最大公約数を含むオイラー関数の和公式について

鶴田 侑己 Yuki Tsuruta

山口大学大学院創成科学研究科基盤科学系専攻数理科学コース

概要

正整数 $n_1, \cdots, n_k$ に対して, $\gcd(n_1, \cdots, n_k)$ を $n_1, \cdots, n_k$ の最大公約数とする. Euler 関数 ϕ を $\mathrm{id} * \mu$ によって定義する. 但し, μ を Möbius 関数とする. 本研究では, 任意に十分大きな実数 $x > 3$ と 任意に固定された整数 $k(\geq 2)$ に対して,

$$\sum_{n_1 \cdots n_k \leq x} \phi(\gcd(n_1, \ldots, n_k))$$

の漸近公式を求めたので報告する. [*1]

1　導入

f と g を自然数で定義された実数値関数とする (数論的関数という). そのとき, 任意の正整数 n に対して, Dirichlet convolution を $(f * g)(n) := \sum_{dk=n} f(d)g(k)$ によって定義する. その際に用いられる関数を紹介しておく. 任意の正整数に対して, 恒等関数 id を $\mathrm{id}(n) = n$, $\mathbf{1}$ を $\mathbf{1}(n) = 1$, Möbius 函数 μ を

$$\mu(n) := \begin{cases} 1 & n = 1 \text{ のとき}, \\ (-1)^k & n = p_1 p_2 \cdots p_k \text{ のとき}, \\ 0 & \text{その他}, \end{cases}$$

Euler 関数 ϕ を $\phi(n) = (\mathrm{id} * \mu)(n)$ によって定義する. さらに, Riemann ゼータ関数 ζ を $\mathrm{Re}\, s > 1$ に対して,

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

と定義し, この関数の s による微分 ζ' と ζ'' をそれぞれ 第 1 次導関数, 第 2 次導関数を表す. すなわち

$$\zeta'(s) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^s}, \qquad \zeta''(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\log n)^2}{n^s}.$$

$\gcd(k, j)$ を正の整数 k と j の最大公約数とする. 1885 年に, Casáro [1] は最大公約数の和関数を導入し, 任意の数論的関数 f に対して, 以下の公式を得た.

$$\sum_{j=1}^{k} f(\gcd(k, j)) = (f * \phi)(k).$$

[*1] 本研究は, 山口大学の木内功氏との共同研究です.

正整数 $k \geq 2$ を固定し, 正整数 $n_1, n_2, \dots, n_k$ の最大公約数を $\gcd(n_1, n_2, \cdots, n_k)$ と定義し, 約数関数 τ_k を $\underbrace{\mathbf{1} * \mathbf{1} * \cdots * \mathbf{1}}_{k \text{ 個}}$ によって定義する. この関数を Piltz の約数関数という. 任意に十分大きな実数 $x > 3$ に対して, $f(\gcd(n_1, n_2, \cdots, n_k))$ の総和を $S_{f,k}$ によって定義する. すなわち

$$S_{f,k} := \sum_{n_1 n_2 \dots n_k \leq x} f(\gcd(n_1, n_2, \cdots, n_k)). \tag{1.1}$$

2012 年に Krätzel, Nowak, Tóth [3] は, (1.1) を次ように置き換えて様々な公式を導いている:

$$S_{f,k}(x) = \sum_{n \leq x} g_{f,k}(n).$$

但し,

$$g_{f,k}(n) := \sum_{n = m^k l} (\mu * f)(m) \tau_k(l). \tag{1.2}$$

例えば, $f = \mathrm{id}$ のとき, (1.1) の精密な漸近公式を示している. このとき, (1.2) を生成関数とする Dirichlet 級数は, $\mathrm{Re}\ s > 1$ に対して,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{g_{\mathrm{id},k}(n)}{n^s} = \frac{\zeta^k(s)\zeta(ks-1)}{\zeta(ks)}$$

と書くことができ, 解析的な手法と指数和の理論などを駆使することで以下の公式を, Krätzel, Nowak, Tóth [3] によって示された：

$$\sum_{ab \leq x} \gcd(a, b) = P_2(\log x)x + O\left(x^{\theta}(\log x)^{\theta'}\right)$$

但し, $\frac{1}{2} < \theta < 1$ と θ' は実数である. 複素積分を利用することで, $\theta = \frac{2}{3}$ を, 指数和と fractional part sums を利用することで, $\theta = \frac{925}{1392}$ を得ている. ここで, P_2 は

$$P_2(\log x) := \operatorname*{Res}_{s=1} \frac{\zeta^2(s)\zeta(2s-1)}{\zeta(2s)} \frac{x^{s-1}}{s}$$

