Continuous differentiability of weak solutions to certain very singular elliptic equations or systems involving one-Laplacian

東京大学大学院 数理科学研究科 数理科学専攻
坪内 俊太郎 (Shuntaro TSUBOUCHI)*

概要

本講演では，1-ラプラス作用素と p-ラプラス作用素（ただし，$p \in (1,\infty)$ とする）の両方を含む特異楕円型方程式（および系）の弱解の連続微分可能性に関する結果を報告する．1-ラプラス作用素には，退化的・特異的な楕円性を同時に有するような異方拡散性があるため，この方程式（系）は解の平らな面において非一様楕円型となるのが問題である．これを解決するために，平らな面の外側での微分の連続度評価を与える手法を紹介する．

1 導入と主結果

本稿では，次の特異楕円型問題の解 u を考える．

$$L_{b,\,p}u \coloneqq -b\Delta_1 u - \Delta_p u = f \quad \text{in} \quad \Omega \subset \mathbb{R}^n. \tag{1}$$

ここで，$b \in (0,\,\infty)$, $p \in (1,\,\infty)$ は定数である．空間次元は $n \geq 2$ とし，Ω は有界 Lipschitz 領域とする．未知函数 u は Ω 上で $\mathbb{R}^N$ $(N \geq 1)$ に値をとるものとして，f は Ω 上の既知函数であり $f \in L^q(\Omega;\,\mathbb{R}^N)$ かつ $q \in (n,\,\infty]$ をみたすものとする．指数 $s \in [1,\,\infty)$ に対して発散形式の拡散作用素 Δ_s を $\Delta_s u \coloneqq \operatorname{div}\left(|Du|^{s-2}Du\right)$ で定義し，これは s-Laplace 作用素と呼ばれる．ここで，Du は u の微分（Jacobi 行列）を表す．なお，u がスカラー値の時には微分を ∇u と書くことにする．2 階微分についても同様である．

本講演での主題は，問題 (1) の解の微分 Du の連続性である．係数が $b = 0$ の時（つまり，1-Laplace 作用素を含まない場合）には，問題 (1) とは p-Poisson 問題であり，弱解の微分が Hölder 連続であることはよく知られている（[3]，他にも多数の研究あり）．この意味で，p-Laplace 作用素は微分の連続性を保つ「盾」のようなものであると言える．しかし，こうした解の微分の連続性は，$p = 1$ では破綻する．実際，1 次元開区間上でスカラー値問題 $-\Delta_1 u = 0$ を考えると，絶対連続かつ単調非減少な函数 u が常に解となってしまう．この意味で，1-Laplace 作用素は微分の連続性を壊す「矛」のようなものであると言える．それでは，「矛」と「盾」の両作用素を含む問題 (1) において微分 Du の連続性はどうなるのか？この問は肯定的に解決できるということを本稿で概説する．

* *Email*: tsubos@ms.u-tokyo.ac.jp

1.1　弱解の正則性について

本稿の主結果や手法を理解するために最低限必要であろう数学解析の知識を大まかにまとめる．

まず「弱解」という用語は，滑らかさ（正則性）を欠いた函数に対して，微分を弱い枠組みで解釈して定義される解のことを意味する．弱解の枠組みとしては，部分積分に基づいた超関数の意味での弱解と，最大値原理に基づいた粘性解の意味での弱解の 2 つがよく知られている．本稿で触れるのは超関数の意味での弱解であり，これはエネルギー構造を持つ発散形式の問題に対してしばしば有効である．方程式系 (1) の左辺を素朴に計算すると 2 階微分が現れる（例えば，$\Delta_2 u = \Delta u = \partial_{x_1 x_1} u + \cdots + \partial_{x_n x_n} u$ である）ため，これは 2 階問題である．しかし，こういった高階の微分を（各点で函数として意味をなす）古典的な意味で解釈せずに，むしろさらにもっと弱い正則性の下で方程式系 (1) の解 u を解釈する．今回の場合は，u は 1 階の Sobolev 空間 $W^{1,\,p}(\Omega;\,\mathbb{R}^N)$ に属するものとして考える．特に，1 階微分 $Du = (\partial_{x_j} u^k)_{1\le j\le n,\,1\le k\le N}$ は超関数の性質

$$\int_\Omega \partial_{x_j} u^k \phi \,\mathrm{d}x = -\int_\Omega u^k \partial_{x_j} \phi \,\mathrm{d}x \quad \text{for all } \phi \in C_c^\infty(\Omega)$$

