New Morphisms Between Étale Groupoids and Between Inverse Semigroup Actions

慶應義塾大学大学院理工学研究科基礎理工学専攻
内村 朝樹 (Tomoki UCHIMURA)

1　導入

作用素環論とは, 量子力学の厳密な数学的定式化のため, 1930 年代初頭に von Neumann が創始した関数解析の一分野である．作用素環とは, Hilbert 空間上の有界線形作用素たちのなす代数に然るべき位相を入れたものである．考える位相の違いに応じて, C^* 環と von Neumann 環の二種類が現れるが, 本稿では C^* 環を扱う．C^* 環論では, 非可換・無限次元の環が頻繁に登場するが, それらの扱いは一般に難しい．そこで, 比較的取り扱いの容易な数学的対象から C^* 環を構成し, C^* 環の性質を構成材料の性質を通して理解することがよくなされている．本稿で取り上げる亜群や逆半群は, C^* 環の構成材料として従来からよく研究されてきた対象である．

亜群や逆半群は, 群をそれぞれ異なる方向へ一般化したものである．逆半群 S から C^* 環 $C^*(S)$ を構成する方法は Duncan や Paterson らによって [DP85], 亜群 G から C^* 環 $C^*(G)$ を構成する方法は Renault によって研究された [Ren80]．また, Paterson は逆半群 S から亜群 $G_u(S)$ を構成し, それぞれから構成された C^* 環 $C^*(S)$ と $C^*(G_u(S))$ が同型であることを示した [Pat99]．逆半群から C^* 環の構成は, それぞれの間に適切な射を設定することで, 逆半群の圏 **IS** から C^* 環の圏 $\mathbf{C}^*_{\mathbf{alg}}$ への関手 C^* と見做すことができる．一方で, 亜群の間によく用いられる亜群準同型は, 一般には $*$ 準同型を誘導しない．そこで本稿では, $*$ 準同型を誘導するような新しい亜群の間の射 couple morphism を導入し, 亜群と couple morphism が圏をなすことを示す．この圏を **EG** と呼ぶ．本稿では他にも, 逆半群作用のなす圏 **ISA** を導入する．逆半群作用は亜群を構成する際によく用いられる材料であり, Paterson も逆半群 S から逆半群作用を経由して亜群 $G_u(S)$ を構成している．**ISA** や **EG** を導入することで, これまで主に対象の間の結びつきしか論じられてこなかった亜群, 逆半群, C^* 環に対して, 射の対応を与えることが可能となる．

2　準備

2.1　C^* 環

積と対合と呼ばれる演算を備えた複素線型空間を $*$ 代数 ($*$-algebra) と呼ぶ．$*$ 代数 A がさらに完備なノルムを備えており, 任意の $a, b \in A$ に対して $\|ab\| \leq \|a\|\|b\|$, $\|a^*a\| = \|a\|^2$ を満たすとき, A を C^* 環 (C^*-algebra) と呼ぶ．

例 2.1. 局所コンパクトハウスドルフ空間 X に対して, X 上の無限遠で消える複素数値連続関数全体のなす線形空間を $C_0(X)$ とする[*1]. 各点での積と複素共役によって積と対合を定め, ノルムを各 $f \in C_0(X)$ に対して $\|f\| := \sup_{x \in X} |f(x)|$ で定めると, $C_0(X)$ は可換な C^* 環になる.

例 2.2. 群 Γ に対して $\mathbb{C}(\Gamma)$ を, 有限個を除いた全ての $g \in \Gamma$ に対して $f(g) = 0$ を満たす Γ 上の複素関数 f 全体とする. $\mathbb{C}(\Gamma)$ は, 各点ごとの足し算・スララー倍で複素線型空間をなす. $\mathbb{C}(\Gamma)$ の積と対合を, 任意の $f_1, f_2, f \in \mathbb{C}(\Gamma)$, $g \in \Gamma$ に対して,

$$f_1 * f_2(g) := \sum_{g_1 g_2 = g} f_1(g_1) f_2(g_2), \qquad f^*(g) := \overline{f(g^{-1})}$$

で定めると, $\mathbb{C}(\Gamma)$ は $*$ 代数になる. $*$ 代数 $\mathbb{C}(\Gamma)$ を普遍ノルムと呼ばれるノルムで完備化したものを群 C^* 環 $C^*(\Gamma)$ と定義する.

C^* 環の間の積と対合を保つ写像を $*$ **準同型** ($*$-homomorphism) と呼ぶ. 本稿では, C^* 環と $*$ 準同型のなす圏を $\mathbf{C^*_{alg}}$ と書く.