を満たす 2 次多項式である. また, $k = 3$ のときも同様に以下の公式を導いている:

$$\sum_{abc \leq x} \gcd(a, b, c) = M_3(x) + O(x^{\frac{1}{2}}(\log x)^5)$$

ここで, $M_3(x)$ は主要項を表す. すなわち,

$$\begin{aligned} M_3(x) &= \sum_{s_0 = 1, \frac{2}{3}} \operatorname*{Res}_{s = s_0} \left(\frac{\zeta^3(s)\zeta(3s-1)}{\zeta(3s)} \frac{x^s}{s} \right) \\ &= x(0.6842... \log^2 x - 0.6620... \log x + 4.845...) - 4.4569... x^{\frac{2}{3}}. \end{aligned}$$

2　ϕ を含む総和公式

本研究の目的は, (1.1) において $f = \phi$, かつ $k = 2, 3, 4, 5$ の場合の総和公式を考察することにある. そのとため, Dirichlet 級数 (1.2) を次のように表現する. すなわち

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{g_{\phi,k}(n)}{n^s} = \frac{\zeta^k(s)\zeta(ks-1)}{\zeta^2(ks)} \qquad (\mathrm{Re}\ s > 1). \tag{2.1}$$

最初に, $k = 2$ のときは, 小数部分和 (fractional part sums) と指数和を組み合わせることで 以下の漸近公式を得ることができる:

定理 2.1 任意に十分大きな実数 $x > 3$ に対して,

$$\begin{aligned}\sum_{ab \le x} \phi(\gcd(a,b)) &= \frac{1}{4\zeta^2(2)} x \log^2 x + \frac{1}{\zeta^2(2)} \left(2\gamma - \frac{1}{2} - 2\frac{\zeta^{'}(2)}{\zeta(2)} \right) x \log x \\ &+ \frac{1}{2\zeta^2(2)} \left(5\gamma^2 + 6\gamma_1 - 4\gamma + 1 - 4(4\gamma-1)\frac{\zeta^{'}(2)}{\zeta(2)} - 4\frac{\zeta^{''}(2)}{\zeta(2)} + 12\left(\frac{\zeta^{'}(2)}{\zeta(2)}\right)^2 \right) x \\ &+ O\left(x^{\frac{37}{56}+\varepsilon}\right)\end{aligned} \tag{2.2}$$

が成り立つ. 但し, γ と γ_1 はそれぞれ, Euler 定数 と Stieltjes 定数を表す.

注意 2.1 $\frac{37}{56} = \frac{1}{2} + \frac{9}{56} < \frac{925}{1392} = \frac{1}{2} + \frac{229}{1392} < \frac{2}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6}$ に注意する.

今, 数論的関数 h を生成関数とする Dirichlet 級数 $F_h(s)$ を

$$F_h(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h(n)}{n^s} = \zeta^2(s)\zeta(2s-1)\zeta^M(2s) \qquad (\mathrm{Re}\ s > 1)$$

によって定義する. 但し, M を任意の整数とおく. 2013 年に Kühleitner–Nowak [4] は, h の総和公式を求めることで誤差項のオメガ結果を求めた. この関係を (2.2) の誤差項の評価に関するオメガ結果に適用すると

$$\Omega\left(x^{\frac{1}{2}} \frac{\log^2 x}{\log\log x} \right)$$

が示される. これらのことから次のことが予想される.

予想 2.1 (2.2) の誤差項のオーダー評価は, ある正数 A が存在して

$$O\left(x^{\frac{1}{2}} (\log x)^A \right).$$

次に, $k = 3$ のときは, (2.1) と複素関数論の理論を用いることで, 以下の漸近公式が示せる.