および p-乗 Lebesgue 可積分性 $Du \in L^p(\Omega;\,\mathbb{R}^n)$ をみたすものとする．方程式系 (1) の解を 1 階の Sobolev 空間という弱い枠組みで解釈することは，解をつかまえる際に有効である．実際，本問題は

$$\mathcal{E}(u) \coloneqq \int_\Omega [E(Du) - f\cdot u]\,\mathrm{d}x \quad \text{with} \quad E(\zeta) \coloneqq b|\zeta| + \frac{|\zeta|^p}{p}\,(\zeta \in \mathbb{R}^{Nn}) \tag{2}$$

というエネルギー汎函数の最小化問題と密接に関わりがあり，方程式系 (1) は凸汎函数 $\mathcal{E}$ の停留点がみたすべき Euler–Lagrange 方程式として導出される．この $\mathcal{E}$ を函数空間 $C^1(\overline{\Omega};\,\mathbb{R}^N)$ を定義域として解釈すること自体は可能であるが，$\mathcal{E}$ の最小値を達成するような函数 u を実際に見つける際には，この函数空間は狭すぎるため現実的ではない．そこで数学解析的により扱いやすい，より拡張された空間（p-乗積分が定めるノルムに関して完備化された空間）を考えると，Sobolev 空間 $W^{1,\,p}(\Omega;\,\mathbb{R}^N)$ が自然と現れるのである．このようにして十分に広げられた函数空間（定義域）であれば，変分解析の直接法 [5] により，エネルギー汎函数 $\mathcal{E}$ の最小値を達成する函数を見つけ出すことができるのである．

このように函数空間を広げることで，(1) のような発散形式の楕円 2 階方程式系の弱解を超関数の意味で捉えた際に問題となるのは，弱解の滑らかさをどこまで復元できるかということである．特に今回は，函数空間を完備化するという必要に迫られて，微分 Du を古典的な意味での微分ではなく Lebesgue 空間 $L^p(\Omega;\,\mathbb{R}^{Nn})$ に属する超函数の意味での微分として捉えている．こうした弱い意味での微分を，各点で意味をなす連続函数にまで正則性を復元できるかは数学的に興味深い問題となる．楕円型問題の弱解の正則性理論を簡単に概説するため，スカラー値問題（$N=1$）の楕円型方程式

$$-\operatorname{div}(A\nabla v) = f \in L^q(\Omega) \quad \text{in } \Omega$$

の弱解 $v \in W^{1,\,2}(\Omega)$ を考える．ここで $A = A(x,\,v,\,\nabla v)$ は n 次実対称行列であり，次の（古典的な意味での）一様楕円性を常にみたすものとする：

$$\lambda|z|^2 \le Az\cdot z \le \Lambda|z|^2 \quad \text{for all } z \in \mathbb{R}^n. \tag{3}$$

ここで，$0 < \lambda < \Lambda < \infty$ は定数とする．条件 (3) は固有値の範囲が閉区間 $[\lambda, \Lambda]$ に包含されることと同値である．ここでの一様有界性とは，A の固有値同士の比の上界 Λ/λ がいたる所で有界であることを意味しており，この値は弱解の正則性を持ち上げる際に重要な役割を果たす．今回は特に，弱解 v あるいはその勾配 ∇v の Hölder 連続性について大まかに触れる．正則性理論に関する教科書は数多くあるが，ここではモノグラフ [5, 8] を挙げておく．