例 2.3. 局所コンパクト空間 X, Y の間の写像として, 部分的に定義された連続写像 (partially defined continuous map), すなわち, X のある開集合 D_f 上で定義された連続写像 $f\colon X \supset D_f \to Y$ であって[*2], proper なものを考える[*3]. 任意の $f' \in C_0(Y)$ に対し, $\pi_f(f') := f' \circ f$ で定められる写像 $\pi_f\colon C_0(Y) \to C_0(X)$ は $*$ 準同型である[*4]. 例 2.1 の構成 $X \mapsto C_0(X)$ とこの構成 $f \mapsto \pi_f$ は, 局所コンパクトハウスドルフ空間と部分的に定義された proper な連続写像のなす圏 **LCHS** から $\mathbf{C^*_{alg}}$ への反変関手をなす[*5].

例 2.4. 群 Γ_1, Γ_2 の間の群準同型 θ に対して, $*$ 代数 $\mathbb{C}(\Gamma_1)$, $\mathbb{C}(\Gamma_2)$ の間の写像 σ_θ を任意の $f \in \mathbb{C}(\Gamma_1)$ と $h \in \Gamma_2$ に対して

$$\sigma_\theta(f)(h) := \sum_{\theta(g) = h} f(g) \tag{1}$$

と定義すると, この写像は $*$ 準同型である[*6]. この $*$ 準同型は, C^* 環 $C^*(\Gamma_1)$, $C^*(\Gamma_2)$ の間の $*$ 準同型に拡張できるが, 拡張された写像も同様に σ_θ と書く. 例 2.3 の構成 $\Gamma \mapsto C^*(\Gamma)$ とこの構成 $\theta \mapsto \sigma_\theta$ は, 群と群準同型のなす圏 **Gr** から $\mathbf{C^*_{alg}}$ への関手をなす.

[*1] X 上の連続関数 f が無限遠で消えるとは, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, $\{x \in X \mid |f(x)| \geq \varepsilon\}$ がコンパクトになることである. X がコンパクトであるとき, $C_0(X)$ は連続関数全体 $C(X)$ と一致する.

[*2] 本稿では $f\colon X \supset D_f \to Y$ も単に $f\colon X \to Y$ とだけ書く.

[*3] 連続写像が proper であるとは, 任意の終域のコンパクト部分集合の逆像がコンパクトであること.

[*4] 正確には, 写像 $f' \circ f$ は D_f 上でしか定義されないため, D_f 外では 0 をとることにして X 上の写像に拡張する.

[*5] ここで, 部分的に定義された写像 $f_1\colon X \supset D_1 \to Y$, $f_2\colon Y \supset D_2 \to Z$ の合成は, 開集合 $f_1^{-1}(D_2) \subset X$ 上で定義された $f_2 \circ f_1$ と定める. **LCHS** は, 点付きコンパクトハウスドルフ空間と, 点を保つ連続写像のなす圏と圏同型である.

[*6] $*$ 準同型 σ_θ は $\delta_g \in \mathbb{C}(\Gamma_1)$ を $\delta_{\theta(g)} \in \mathbb{C}(\Gamma_2)$ に送る. ここで, $\delta_g, \delta_{\theta(g)}$ は $\{g\} \subset \Gamma_1, \{\theta(g)\} \subset \Gamma_2$ 上の定義関数である.

2.2 逆半群とその C^* 環

逆半群 S (inverse semigroup) とは, 半群であって, 各元 $s \in S$ に対して, 一般化逆元 $s^* \in S$ が唯一存在し, $ss^*s = s$ と $s^*ss^* = s^*$ を満たすものである. 以下では, S の冪等元 (idempotent), すなわち $e^2 = e$ を満たす元全体を $E(S)$ と置く. 任意の $s \in S$ に対して, s^*s や ss^* は $E(S)$ の元である. $E(S)$ は S の可換な部分半群であり, 逆半群論において重要な役割を果たす.

例 2.5. 群は冪等元が単位元しかない逆半群である. 一般化逆元は通常の逆元と一致する.

例 2.6. 位相空間 X に対して, X の開集合の間の同相写像全体を $I(X)$ と書く[*7]. $I(X)$ の元に対して, 部分的に定義された写像同士の合成を積とすれば, $I(X)$ は逆半群をなす. ここで, $f^* = f^{-1}$ であり, 冪等元は各開集合上の恒等写像である.

