする．

$$\begin{aligned}
r_1 : q_1 &= \frac{1}{x_1}, & p_1 &= -x_1^2 y_1 - x_1 x_2 y_2 - \alpha_1 x_1,\\
q_2 &= \frac{x_2}{x_1}, & p_2 &= x_1 y_2,\\
x_1 &= \frac{1}{q_1}, & y_1 &= -q_1^2 p_1 - q_1 q_2 p_2 - \alpha_1 q_1,\\
x_2 &= \frac{q_2}{q_1}, & y_2 &= q_1 p_2.
\end{aligned}\tag{2}$$

$$\begin{aligned}
r_2 : q_1 &= \frac{1}{x_1}, & p_1 &= -x_1^2 y_1 - x_1 x_2 y_2 - \alpha_2 x_1,\\
q_2 &= \frac{x_2}{x_1}, & p_2 &= x_1 y_2,\\
x_1 &= \frac{1}{q_1}, & y_1 &= -q_1^2 p_1 - q_1 q_2 p_2 - \alpha_2 q_1,\\
q_2 &= \frac{x_2}{x_1}, & p_2 &= x_1 y_2.
\end{aligned}\tag{3}$$

$$\begin{aligned}
r_3 : q_1 &= -x_1 y_1^2 + \alpha_3 y_1, & p_1 &= \frac{1}{y_1},\\
q_2 &= x_2, & p_2 &= y_2,\\
x_1 &= -q_1 p_1^2 + \alpha_3 p_1, & y_1 &= \frac{1}{p_1},\\
x_2 &= q_2, & y_2 &= p_2.
\end{aligned}\tag{4}$$

$$\begin{aligned}
r_4 : q_1 &= x_1, & p_1 &= y_1,\\
q_2 &= -x_2 y_2^2 + \alpha_4 y_2, & p_2 &= \frac{1}{y_2},\\
x_1 &= q_1, & y_1 &= p_1,\\
x_2 &= -q_2 p_2^2 + \alpha_4 p_2, & y_2 &= \frac{1}{p_2}.
\end{aligned}\tag{5}$$

$$\begin{aligned}
r_5 : q_1 &= -x_1 y_1^2 - x_2 y_1^2 + y_1^2 + \alpha_5 y_1 - x_2 + 1, & p_1 &= \frac{1}{y_1},\\
q_2 &= x_2, & p_2 &= \frac{1}{y_1} + y_2 - y_1,\\
x_1 &= -q_1 p_1^2 - q_2 p_1^2 + p_1^2 + \alpha_5 p_1 - q_2 + 1, & y_1 &= \frac{1}{p_1},\\
x_2 &= q_2, & y_2 &= \frac{1}{p_1} + p_2 - p_1.
\end{aligned}\tag{6}$$

$$r_6 : q_1 = -x_1 y_1^2 - \frac{t}{s} x_2 y_1^2 - \frac{t}{s} x_2 + t + t y_1^2 + \alpha_6 y_1, \qquad p_1 = \frac{1}{y_1},$$

$$q_2 = x_2, \qquad p_2 = \frac{t}{s}(\frac{1}{y_1} - y_1) + y_2,$$

$$x_1 = -q_1 p_1^2 - \frac{t}{s} q_2 p_1^2 - \frac{t}{s} q_2 + t + t p_1^2 + \alpha_6 p_1, \qquad y_1 = \frac{1}{p_1},$$

$$x_2 = q_2, \qquad y_2 = \frac{t}{s}(\frac{1}{p_1} - p_1) + p_2. \tag{7}$$

このとき，次が成り立つ．

Theorem 3.1 正準変換 (2)-(7) の下で，正則性を持つ多項式 *Hamiltonian* は一意に決まり，それは次の *Hamiltonian* である．

1. G(1,1,1,1,1) の場合

   The case of t - flow.