まずは係数行列 A が定数の場合であるが，この場合は適当な回転と定数倍のスケール変換を行うことで，A は単位行列であるとしてよい．特に v は Poisson 方程式 $-\Delta v = f$ の弱解であり，$f \in L^q(\Omega)$ という条件の下で期待できる最適な正則性は勾配 ∇v の β-Hölder 連続性である．ここで現れる指数 $\beta \in (0, 1)$ とは $\beta = 1 - n/q$（$n < q < \infty$ のとき）であり，$q = \infty$ の時は任意の $\beta \in (0, 1)$ である．係数行列 $A = A(x, v, \nabla v)$ が各変数に関して適当な連続性が課されている場合にも，同様の正則性が得られる．よく知られた証明は，弱解 v を Laplace 方程式 $-\Delta w = 0$ をみたす調和函数 w と局所的に比較する方法である．この手法は，定数係数行列の場合との比較に基づいた手法であるため，しばしば係数凍結法と呼ばれる．しかしながら，係数行列 A の連続性が仮定されていない場合であっても，弱解 v の α-Hölder 連続性を得ることができる．ここで得られる指数 $\alpha \in (0, 1)$ は定数比 $\Lambda/\lambda \in (0, 1)$ に依存して決まる値である．係数行列に関する連続性を一切用いずに (3) の仮定のみで弱解の正則性を示す理論は，De Giorgi–Nash–Moser 理論（この問題解決に多大な貢献を果たした E. De Giorgi, J. Nash, J. Moser の 3 人の名前を冠している）として，今なお正則性理論において重要な役割を果たしている．ここで改めて強調すべきことは，係数行列 A の固有値の比に関する一様有界性こそが，弱解の正則性を復元できるかどうかの判断材料となっている点である．特に，条件 (3) とは違う設定であっても，De Giorgi–Nash–Moser 理論の手法が機能することはしばしばある．

1.2　背景・先行研究

方程式系 (1) は，粘性と可塑性の両方の性質を兼ね備えるような物質の挙動を記述する際にしばしば現れる．ここでは拡散作用素 p-Laplace 作用素・1-Laplace 作用素はそれぞれ物質の粘性・可塑性を反映している．流体力学の分野で現れる代表例はビンガム流体であり，[4] では $p = 2$ とした際の 2 階問題がスカラー値・ベクトル値の双方で紹介されている．もう一つの例として，結晶表面成長を記述する数理モデルとして高階（4 階）のスカラー値問題がある [7]．そこでは結晶表面エネルギーを記述する密度函数として，式 (2) において $p = 3$ とした時のエネルギー密度函数 E が現れる．これらの数理モデルに関して，解の微分の連続性を数学的に正当化する研究はこれまであまり行われていなかった．

2 階楕円型問題 (1) の解の微分の連続性は，解がスカラー値かつ凸の場合では既に証明されている（東京大学の儀我美一特任教授との共同研究 [6]）．そこでは凸解析と強最大値原理に基づく初等的な証明が与えられているが，解の凸性に大きく依存した議論であった．一方で，エネルギー密度函数 E の双対函数が現れる退化楕円型方程式系

$$-\operatorname{div}\left((|Dv| - b)^{p'-1}\frac{Dv}{|Dv|}\right) = f \quad \text{in} \quad \Omega \subset \mathbb{R}^n, \quad \text{where} \quad p' \coloneqq \frac{p}{p-1} \in (1, \infty), \tag{4}$$

の弱解の正則性についても近年研究されている．この方程式系 (4) は交通渋滞を考慮した最適交通流

の数理モデルとして現れるもので，ベクトル場

$$\sigma = (|Dv| - b)^{p'-1}\frac{Dv}{|Dv|} \tag{5}$$

が最適交通流にあたる．この写像 σ の連続性に関しては，2010 年代から研究されてきた [1, 2, 10]．これらの研究の内，[1] で用いられている手法を駆使することにより，スカラー値・ベクトル値の両方で，問題 (1) の解の連続微分可能性の数学的正当化に成功した [11, 12]．以下，プレプリント [11, 12] の内容に即して，近年の研究結果について報告する．

1.3 証明の方針と弱解の定義

解の微分の連続性を示す際に困難な点は，平らな面の周りで方程式系の一様楕円性が壊れることにある．これを説明するための準備として，各 $s \in [1, \infty)$ に対して，$\mathbb{R}^n$ 上の凸函数 $E_s(z) = |z|^s/s$ を導入する．また，簡単のため，しばらくはスカラー値問題（$N = 1$）を考える．ヘッセ行列 $\nabla^2 E_s(z_0)\,(z_0 \neq 0)$ の固有値を計算すると $(s-1)|z_0|^{s-2}$, $|z_0|^{s-2}$ となり，固有空間はそれぞれ $\mathbb{R}z_0$ とその直交補空間 $(\mathbb{R}z_0)^\perp$ となることがわかる．ここで注意すべきは $s = 1$ の場合には $\nabla^2 E_s$ の固有値の 1 つが常に 0 となることであり，これはちょうど $\Delta_1 u$ が Du の方向で退化楕円型になることと対応している．さらに，もう一方の固有値については $z_0 \to 0$ とすると無限大に発散する．これは平らな面 $\{\nabla u = 0\}$ （しばしばファセットと呼ばれる）において，拡散作用素 $\Delta_1 u$ が Du 以外の方向では特異的になっていることを表している．