逆半群の間の積を保つ写像を**半群準同型** (semigroup homomorphism) という. 半群準同型は自動的に一般化逆元を保つ. 逆半群 S に対して, 例 2.2 と同様の方法で C^* 環 $C^*(S)$ が定義される. また, 逆半群 S, T の間の半群準同型 θ に対して, C^* 環 $C^*(S), C^*(T)$ の間の $*$ 準同型 σ_θ が例 2.4 と同様に定義される. 逆半群と半群準同型のなす圏を $\mathbf{IS}$ とする. $\mathbf{IS}$ は $\mathbf{Gr}$ を充満部分圏として含む. 逆半群 S からの C^* 環 $C^*(S)$ の構成と, 半群準同型 $\theta\colon S \to T$ からの $*$ 準同型 $\sigma_\theta\colon C^*(S) \to C^*(T)$ の構成は, $\mathbf{IS}$ から $\mathbf{C^*_{alg}}$ への関手をなす. この関手を C^* と書く.

2.3 亜群とその C^* 環

位相亜群 (topological groupoid) とは, 位相空間 G, unit space と呼ばれる G の部分空間 $G^{(0)}$, domain map $d\colon G \to G^{(0)}$, range map $r\colon G \to G^{(0)}$, 積写像

$$G^{(2)} := \{(g', g) \in G \times G \mid d(g') = r(g)\} \ni (g', g) \mapsto g'g \in G.$$

の組であって,

(i) 任意の $u \in G^{(0)}$ に対して, $d(u) = u$, $r(u) = u$,
(ii) 任意の $g \in G$ に対して, $r(g)g = g = gd(g)$,
(iii) 任意の $(g', g) \in G^{(2)}$ に対して, $r(g'g) = r(g')$, $d(g'g) = d(g)$,
(iv) 任意の $(g'', g'), (g', g) \in G^{(2)}$ に対して, $g''(g'g) = (g''g')g$,
(v) 任意の $g \in G$ に対して逆元 $g^{-1} \in G$ が存在して $g^{-1}g = d(g)$, $gg^{-1} = r(g)$

が成り立ち, 積写像 $(g', g) \mapsto g'g$ と逆元を対応させる写像 $g \mapsto g^{-1}$ が連続であるものをいう. 位相亜群 G が**エタール** (étale) であるとは, 以下の 2 条件を満たすことをいう.

(i) unit space $G^{(0)} \subset G$ が局所コンパクトハウスドルフである.
(ii) source map $d\colon G \to G^{(0)}$ が局所同相である. すなわち, 任意の $g \in G$ に対して, ある g の開近傍 $V_g \subset G$ が存在し, $d|_{V_g}$ が $G^{(0)}$ の開集合への同相写像になる.

[*7] $I(X)$ の元を部分的な同相写像 (partial homeomorphism) と呼ぶ.

エタール性を課すことで, 任意の $u \in G^{(0)}$ に対して, $G_u := d^{-1}(\{u\})$ や $G^u := r^{-1}(\{u\})$ が離散集合になり, 亜群 G に対する C^* 環を定義する際に本質的ではない困難を避けることができる. 本稿ではエタール亜群を単に亜群という. 亜群の簡単な例として, 以下の 2 つがある.

例 2.7. 任意の離散群 Γ は unit space が単位元 e のみである亜群である.

例 2.8. 任意の局所コンパクトハウスドルフ空間 X は, unit space が全体の空間 X と一致する亜群である.

より複雑な例として, 離散群作用から構成される変換亜群がある.

例 2.9. 離散群作用 (Γ, X, α) に対して, 全体の空間を $\Gamma \times X$, unit space を $\{(e,x) \mid x \in X\} \simeq X$, domain map, range map をそれぞれ $d(g,x) = x$, $r(g,x) := \alpha_g x$ とし, $x' = \alpha_g x$ を満たす $(g',x'), (g,x) \in \Gamma \times X$ に対して積を $(g',x')(g,x) := (g'g, x)$ と定める. ここで, $\Gamma \times X$ に直積位相を入れると, $\Gamma \times X$ は亜群をなす. この亜群を**変換亜群** (transformation groupoid) といい, $\Gamma \ltimes_\alpha X$ と書く. 例 2.7 は離散群 Γ が自明な空間に作用している場合, 例 2.8 は自明群が空間 X に作用している場合の変換亜群と見做すことができる.

以下, 亜群 G から C^* 環を構成する. 任意の G のハウスドルフな開集合 U に対して, コンパクト台を持つ U 上の複素連続写像全体を $C_c(U)$ で表す[*8]. 各 $C_c(U)$ の元は, $G \setminus U$ 上では常に 0 をとることにすると G 上の関数と見做すことができ, $C_c(U)$ は G 上の関数全体のなす複素線型空間の部分空間と見做すことができる. 各ハウスドルフ開集合 U ごとに定まる全ての部分空間 $C_c(U)$ が張る部分空間を $S(G)$ とする[*9]. $S(G)$ は任意の $f_1, f_2, f \in S(G)$ と $g \in G$ に対して積と対合を

$$f_1 * f_2(g) := \sum_{\substack{(g_1,g_2) \in G^{(2)} \\ g_1 g_2 = g}} f_1(g_1) f_2(g_2), \quad f^*(g) := \overline{f(g^{-1})}$$

と定めることで $*$ 代数をなす. この $*$ 代数を普遍ノルムと呼ばれるノルムで完備化したものを亜群 C^* 環 $C^*(G)$ と呼ぶ. 離散群 Γ に対する亜群 C^* 環は, 例 2.2 で挙げた群 C^* 環 $C^*(\Gamma)$ に一致する. また, 局所コンパクトハウスドルフ空間 X に対する亜群 C^* 環は, 例 2.1 で挙げた C^* 環 $C_0(X)$ に一致する.