定理 2.2 任意に十分大きな実数 $x > 3$ に対して,

$$\sum_{abc \le x} \phi(\gcd(a,b,c)) = \frac{\zeta(2)}{2\zeta^2(3)} x \log^2 x$$
$$+ \frac{\zeta(2)}{\zeta^2(3)} \left(3\gamma - 1 + 3\frac{\zeta^{'}(2)}{\zeta(2)} - 6\frac{\zeta^{'}(3)}{\zeta(3)} \right) x \log x$$
$$+ \frac{\zeta(2)}{\zeta^2(3)} \left(3\gamma^2 + 3\gamma_1 - 3\gamma + 1 + 3(3\gamma - 1)\frac{\zeta^{'}(2)}{\zeta(2)} - 6(3\gamma - 1)\frac{\zeta^{'}(3)}{\zeta(3)} \right) x$$
$$+ \frac{\zeta(2)}{\zeta^2(3)} \left(27 \left(\frac{\zeta^{'}(3)}{\zeta(3)} \right)^2 + \frac{9}{2}\frac{\zeta^{''}(2)}{\zeta(2)} - 9\frac{\zeta^{''}(3)}{\zeta(3)} - 18\frac{\zeta^{'}(2)}{\zeta(2)}\frac{\zeta^{'}(3)}{\zeta(3)} \right) x$$
$$+ O\left(x^{\frac{1}{2}} \log^5 x \right)$$

更に, $k = 4$ のときも $k = 3$ と同様に解析的方法を利用することで, 以下の漸近公式が示せる.

定理 2.3 任意に十分大きな実数 $x > 3$ に対して,

$$\sum_{abcd \le x} \phi(\gcd(a,b,c,d)) = xP_{\phi,4}(\log x) + O\left(x^{\frac{1}{2}} \log^{\frac{17}{3}} x \right).$$

但し, $P_{\phi,4}(u)$ は u の 3 次多項式を表す.

最後に, $k = 5$ では Pilitz の約数問題の総和式

$$\sum_{n \le x} \tau_5(n) = Q_4(\log x)x + O\left(x^{\frac{11}{20}+\varepsilon} \right)$$

を用いて $\sum_{abcde \le x} \phi(\gcd(a,b,c,d,e))$ の漸近公式を求める. ここで, $Q_4(u)$ は u の 4 次多項式を表す ([2] の定理 13.2 などを参照). そうすることで, 以下の定理が導ける. すなわち

定理 2.4 任意に十分大きな実数 $x > 3$ に対して,

$$\sum_{abcde \le x} \phi(\gcd(a,b,c,d,e)) = xP_{\phi,5}(\log x) + O\left(x^{\frac{11}{20}+\varepsilon} \right). \tag{2.3}$$

但し, $P_{\phi,4}(u)$ は u の 4 次多項式を表す.

上記の誤差項の評価を小さくするには約数問題の解決が待たれる. そこで, Riemann ゼータ関数の Lindelöf 予想 を仮定するならば, 誤差項の評価を少しでも小さくできるのではないかと考えることはごく自然な発想である.

予想 2.2 (Lindelöf 予想) $\sigma \ge \frac{1}{2}$とし, 十分小さな正の数 ε に対して,

$$\zeta(\sigma + it) \ll (1 + |t|)^{\varepsilon}.$$

この Lindelöf 予想 は, 任意に十分大きな実数 $T > 3$ と任意に固定された整数 $k \geq 1$ に対して, $\int_0^T \left|\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^{2k} dt \ll T^{1+\varepsilon}$ と書き換えることが知られている (例えば, [5] の定理 13.2 を参照). すると, (2.3) の誤差項の評価が $O\left(x^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\right)$ とできる. さらに, $k \geq 5$ のとき, Lindelöf 予想を仮定するならば, $S_{\phi,k}(x)$ の漸近公式は解析的な手法を利用することで, 以下のことが予想される. すなわち

命題 2.1 Lindelöf 予想を仮定する. $k \geq 5$ のとき, 任意に十分大きな実数 $x > 3$ に対して,

$$\sum_{n_1 n_2 \cdots n_k \leq x} \phi(\gcd(n_1, n_2, \cdots, n_k)) = xP_{\phi,k}(\log x) + O\left(x^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\right).$$

但し, $P_{\phi,k}(u)$ は u の $k-1$ 次多項式を表す.

参考文献

[1] E. Cesáro, Étude moyenne du plus grand common diviseur de deux nombres, Ann. Mat Pure Appl.**13**(1885), 235-250

[2] A. Ivić, *The Riemann Zeta-Function*, Theory and Applications Dover publications, Inc. Mineola, New York 1985.

[3] E. Krätzel, W. G. Nowak and Tóth On certain arithmetic functions involving the greatest common divisor, Cent. Eur. J.Math **10** (2012), 761–774.

[4] M. Kühleitner and W. G Nowak, On a quastion of A. Schinzel: Omega estimate for a special type of arithmetic functions, Cent. Eur. J. Math. **10** (2012), 761–774.

[5] E. C. Titchmarsh, *The theory of the Riemann Zeta-Function (revised by D. R. Heath-Brown)*, Oxford University Press, 1986.