勾配 $\nabla u = (\partial_{x_j} u)_{1\leq j\leq n}$ の正則性を見るため，方程式 (1) を変数 x_j に関して微分すると

$$-\operatorname{div}\left(\nabla^2 E(\nabla u)\nabla \partial_{x_j} u\right) = \partial_{x_j} f \tag{6}$$

が形式的に得られる．ここで，$E = bE_1 + E_p$ は密度函数である．ヘッセ行列 $\nabla^2 E$ の一様楕円性を測る指標として (最大の固有値)/(最小の固有値) という比を計算する．これはしばしば ellipticity ratio (ER) と呼ばれる値であるが，今回の問題では，

$$(\text{ER of } \nabla^2 E(z_0)) = \frac{b|z|^{-1} + |z|^{p-2}}{(p-1)|z|^{p-2}} \simeq 1 + b|z|^{1-p}, \quad \text{when} \quad 0 < |z| \ll 1 \tag{7}$$

となる．指数 $1-p$ が負であることに留意すると，上の比は z_0 が原点に近づくにつれて無限大に発散するが，この意味で方程式 (1) はファセットの周りで非一様楕円型であると言える．このようなことが起きるのは，1-Laplace 作用素の楕円性が退化性と特異性の両方を有することによる．特に方程式 (6) において係数行列 $\nabla^2 E$ の一様楕円性がファセットの近くで崩れるため，De Giorgi–Nash–Moser 理論に見られる一般的な手法では，微分 $\partial_{x_j} u$ の Hölder 連続性は証明することが困難になる．このことが，微分の連続性を示す上で一番の障壁となる．なお，非一様楕円的な問題として non-standard growth problems や (p, q)-growth problems については解の正則性を含めて長らく盛んに研究がなされている [9] が，問題 (1) とは状況が根本的に異なる．実際，非一様楕円性が現れる（ER が無限大に発散する）ような場面は，前者は微分が発散する時であり，対して後者は微分が退化する時である．

微分の連続性を直接示そうとすると，拡散作用素 $L_{b,\,p}$ のファセットでの非一様楕円性が問題になることがわかった．その一方でファセットの外側については，拡散作用素 $L_{b,\,p}$ にはある程度良い構

造も持っている．実際，先の ER の計算結果を改めて見直すと，各 $\delta \in (0,\,1)$ に対して

$$(\text{ER of } \nabla^2 E(z_0)) \leq C(p)\left(1 + b\delta^{1-p}\right) \quad \text{for all} \quad z_0 \in \{z \in \mathbb{R}^n \mid |z| > \delta\}$$

という評価が成立していることがわかる．これは，ファセットから離れている限りは方程式 (6) が局所的に一様楕円型になることを意味している．特に，微分が退化していないような領域（ファセットの外側）では微分の連続性を正当化する余地があるように思われる．

改めて $N \geq 1$ で (1) を考える．上の観察を踏まえ，切り捨てパラメータ $\delta \in (0,\,1)$ と合成函数

$$\mathcal{G}_\delta(\zeta) = (|\zeta| - \delta)_+ \frac{\zeta}{|\zeta|} \quad (\zeta \in \mathbb{R}^{Nn})$$

を導入して，微分 Du の代わりに合成写像 $\mathcal{G}_\delta(Du)$ の連続性を考えることにする．この $\mathcal{G}_\delta(Du)$ は集合 $\{|Du| \leq \delta\}$ においてゼロとなるように上手く切り捨てられており，拡散作用素 $L_{b,\,p}$ の（平らな面における）非一様楕円構造の影響を受けていない．特に，微分 Du そのものの連続性を直接示すことは困難である一方で，「切り捨てられた微分」 $\mathcal{G}_\delta(Du)$ に対しては良い連続度評価を与えられると期待できる．また，切り捨ての仕方から，$\delta \to 0$ とすると， $\mathcal{G}_\delta(Du)$ が Du に一様収束することがわかる．特に，各 $\mathcal{G}_\delta(Du)$ の連続性から Du の連続性も従うのである．この方針により，以下の主定理が示される．