亜群 G, H の間の連続写像 φ で, 任意の $(g_1, g_2) \in G^{(2)}$ に対して $(\varphi(g_1), \varphi(g_2)) \in H^{(2)}$ かつ $\varphi(g_1 g_2) = \varphi(g_1)\varphi(g_2)$ を満たすものを**亜群準同型** (groupoid homomorphism) という. 亜群準同型からは, 一般に $*$ 準同型が構成できないことが知られている. というのも, 亜群準同型は以下の相反する 2 つの例を含むからである.

例 2.10. 群 Γ_1, Γ_2 の間の亜群準同型は, 単なる群準同型である. 群準同型 $\theta\colon \Gamma_1 \to \Gamma_2$ からは, 例 2.4 によって, 同変的に $*$ 準同型 $\sigma_\theta\colon C^*(\Gamma_1) \to C^*(\Gamma_2)$ が構成される.

例 2.11. コンパクト空間 X_1, X_2 の間の亜群準同型は, 単なる連続写像である. 連続写像 $f\colon X_1 \to$

[*8] U の複素連続写像 f がコンパクト台を持つとは, ある U のコンパクト部分集合 K が存在して, 任意の $x \in U \setminus K$ に対して $f(x) = 0$ を満たすことである.

[*9] G が局所コンパクトハウスドルフであるとき, $S(G)$ は $C_c(G)$ と一致する.

X_2 からは, 例 2.3 のようにして, 反変的に $*$ 準同型 $\pi_f\colon C(X_2) \to C(X_1)$ が構成される.

本稿で提案する亜群の間の新しい射 couple morphism は, これらの例をどちらも含み, かつそれぞれの $*$ 準同型の構成のどちらとも整合的に $*$ 準同型を誘導する.

2.4 逆半群から亜群へ

Paterson は逆半群から亜群を構成する際に, 逆半群作用を経由した. **逆半群作用** (inverse semigroup action) とは, 逆半群 S, 局所コンパクトハウスドルフ空間 X, 半群準同型 $\alpha\colon S \to I(X)$ の組である. 部分的な同相写像 α_s の定義域を D_s と書く. X の部分集合 V が α に関して**不変** (invariant) であるとは, 任意の $s \in S$ に対して $\alpha_s(D_s \cap V) \subset V$ が成り立つことをいう.

逆半群 S から次のようにして逆半群作用が得られる. 冪等元全体のなす部分半群 $E(S)$ から, $\{0,1\}$ に通常の積を入れた逆半群への 0 でない半群準同型全体を $\widehat{E(S)}$ と書く. $\widehat{E(S)}$ は $\{0,1\}^{E(S)}$ の部分空間として相対位相を入れると局所コンパクト空間になる. 各 $s \in S$ に対して, β_s^S を開集合

$$U_s := \left\{\zeta \in \widehat{E(S)} \;\middle|\; \zeta(s^*s) = 1\right\}, \qquad U'_s := \left\{\zeta \in \widehat{E(S)} \;\middle|\; \zeta(ss^*) = 1\right\}$$

の間で, $\beta_s^S\zeta(e)\colon = \zeta(s^*es)$ によって定義された同相写像とすると, $\beta^S\colon S \to I\big(\widehat{E(S)}\big); s \mapsto \beta_s^S$ は S の $\widehat{E(S)}$ への作用である. この作用を逆半群 S の *spectral action* と呼ぶ. 混乱の恐れがなければ, β^S は単に β とだけ書く.