$$\begin{aligned}
H_1 = &\frac{1}{(-h+\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5+\alpha_6)t(t-1)(t-s)}((t-s)q_1^3p_1^2 + 2(t-s)q_1^2q_2p_1p_2 \\
&+ (t-s)q_1q_2^2p_2^2 - (t+1)(t-s)q_1^2p_1^2 + 2t(s-1)q_1q_2p_1p_2 - t(t-1)q_1q_2p_1^2 - s(t-1)q_1q_2p_2^2 \\
&- (h-\alpha_1-\alpha_2)(s-t)q_1(q_1p_1+q_2p_2) + t(t-s)q_1p_1^2 \\
&+ (h(t-s) - (\alpha_1+\alpha_2)(s-t) + \alpha_3 t(t-s) + \alpha_4 s(t-1) + \alpha_5(t^2-t-st+s))q_1p_1 \\
&+ \alpha_4 s(t-1)q_1p_2 + \alpha_3 t(t-1)q_2p_1 - \alpha_3 t(s-1)q_2p_2 \\
&- \alpha_1\alpha_2(s-t)q_1 - \alpha_3 t(s-t)p_1).
\end{aligned} \tag{8}$$

   The case of s - flow.

$$\begin{aligned}
H_2 = &\frac{1}{(-h+\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5+\alpha_6)s(s-1)(s-t)}((s-t)q_2^3p_2^2 - 2(s-t)q_1q_2^2p_1p_2 \\
&+ (s-t)q_1^2q_2p_1^2 - (s+1)(s-t)q_2^2p_2^2 + 2s(t-1)q_1q_2p_1p_2 - t(s-1)q_1q_2p_1^2 - s(s-1)q_1q_2p_2^2 \\
&- (h-\alpha_1-\alpha_2)(s-t)(q_1q_2p_1 + q_2^2p_2) + s(s-t)q_2p_2^2 - \alpha_4 s((t-1)q_1p_1 - (s-1)q_1p_2) \\
&- (h(t-s) + (\alpha_1+\alpha_2)(s-t) + \alpha_3 t(s-1) + \alpha_4 s(t-s) - \alpha_5(s^2-s-st+t))q_2p_2 \\
&+ \alpha_3 t(s-1)q_2p_1 + \alpha_1\alpha_2(s-t)q_2 - \alpha_4 s(s-t)p_2).
\end{aligned} \tag{9}$$

2. G(1,1,1,2) の場合

The case of t - flow.

$$H_1 = \frac{1}{(h+\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5)t^2}(q_1^3p_1^2 + 2q_1^2q_2p_1p_2 + q_1q_2^2p_2^2 - tq_1^2p_1^2 - sq_1q_2p_2^2 + (\alpha_3+\alpha_4-h)(q_1^2p_1+q_1q_2p_2) + (\eta+(2h+\alpha_1)t)q_1p_1 + \alpha_2sq_1p_2 + \eta tq_2p_1 + \eta(1-s)q_2p_2 + \alpha_3\alpha_4q_1 - \eta tp_1). \tag{10}$$

The case of s - flow.

$$H_2 = \frac{1}{(h+\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5)st(s-1)}(t(q_1^2q_2p_1^2 + q_2^3p_2^2 + 2q_1q_2^2p_1p_2) + s(s-1)q_1q_2p_2^2 - t(2sq_1q_2p_1p_2 + (s+1)q_2^2p_2^2) + (\alpha_3+\alpha_4-h)t(q_1q_2p_1+q_2^2p_2) + stq_2p_2^2 + \alpha_2stq_1p_1 + \alpha_2s(1-s)q_1p_2 + \eta t(1-s)q_2p_1 + (t(\alpha_1(s-1)+\alpha_2s-\alpha_3-\alpha_4+(2s-1)h) + \eta s(s-1))q_2p_2 + \alpha_3\alpha_4tq_2 - \alpha_2stp_2). \tag{11}$$

3. G(1,1,3) の場合

The case of t - flow.

$$H_1 = \frac{1}{(h-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3-\alpha_4)(t-s)}(q_1^2p_1p_2 + q_2^2p_1p_2 - 2q_1q_2p_1p_2 + (t-s)(q_1^2p_1 - 2q_1p_1^2 - 2q_2p_1p_2) + (2t^2-2st-\alpha_3)q_1p_1 + \alpha_2q_1p_2 + \alpha_3q_2p_1 - \alpha_2q_2p_2 + \alpha_2(t-s)q_1 + 2\alpha_1(t-s)p_1). \tag{12}$$