定理 1 （弱解の連続微分可能性）函数 $u \in W^{1,\,p}(\Omega;\,\mathbb{R}^N)$ が方程式系 (1) の弱解であるとする．点 $x_* \in \Omega$ と切り捨てパラメータ $\delta \in (0,\,1)$ を固定する．この時，高々 $\delta,\,b,\,n,\,N,\,p,\,q,\,\|f\|_{L^q(\Omega)}$, $\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$, $d_* = \operatorname{dist}(x_*,\,\partial\Omega)$ のみに依存する指数 $\alpha \in (0,\,\beta)$，定数 $M,\,C \in (0,\,\infty)$ および半径 $\rho_0 \in (0,\,d_*)$ が存在して，局所 Hölder 評価

$$|\mathcal{G}_\delta(Du(x_1))| \leq M \text{ and } |\mathcal{G}_\delta(Du(x_1)) - \mathcal{G}_\delta(Du(x_2))| \leq C|x_1 - x_2|^\alpha \tag{8}$$

が任意の $x_1,\,x_2 \in B_{\rho_0}(x_*)$ において成立する．特に，$Du \in C^0(\Omega;\,\mathbb{R}^{Nn})$ である．

この類の正則性評価は退化楕円型問題 (4) に対しては既に示されている．先と同様に ER を計算してみると，方程式系 (4) もまた，$\{|Dv| > b\}$ では局所一様楕円型であるため，$\mathcal{G}_b(Dv)$ の連続性が示せる．式 (5) で与えられる最適交通流 σ は $\sigma = |\mathcal{G}_b(Dv)|^{p'-2}\mathcal{G}_b(Dv)$ と書けるため， σ の連続性も従うのである．今回の主結果（定理 1）はこれらの結果の特異楕円型版であると言えるが，[1] と比べると近似の方法に関して特に大きな違いがある．これについては，次節で触れることにする．

最後に，方程式系 (1) の弱解の定義を与えて，本節を終わりとする．

定義 1 函数 $u \in W^{1,\,p}(\Omega;\,\mathbb{R}^N)$ が (1) の弱解であるとは，ベクトル場 $Z \in L^\infty(\Omega;\,\mathbb{R}^{Nn})$ が存在して，等式

$$\int_\Omega Z \cdot D\phi \,\mathrm{d}x + \int_\Omega |Du|^{p-2} Du \cdot D\phi \,\mathrm{d}x = \int_\Omega f \cdot \phi \,\mathrm{d}x$$

が任意の試験函数 $\phi \in W_0^{1,\,p}(\Omega;\,\mathbb{R}^N)$ に対して成立し，さらに

$$Z(x) \in \partial|\cdot|(Du(x))$$

がほとんどいたるところの $x \in \Omega$ で成り立つ．ここで，$\partial|\cdot|$ は絶対値函数 $|\cdot|\colon \mathbb{R}^{Nn} \to (0, \infty]$ の劣微分作用素を表し，各 $\zeta \in \mathbb{R}^{Nn}$ に対して

$$\mathbb{R}^{Nn} \supset \partial|\cdot|(\zeta) = \begin{cases} \{|\zeta|^{-1}\zeta\} & (\zeta \neq 0), \\ \{z \in \mathbb{R}^{Nn} \mid |z| \leq 1\} & (\zeta = 0), \end{cases}$$

と与えられる集合値函数である．

注意すべき点は，拡散作用素 $\Delta_1 u$ の取り扱い方であり，特に $|Du|^{-1}Du$ を $\{Du = 0\}$ においては多価函数と見なしている．これは絶対値函数 $|\cdot|$ が原点において微分不可能であるため，凸函数の劣微分のような緩い枠組みで微分を解釈する必要があるからである．

2 証明の概略

主定理の証明は，方程式系の近似と，近似解のア・プリオリ評価の 2 つに大きく分けられる．

2.1 近似問題

まず，方程式系 (1) の近似問題として

$$L_{b,\,p}^{\varepsilon} u_{\varepsilon} \coloneqq -\mathrm{div}\left(\frac{bDu_{\varepsilon}}{\sqrt{\varepsilon^2 + |Du_{\varepsilon}|^2}} + \left(\varepsilon^2 + |Du_{\varepsilon}|^2\right)^{p/2-1} Du_{\varepsilon} \right) = f_{\varepsilon} \quad \text{in } \Omega \tag{9}$$