逆半群作用 (S, X, α) からは次のように亜群が構成される. 逆半群作用 (S, X, α) に対して, 集合 $S \ltimes_\alpha X$ を

$$S \ltimes_\alpha X := \{(s,x) \in S \times X \mid x \in D_s\}/\sim$$

とする. ここで, $S \times X$ 上の同値関係 $\sim$ を, 任意の $(s,x), (t,y) \in S \times X$ に対して

$$(s,x) \sim (t,y) :\Longleftrightarrow\ x = y\ \text{かつある}\ e \in E(S)\ \text{が存在して}\ x \in D_e,\ se = te$$

と定義し, (s,x) の同値類を $[s,x]$ と書く. $S \ltimes_\alpha X$ の unit space を $\{[s^*s, x] \mid s \in S, x \in D_s\}$ とする[*10]. 更に, domain map, range map, 積写像を例 2.9 と同様に定める. 任意の $s \in S$ と開集合 $U \subset D_s$ に対し, $[s,U] := \{[s,x] \mid x \in U\}$ と定めると, 部分集合族 $\{[s,U] \mid s \in S, U \subset D_s\}$ は開基をなす. これらの構造によって $S \ltimes_\alpha X$ は亜群をなす. この亜群を, 群作用のときと同様に逆半群作用 (S, X, α) の**変換亜群** (transformation groupoid) と呼ぶ.

逆半群 S の spectral action $\big(S, \widehat{E(S)}, \beta\big)$ に対し, その変換亜群 $S \ltimes_\beta \widehat{E(S)}$ を S の**普遍亜群** (universal groupoid) と呼び, $G_u(S)$ と書く.

定理 2.12 ([Pat99, Theorem 4.4.1])**.** 逆半群 S に対して, 逆半群 C^* 環 $C^*(S)$ と, その普遍亜群の C^* 環 $C^*(G_u(S))$ は同型.

略証. $*$ 準同型 $\iota_S\colon C^*(S) \to C^*(G_u(S)); \delta_s \mapsto \delta_{[s,U_s]}$ が同型写像である. ここで U_s は, $s \in S$ の spectral action β_s の定義域であり, 開コンパクト集合である. また, $\delta_s, \delta_{[s,U_s]}$ はそれぞれ $\{s\} \subset S, [s, U_s] \subset G_u(S)$ の定義関数である. □

[*10] 任意の s に対して同値類 $[s^*s, x]$ は一致するため, unit space は写像 $[s^*s, x] \mapsto x$ を通して X の開集合 $\bigcup_{s \in S} D_s$ と同一視される

3　圏 ISA, EG の導入と関手 SP, TG, C^* の構成

本節では, 逆半群作用の間の射 (action morphism) と, 亜群の間の新しい射 (couple morphism) を導入する. これらはいずれも, 群の間の射と空間の間の射を組にしたような概念である.

定義 3.1. 2 つの逆半群作用 $(S, X, \alpha), (T, Y, \beta)$ に対して, (S, X, α) から (T, Y, β) への *action morphism* (θ, ξ) とは, 半群準同型 $\theta\colon S \to T$ と, Y の開集合 D_ξ 上で定義された X への proper な連続写像 ξ の組である. ここで, ξ の定義域 D_ξ は β に関して不変であること, 任意の $s \in S, y \in D_\xi$ に対して, $D_{\theta(s)} = \xi^{-1}(D_s)$, $\xi\left(\beta_{\theta(s)}(y)\right) = \alpha_s(\xi(y))$ が成り立つことを課す.

命題 3.2. 2 つの action morphism $(\theta_i, \xi_i)\colon (S_i, X_i, \alpha_i) \to (S_{i+1}, X_{i+1}, \alpha_{i+1})$ $(i = 1, 2)$ に対して, それぞれの合成の組 $(\theta_2 \circ \theta_1, \xi_1 \circ \xi_2)$ は (S_1, X_1, α_1) から (S_3, X_3, α_3) への action morphism である. これを合成と定めることにより, 逆半群作用と action morphsim は圏をなす. この圏を **ISA** と書く.

この圏の導入により, spectral action の構成を **IS** から **ISA** への関手と見做すことができる.

定理 3.3. 半群準同型 $\theta\colon S \to T$ に対して $\widehat{\theta}$ を, $\widehat{E(T)}$ の開集合 $D_{\widehat{\theta}} := \left\{\xi \in \widehat{E(T)} \,\middle|\, \xi\circ\theta \text{が } 0 \text{ でない}\right\}$ の上で, 任意の $\xi \in \widehat{E(T)}$ に対して $\widehat{\theta}(\xi) := \xi \circ \theta$ と定義された写像とする. このとき, $\left(\theta, \widehat{\theta}\right)$ は action morphism である. この構成 $\theta \mapsto \left(\theta, \widehat{\theta}\right)$ は合成を保つため, 逆半群から spectral action の構成 $S \mapsto \left(S, \widehat{E(S)}, \beta\right)$ と, 半群準同型から action morphism の構成 $\theta \mapsto \left(\theta, \widehat{\theta}\right)$ は **IS** から **ISA** への関手をなす. この関手を SP と書く.

一方, 亜群の間の新しい射として, couple morphism を導入する.