The case of s - flow.

$$H_2 = \frac{1}{(-h+\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4)(t-s)}(q_1^2p_1p_2 + q_2^2p_1p_2 - 2q_1q_2p_1p_2 - (t-s)(q_2^2p_2 - 2q_2p_2^2 - 2q_1p_1p_2) - \alpha_3q_1p_1 + \alpha_2q_1p_2 + \alpha_3q_2p_1 - (2st-2s^2+\alpha_2)q_2p_2 - \alpha_3(t-s)q_2 - 2\alpha_1(t-s)p_2). \tag{13}$$

4. G(1,2,2) の場合

The case of t - flow.

$$H_1 = \frac{1}{(2h+\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+2\alpha_4)t(t-s)}((t-s)q_1^2p_1^2 + 2tq_1q_2p_1p_2 - sq_1^2p_1p_2 - tq_2^2p_1p_2 + (s-t)q_1^2p_1 + ((\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)t - (\alpha_1+\alpha_2)s)q_1p_1 - \alpha_1sq_1p_2 - \alpha_3tq_2p_1 + \alpha_1tq_2p_2) - \alpha_1(t-s)q_1 + t(t-s)p_1). \tag{14}$$

The case of s - flow.

$$H_2 = \frac{1}{(2h+\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+2\alpha_4)t(t-s)}((t-s)q_2^2p_2^2 - 2sq_1q_2p_1p_2 + sq_1^2p_1p_2 + tq_1^2p_1p_2 + (s-t)q_2^2p_2 - \alpha_3sq_1p_1 + \alpha_1sq_1p_2 + \alpha_3tq_2p_1 + ((\alpha_2+\alpha_3)t - (\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)s)q_2p_2 - \alpha_3(t-s)q_2 + s(t-s)p_2). \tag{15}$$

5. G(1,4) の場合

The case of t - flow.

$$
\begin{aligned}
H_1 = \frac{1}{(2h+\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)(t-s)}&(-q_1^2p_1p_2 - q_2^2p_1p_2 + 2q_1q_2p_1p_2 + (s-t)q_1^2p_1 \\
&+ \alpha_2q_1p_1 - \alpha_1q_1p_2 - \alpha_2q_2p_1 + \alpha_1q_2p_2 + \frac{1}{2}(t-s)p_1(p_1-p_2) \\
&- \alpha_1(t-s)q_1 - \frac{1}{2}t(t-s)p_1).
\end{aligned} \tag{16}
$$

The case of s - flow.

$$
\begin{aligned}
H_2 = \frac{1}{(2h+\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)(t-s)}&(q_1^2p_1p_2 + q_2^2p_1p_2 - 2q_1q_2p_1p_2 + (s-t)q_2^2p_2 \\
&- \alpha_2q_1p_1 + \alpha_1q_1p_2 + \alpha_2q_2p_1 - \alpha_1q_2p_2 + \frac{1}{2}(t-s)(p_1p_2+p_2^2) \\
&- \alpha_2(t-s)q_2 - \frac{1}{2}s(t-s)p_2).
\end{aligned} \tag{17}
$$

Proof. Hamiltonian を一意に決定するための方法は数式処理ソフト Mathematica による具体的な計算によるものである．

その際，非可換変数 q_1, q_2, p_1, p_2 と x_1, x_2, y_1, y_2 に関して，$q = q_i, p = p_j$ の逆数について

$$pq^{-1} - q^{-1}p = hq^{-2}, p^{-1}q - qp^{-1} = hp^{-2}$$

のような公式を用いて計算を行っている．

このようにして得られた各 Hamiltonian (8)〜(17) を持つ Hamilton 系を **2 変数量子 Garnier 系**と呼ぶ．また各場合において，次が成り立つ．

Theorem 3.2 得られた *Hamiltonian* H_1, H_2 の *t-flow* と *s-flow* は可換（*Frobenius* 完全積分可能）である．

古典的に可換（ポアソン可換）な式から量子的に可換な式を得ることは一般には非自明である．今回は「正則性」という条件を課すことによってうまくいった．この結果は，正則性が「よい量子化」であることの一つの根拠となっている．