を考える．左辺にある拡散作用素 $L_{b,\,p}^{\varepsilon}$ は，エネルギー密度関数 $E(\zeta) = b|\zeta| + |\zeta|^p/p$ を

$$E_{\varepsilon}(\zeta) \coloneqq b\sqrt{\varepsilon^2 + |\zeta|^2} + \frac{1}{p}\left(\varepsilon^2 + |\zeta|^2\right)^{p/2} \quad \text{for } \zeta \in \mathbb{R}^{Nn},\, \varepsilon \in (0,\,1)$$

で近似すると自然と現れる．特に，1-Laplace 作用素は極少局面作用素で近似される．外力項 $f_{\varepsilon} \in L^q(\Omega;\, \mathbb{R}^N)$ については，弱収束

$$f_{\varepsilon} \rightharpoonup f \quad \text{in } \sigma\left(L^q(\Omega;\, \mathbb{R}^N),\, L^{q'}(\Omega;\, \mathbb{R}^N)\right) \tag{10}$$

を満たしていれば良いものとする．言い換えると，

$$\int_{\Omega} f_{\varepsilon} \cdot \phi \,\mathrm{d}x \to \int_{\Omega} f \cdot \phi \,\mathrm{d}x$$

が任意の $\phi \in L^{q'}(\Omega;\, \mathbb{R}^N)$ に対して成立するものとする．特に，$f_{\varepsilon} \in C^{\infty}(\Omega;\, \mathbb{R}^N)$ として差し支えない．このような設定の下で，以下の結果が得られる．

命題 1.1 函数 $u \in W^{1,\,p}(\Omega;\, \mathbb{R}^N)$ が方程式系 (1) の弱解であるとする．各 $\varepsilon \in (0,\,1)$ に対して弱形式

$$\int_{\Omega} \left[\frac{bDu_{\varepsilon}}{\sqrt{\varepsilon^2 + |Du_{\varepsilon}|^2}} + \left(\varepsilon^2 + |Du_{\varepsilon}|^2\right)^{p/2-1} Du_{\varepsilon} \right] \cdot D\phi \,\mathrm{d}x = \int_{\Omega} f_{\varepsilon} \cdot \phi \,\mathrm{d}x \quad \text{for all } \phi \in W_0^{1,\,p}(\Omega;\, \mathbb{R}^N)$$

をみたす函数 $u_{\varepsilon} \in u + W_0^{1,\,p}(\Omega;\, \mathbb{R}^N)$ を考える．この時，0 に収束する減少列 $\{\varepsilon_j\}_j \subset (0,\,1)$ が存在して，$W^{1,\,p}(\Omega;\, \mathbb{R}^N)$ の意味での強収束 $u_{\varepsilon_j} \to u$ および Ω 上での概収束（ほとんどいたるところでの各点収束） $Du_{\varepsilon_j} \to Du$ が成立する．

上の結果は，方程式系 (1) の弱解 $u \in W^{1,\,p}(\Omega;\,\mathbb{R}^N)$ は Dirichlet 境界条件下の近似問題

$$\begin{cases} L_{b,\,p}^{\varepsilon} u_{\varepsilon} &= f_{\varepsilon} \quad \text{in} \quad \Omega, \\ \quad u_{\varepsilon} &= u \quad \text{on} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

の弱解 $u_{\varepsilon} \in W^{1,\,p}(\Omega;\,\mathbb{R}^N)$ で上手く近似できるということを意味する．この近似解 u_{ε} の存在についても，変分解析の直接法から確認できる．命題 1.1 では，特に微分の L^p-強収束を示すのが一番の問題となるが，これは p-Laplace 作用素が持っている楕円性により解決できる．一方で 1-Laplace 作用素単体の楕円性は，勾配の方向で退化しているせいであまり良いものであるとは言えない．そのため，弱解の収束の正当化には p-Laplace 作用素の性質に頼る必要がある．