定義 3.4. 亜群 G, H の間の couple morphism とは, ある亜群 K と, 2 つの亜群準同型 $\varphi\colon K \to G$, $\psi\colon K \to H$ の組 $(\varphi, \psi; K)$ であって, 以下を満たすものをいう.

(i) 亜群準同型 $\varphi\colon K \to G$ は, φ の unit space への制限 $\varphi^{(0)}\colon K^{(0)} \to G^{(0)}$ が proper であって, 任意の $u \in K^{(0)}$ に対して, φ の制限 $\varphi_u\colon K_u \to G_u$ が全単射である.

(ii) 亜群準同型 $\psi\colon K \to H$ は, ψ の unit space への制限 $\psi^{(0)}\colon K^{(0)} \to H^{(0)}$ が $H^{(0)}$ の開集合への同相写像である.

上の定義における条件 (i) を満たす亜群準同型を type (S), 条件 (ii) を満たすものを type (G) と呼ぶ. G から H への 2 つの couple morphism $(\varphi_j, \psi_j; K_j)$ $(j = 1, 2)$ は, K_1 と K_2 の間に全単射亜群準同型 ι が存在して, 以下の図式を可換にするとき, 同一視する.

$$\begin{tikzcd} & K_1 \arrow[dl, "\varphi_1"'] \arrow[dr, "\psi_1"] \arrow[dd, "\iota"] & \\ G & & H \\ & K_2 \arrow[ul, "\varphi_2"] \arrow[ur, "\psi_2"'] & \end{tikzcd}$$

また, $(\varphi, \psi; K)$ の同値類を $[\varphi, \psi; K]$, あるいは亜群 K を省略して $[\varphi, \psi]$ と書く.

例 3.5. 群の間の群準同型は type (G) を満たす亜群準同型であるため, 群準同型 $\theta\colon \Gamma_1 \to \Gamma_2$ は, couple morphism $\Gamma_1 \xleftarrow{\mathrm{id}} \Gamma_1 \xrightarrow{\theta} \Gamma_2$ と見做すことができる.

例 3.6. 局所コンパクトハウスドルフ空間の間の proper な連続写像は type(S) を満たす亜群準同型であるため, **LCHS** の射 $f\colon X_1 \supset D_f \to X_2$ は, couple morphism $X_2 \xleftarrow{f} D_f \xhookrightarrow{\iota} X_1$ と見做すことができる.

例 3.7. Buneci と Stachura は, エタールより広いクラスの位相亜群の間に algebraic morphism を導入した [BS05]. エタール亜群の間の彼らの射は, couple morphism $[\varphi, \psi; K]$ で, ψ の unit space への制限 $\psi^{(0)}$ が unit space 間の同相写像になっているものと一対一対応する. 定理 3.10 で couple morphism から $*$ 準同型を構成するが, この構成は algebraic morphism から $*$ 準同型を構成する方法と整合的である.

2 つの couple morphism $[\varphi_i, \psi_i; K_i]\colon G_i \to G_{i+1}$ $(i = 1, 2)$ に対して, 新たな亜群を次のように定める. 集合 $K_1 \times_H K_2$ を

$$K_1 \times_H K_2 := \big\{(k_1, k_2) \in K_1 \times K_2 \bigm| \psi_1(k_1) = \varphi_2(k_2)\big\}$$

とし, unit space を $K_1^{(0)} \times K_2^{(0)}$, domain map, range map, 積写像は各成分ごとに K_1, K_2 の構造をそのまま用いて定義する. ここに直積位相を入れると, $K_1 \times_H K_2$ は亜群になる. 更に, $\widetilde{\varphi_2}$, $\widetilde{\psi_1}$ を各成分の射影とする[*11].

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & & K_1 \times_H K_2 \arrow[dl, "\widetilde{\varphi_2}"'] \arrow[dr, "\widetilde{\psi_1}"] & & \\ & K_1 \arrow[dl, "\varphi_1"] \arrow[dr, "\psi_1"'] & & K_2 \arrow[dl, "\varphi_2"] \arrow[dr, "\psi_2"'] & \\ G_1 & & G_2 & & G_3 \end{tikzcd}$$

命題 3.8. 2 つの couple morphism $[\varphi_i, \psi_i; K_i]\colon G_i \to G_{i+1}$ $(i = 1, 2)$ に対して, $\widetilde{\varphi_2}$, $\widetilde{\psi_1}$ はそれぞれ type(S), type(G) であり, $\big[\varphi_1 \circ \widetilde{\varphi_2}, \psi_2 \circ \widetilde{\psi_1}; K_1 \times_H K_2\big]$ は couple morphism となる. これを合成と定めることで, 亜群と couple morphism は圏をなす. この圏を **EG** と呼ぶ.