4 Conclusions

本稿では，正則性による 2 変数量子 Garnier 系の構築とその特徴付けについての報告を行った．得られた結果の拡張の方向としては次のようなものが考えられる．

- KZ 方程式との比較
  共形場理論の観点からは，KZ 方程式が量子 Garnier 系であると考えられている [6, 7]．それと今回の結果との比較することは興味深い．

- Sasano により構築された Sasano 系の量子化
  Sasano 系は Takano 理論を拡張し，正則性を持つ Hamiltonian 系として作られた方程式である [10, 13, 19]．特に，D_{n} 型の対称性を持つ方程式のシリーズは，Painlevé V, VI 型方程式の拡張となっている．

- 2 変数量子 Garnier 系を多変数の場合についての一般化
  古典の場合，n 変数 Garnier 系についての初期値空間の理論については Kimura によって構成されている．これをもとにして，一般の n 変数量子 Garnier 系の構築と正準変換の理論の量子版の構築を目指す．

謝辞

本研究にあたり，貴重なご助言と励ましをして下さった山田泰彦先生に心から感謝致します．

参考文献

[1] 木村弘信: 退化 Garnier 系の初期値空間について, 数理解析研究所講究録, (2000), 18-27.

[2] H. Kimura, The Degeneration of the Two Dimensional Garnier System and the Polynomial Hamiltonian Structure, Ann. Mat. Pura Appl., **155**(1989), 25-57.

[3] H. Kimura and K. Okamoto, On the polynomial Hamiltonian structure of the Garnier systems, J. Math. Pures Appl. **63** (1984), 129-146.

[4] T. Matano, A. Matsumiya, K. Takano, On some Hamiltonian structures of Painlevé systems II, J. Math. Soc. Japan, **51** (1999), 766-843.

[5] A. Matsumiya, On some Hamiltonian structures of Painlevé systems III, Kumamoto J. Math., **10** (1997), 45-73.

[6] H. Nagoya, Integral Formulas for Quantum Isomonodromic Systems , KYOTO UNIV, PUBLICATIONS RESEARCH INST MATHEMATICAL SCIENCES., **49** (4) (2013), 651-678.

[7] H. Nagoya, On quantum Painlevé systems , RIMS Kokyuroku Bessatsu, **B30** (2012), 209-221.

[8] M. Noumi, K. Takano and Y. Yamada, Bäcklund transformations and the manifolds of Painlevé systems, Funkcial. Ekvac., **45** (2002), 237-258.

[9] 岡本和夫: パンルヴェ方程式, 岩波書店, (2009).

[10] Y. Sasano, Higher order Painlevé equations of type $D_l^{(1)}$, RIMS Kokyuroku **1473** (2006), 143-163.

[11] Y. Sasano, Studies on the Garnier System in two variables, arXiv:0704.2869.

[12] Y. Sasano, Studies on the Garnier System in two variables II, arXiv:0706.0799.

[13] Y. Sasano and Y. Yamada, Symmetry and holomorphy of Painlevé type systems, RIMS Kokyuroku Bessatsu, **B2** (2007), 215-225.

[14] T. Shioda and K. Takano, On some Hamiltonian structures of Painlevé systems I, Funkcial. Ekvac., **40** (1997), 271-291.

[15] 鈴木正樹: 2 変数退化 Garnier 系の初期値空間について, 数理解析研究所講究録, (2001), 41-52.

[16] M. Suzuki, Space of initial conditions of Garnier system and its degenerate systems in two variables, J. Math. Soc. Japan., **58** (2006), 1079-1117.

[17] K. Takano, Defining manifolds for Painlevé equations, in *Toward the exact WKB analysis of differential equations, linear and nonlinear* (Eds. C. J. Howls, T. Kawai and Y. Takei), 261-269, Kyoto Univ. Press, Kyoto, 2000.

[18] Y. Ueno, Polynomial Hamiltonians for Quantum Painlevé Equations, Int. J. Math., **20** (2009), 1335-1445.

[19] 山田泰彦: Symmetries of generalized Painlevé systems, 表現論シンポジウム講演集, (2006), 64-70.