近似問題 (9) を導入した理由は，方程式系 (1) ではファセットの周りで一様楕円性が崩れるからである．方程式 (1) に対して，変数 x_j に関して形式的に微分を行って (6) を導出したが，この等式を（$W_0^{1,\,2}$ を試験関数とした）超関数 $W^{-1,\,2}$ の意味で数学的に正当化する必要がある．その際には 2 階微分 $D^2 u$ の L^2-可積分性と微分 Du の有界性を確認する必要があり，特に前者を確認する手法として標準的なものは差分商の方法がある．しかし，この差分商の方法では拡散作用素の一様楕円性に基づいた計算を行っていることが多いが，方程式 (6) には一様楕円的な構造がファセットの辺りで崩壊している．そのため，Hesse 行列を含むような方程式を弱形式として正当化する際に要する 2 階の Sobolev 正則性を得ることが容易ではないのである．このような問題は，拡散作用素 $L_{b,\,p}$ の非一様楕円型によるところが大きいため，これを非退化楕円型かつ一様楕円型な作用素 $L_{b,\,p}^{\varepsilon}$ で近似する必要があるのである．こうして導入された近似問題 (9) においては，左辺の作用素に一様楕円的な構造がある．実際，前節と全く同様に（簡単のため再び $N = 1$ とするが）点 $z_0 \in \mathbb{R}^n$ での Hesse 行列 $\nabla^2 E_{\varepsilon}(z_0)$ の ER を計算してみると，点 $z_0 \in \mathbb{R}^n$ に関して一様有界である．実際，近似パラメーター $\varepsilon \in (0,\,1)$ を固定するごとに

$$(\text{ER of } \nabla^2 E_{\varepsilon}(z_0)) \leq C(p)\left(1 + b\left(\varepsilon^2 + |z|^2\right)^{(1-p)/2}\right) \leq C(p)\left(1 + b\varepsilon^{1-p}\right) < \infty \tag{11}$$

が成立する．この意味で，$L_{b,\,p}^{\varepsilon}$ は一様楕円型であると言えるため，差分商の方法などの標準的な議論により Sobolev 内部正則性を持ち上げることが可能となる．特に近似解 u_{ε} は局所的に $W^{2,\,2} \cap W^{1,\,\infty}$-正則性があるため，例えばスカラー値の場合であれば方程式 (6) の近似版に相当する

$$-\operatorname{div}\left(\nabla^2 E_{\varepsilon}(\nabla u_{\varepsilon}) \nabla \partial_{x_j} u_{\varepsilon}\right) = \partial_{x_j} f_{\varepsilon}$$

は $W^{-1,\,2}$ の意味で局所的に意味をなす．ベクトル値問題においても同様である．さらに言えば，外力項 f_{ε} が十分滑らかな場合には，近似されたエネルギー密度函数 E_{ε} のなめらかさに着目することで，弱解 u_{ε} は何回でも連続微分可能な函数であることがわかる [8, Chapters IV–V]．特に，近似解 u_{ε} は (9) を古典的な意味で満たしているものとしても差し支えない．

ただし，ER の評価が (7) と (11) では微妙に異なっていることに注意すると，微分の切り捨て方についても微修正を行う必要がある．つまり，近似解 u_{ε} に対しては，微分を切り捨てる合成函数としては $\mathcal{G}_{\delta}$ ではなく

$$\mathcal{G}_{\delta,\,\varepsilon}(\zeta) \coloneqq \left(\sqrt{\varepsilon^2 + |\zeta|^2} - \delta\right)_+ \frac{\zeta}{|\zeta|} \quad \text{for } \zeta \in \mathbb{R}^{Nn} \quad \text{with } 0 < \varepsilon < \delta$$

を考えることにする．これは，近似作用素 $L_{b,\,p}^{\varepsilon}$ においては，局所的な一様楕円性を計る「ものさし」としては $|Du_{\varepsilon}|$ よりもむしろ $V_{\varepsilon} \coloneqq \sqrt{\varepsilon^2 + |Du_{\varepsilon}|^2}$ を採用した方が自然だからである．

退化楕円型問題の研究 [1] では，微分の切り捨て方に関する修正をしていない点が大きな違いである．これは，近似スキームの与え方が根本的に異なることによる．実際，方程式 (1) を近似する際には特異拡散作用素 $L_{b,\,p}$ そのものを近似したが，[1] で与えられている近似方程式系は

$$-\Delta v_\varepsilon - \operatorname{div}\left((|Dv_\varepsilon| - b)^{p'-1}\frac{Dv_\varepsilon}{|Dv_\varepsilon|}\right) = f \quad \text{in} \quad \Omega \subset \mathbb{R}^n$$