群のなす圏 **Gr** は同変的に, 局所コンパクトハウスドルフ空間のなす圏 **LCHS** は反変的に **EG** に含まれる. 以下では **ISA** から **EG** への関手 TG と, **EG** から $\mathbf{C^*_{alg}}$ への関手 C^* を構成する.

定理 3.9. 2 つの逆半群作用 $(S, X, \alpha), (T, Y\beta)$ の間の action morphism (θ, ξ) に対して, 逆半群作用 $(S, D_\xi, \beta\theta)$ の変換亜群 $S \ltimes_{\beta\theta} D_\xi$ を考える. ここで $\beta\theta$ とは, 任意の $s \in S$ に対して $\beta\theta_s := \beta_{\theta(s)}$ で定義される作用である. 2 つの亜群準同型を

$$\begin{aligned} \varphi_\xi &\colon S \ltimes_{\beta\theta} D_\xi \to S \ltimes_\alpha X; [s, y] \mapsto [s, \xi(y)] \\ \psi_\theta &\colon S \ltimes_{\beta\theta} D_\xi \to T \ltimes_\beta Y; [s, y] \mapsto [\theta(s), y] \end{aligned}$$

で定めると, φ_ξ, ψ_θ はそれぞれ type(S), type(G) であり, $\big[\varphi_\xi, \psi_\theta; S \ltimes_{\beta\theta} D_\xi\big]$ は couple morphism である. この構成は合成を保つため, 逆半群作用から変換亜群の構成 $(S, X, \alpha) \mapsto S \ltimes_\alpha X$ と, action

[*11] この亜群 $K_1 \times_H K_2$ と 2 つの亜群準同型 $\widetilde{\varphi_2}$, $\widetilde{\psi_1}$ は, 亜群と亜群準同型のなす圏における, 図式 $\psi_1\colon K_1 \to H \leftarrow K_2\colon \varphi_2$ の引き戻し (pull back) に他ならない.

morphism から couple morphism の構成 $(\theta,\xi)\mapsto[\varphi_\xi,\psi_\theta]$ は **ISA** から **EG** への関手をなす．この関手を TG と書く．

定理 3.10. 2 つの亜群 G,H の間の couple morphism $[\varphi,\psi;K]$ に対して，2 つの $*$ 準同型 $\sigma_\varphi\colon S(G)\to S(K)$, $\pi_\psi\colon S(K)\to S(H)$ を次のように定める．σ_φ は，任意の $f\in S(G)$ に対して，

$$\sigma_\varphi(f):=f\circ\varphi$$

と定める．π_ψ は任意の $f\in S(K)$ と $h\in H$ に対して，

$$\pi_\psi(f)(h):=\sum_{\psi(k)=h}f(k)$$

と定める．これらは C^* 環の間の $*$ 準同型に拡張される．これにより，couple morphism $[\varphi,\psi]$ から，これらを合成した $*$ 準同型 $\pi_\psi\circ\sigma_\theta$ が誘導される．この構成は well-defined である．また，この構成は合成を保つため，亜群から C^* 環の構成 $G\mapsto C^*(G)$ と，couple morphism から $*$ 準同型の構成 $[\varphi,\psi]\mapsto\pi_\psi\circ\sigma_\theta$ は **EG** から $\mathbf{C^*_{alg}}$ への関手をなす．この関手を C^* と書く．

上の定理における 2 つの構成 $\varphi\mapsto\sigma_\varphi$, $\psi\mapsto\pi_\psi$ は，それぞれ例 2.3, 例 2.4 の構成と対応している．

4　圏論的視点による先行研究の拡張

ここまでで我々は 2 つの圏 **ISA**, **EG** と 3 つの関手 SP, TG, C^* を導入した．

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{IS} \arrow[rr, "C^*"] \arrow[dr, "\mathrm{SP}"'] & & \mathbf{C^*_{alg}} \\
& \mathbf{ISA} \arrow[r, "\mathrm{TG}"] & \mathbf{EG} \arrow[u, "C^*"']
\end{tikzcd}$$

逆半群 S に対して，既存の関手 $C^*\colon\mathbf{IS}\to\mathbf{C^*_{alg}}$ は C^* 環 $C^*(S)$ を構成するが，新たに構成した 3 つの関手 SP, TG, C^* の合成は C^* 環 $C^*(G_u(S))$ を構成する．Paterson はこれらが同型であることを示したが，以下の定理は更にその同型写像が自然であることを主張する．

定理 4.1. 既存の関手 $C^*\colon\mathbf{IS}\to\mathbf{C^*_{alg}}$ と 3 つの関手 SP, TG, C^* の合成は自然同型である．

証明．以下の図式が可換であることを示せばよい．

$$\begin{array}{ccc}
C^*(S) & \xrightarrow{\iota_S} & C^*\left(S\ltimes\widehat{E(S)}\right) \\
{\scriptstyle\sigma_\theta}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle\pi_{\psi_\theta}\circ\sigma_{\varphi_{\widehat{\theta}}}} \\
C^*(T) & \xrightarrow{\iota_T} & C^*\left(T\ltimes\widehat{E(T)}\right),
\end{array}$$

任意の $s\in S$ に対して

$$\pi_{\psi_\theta}\circ\sigma_{\varphi_{\widehat{\theta}}}\left(\delta_{[s,U_s]}\right)=\pi_{\psi_\theta}\left(\delta_{\left[s,U_{\theta(s)}\right]}\right)=\delta_{\left[\theta(s),U_{\theta(s)}\right]}$$

が成り立つことより従う． □

さらに, 関手 TG には随伴関手が構成できる. Exel は亜群 G に対して, slice action と呼ばれる逆半群作用を次のように構成した [Exe08]. 亜群 G の開集合 U で, domain map, range map d, r の U への制限 $d|_U, r|_U$ が同相写像となるものを *slice* と呼ぶ. 亜群 G 上の slice 全体を $\operatorname{Bis} G$ とすると, $\operatorname{Bis} G$ は

$$UV := \{uv \in G \mid u \in U, v \in V, (u,v) \in G^{(2)}\}$$

で逆半群をなす. 各 slice U に対して, $d(U)$ から $r(U)$ への同相写像 γ^G_U を $r|_U^{-1} d|_U$ で定めると, $\gamma^G \colon U \mapsto \gamma^G_U$ は $\operatorname{Bis} G$ の $G^{(0)}$ 上の作用である. 亜群 G から逆半群作用 γ^G の構成は, **EG** から **ISA** への対象間の対応を定めるものであるが, 以下のように射の間の対応も定めることができる.

定理 4.2. 2 つの亜群 G, H の間の couple morphism $[\varphi, \psi; K]$ に対して, 半群準同型

$$\operatorname{Bis} G \to \operatorname{Bis} K; U \mapsto \varphi^{-1}(U), \qquad \operatorname{Bis} K \to \operatorname{Bis} H; V \mapsto \psi(V)$$

を改めて φ^{-1}, ψ と書く. このとき $\left(\psi \circ \varphi^{-1}, \varphi^{(0)} \circ \left(\psi^{(0)}\right)^{-1}\right)$ は slice action の間の action morphism になる. ここで, $\left(\psi^{(0)}\right)^{-1}$ は, $\psi^{(0)}$ の像の上でのみ定義された写像である. また, この構成は合成を保つため, 亜群から逆半群作用の構成 $G \mapsto \gamma^G$ と, couple morphism から action morphism の構成 $[\varphi, \psi] \mapsto \left(\psi \circ \varphi^{-1}, \varphi^{(0)} \circ \left(\psi^{(0)}\right)^{-1}\right)$ は **EG** から **ISA** の関手をなす. この関手を SA と書く.

定理 4.3. 関手 SA は関手 TG の右随伴である.

これに加えて, 定理 3.3 で構成した関手 SP に対しては, 忘却関手 U がその右随伴である. 特に, SA と U の合成は SP と TG の合成の右随伴であるが, この結果は Buss, Exel, Meyer らの結果 [BEM12, Theorem 4.11] を一般化するものである.

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{IS} \arrow[r, bend left, "\mathrm{SP}"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathbf{ISA} \arrow[l, bend left, "U"] \arrow[r, bend left, "\mathrm{TG}"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathbf{EG} \arrow[l, bend left, "\mathrm{SA}"]
\end{tikzcd}$$

参考文献

[BEM12] A. Buss, R. Exel, and R. Meyer. Inverse semigroup actions as groupoid actions. *Semigroup Forum*, 85(2):227–243, 2012.

[BS05] M. R. Buneci and P. Stachura. Morphisms of locally compact groupoids endowed with Haar systems. Available at `https://doi.org/10.48550/arXiv.math/0511613`, 2005.

[DP85] J. Duncan and A. L. T. Paterson. C^*-algebras of inverse semigroups. *Proc. Edinburgh Math. Soc. (2)*, 28(1):41–58, 1985.

[Exe08] R. Exel. Inverse semigroups and combinatorial C^*-algebras. *Bull. Braz. Math. Soc. (N.S.)*, 39(2):191–313, 2008.

[Pat99] A. L. T. Paterson. *Groupoids, inverse semigroups, and their operator algebras*, volume 170 of *Progress in Mathematics*. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1999.

[Ren80] J. Renault. *A groupoid approach to C^*-algebras*, volume 793 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer, Berlin, 1980.