で与えられている．この近似は粘性拡散項 $-\varepsilon\Delta$ を摂動として加えて近似するという粘性消滅法のアナロジーである．特に主要項の近似は一切行われていないことに注意すると，このような近似問題の解 v_ε に対しては微分の切り捨ての仕方を修正する必要がないのである．

2.2　近似解のア・プリオリ評価と証明の概略

設定 (10) と命題 1.1 より，近似パラメータ ε に依らない定数 $U \geq \|Du\|_{L^p(\Omega)}$, $F \geq \|f\|_{L^q(\Omega)}$ で

$$\|Du_\varepsilon\|_{L^p(\Omega)} \leq U, \quad \|f_\varepsilon\|_{L^q(\Omega)} \leq F$$

をみたすようなものが取れる．命題 1.1 から，主定理の証明は以下のア・プリオリ評価に帰着される．

命題 1.2　切り捨てパラメータ $\delta \in (0,\,1)$ を固定し，近似パラメータ $\varepsilon \in (0,\,\delta/8)$ に対して，方程式系 (9) の弱解 u_ε を考える．この時，δ, b, n, N, p, q, F, L, $d_* = \operatorname{dist}(x_*,\,\partial\Omega)$ のみに依存する指数 $\alpha \in (0,\,\beta)$，定数 M, $C \in (0,\,\infty)$ および半径 $\rho_0 \in (0,\,d_*)$ が存在して，開球 $B_{\rho_0}(x_*) \Subset \Omega$ 上で局所 Hölder 評価

$$|\mathcal{G}_{2\delta,\,\varepsilon}(Du_\varepsilon(x_1))| \leq M \text{ and } |\mathcal{G}_{2\delta,\,\varepsilon}(Du_\varepsilon(x_1)) - \mathcal{G}_{2\delta,\,\varepsilon}(Du_\varepsilon(x_2))| \leq C|x_1 - x_2|^\alpha \tag{12}$$

が任意の x_1, $x_2 \in B_{\rho_0}(x_*)$ に対して成立する．

命題 1.2 から $\mathcal{G}_{2\delta}(Du)$ の α-Hölder 連続性が従う．実際，各点 $x_0 \in \Omega$ に対して，命題 1.2 にある開球 $B_{\rho_0}(x_*) \Subset \Omega$ をとると，評価 (12) により Ascoli–Arzelà の定理を使うことができる．特に，$\mathcal{G}_{2\delta,\,\varepsilon}(Du_\varepsilon)$ はとある α-Hölder 連続写像 $v_{2\delta}$ に $B_{\rho_0}(x_*)$ 上一様収束しているとしてよい．一方で，この $\mathcal{G}_{2\delta,\,\varepsilon}(Du_\varepsilon)$ は $\mathcal{G}_{2\delta}(Du)$ に Ω 上概収束しているとしてよい．実際，命題 1.1 により，Ω 上の微分の概収束 $Du_\varepsilon \to Du$ は認めてよいからである．特に，$\mathcal{G}_{2\delta}(Du)$ と α-Hölder 連続写像 $v_{2\delta}$ が $B_\rho(x_*)$ 上ほとんどいたるところで一致するため，$\mathcal{G}_{2\delta}(Du)$ の α-Hölder 連続性が示された．なお，主定理にある不等式評価 (8) についても上記の収束の議論とア・プリオリ評価 (12) から確認できる．

最後に，命題 1.2 の証明の概略を記して本稿を終わりとする．

準備として，証明に際して最低限必要となる記法を固定する．以下，切り捨てパラメータ $\delta \in (0,\,1)$ と近似パラメータ $\varepsilon \in (0,\,\delta/8)$ は固定して，開球 $B \coloneqq B_{\frac{d_*}{2}}(x_*) \Subset \Omega$ を固定する．これに対して，スカラー値函数 $V_\varepsilon \coloneqq \sqrt{\varepsilon^2 + |Du_\varepsilon|^2} \in W^{1,\,2}(B) \cap L^\infty(B)$ を定義する．まず注意すべきこととして，V_ε は近似パラメータ ε に依らずに一様有界であるとしてよい．実際，近似問題 (9) では，ファセットから十分離れた場所 $\{V_\varepsilon \geq 1\}$ においては，近似パラメータ $\varepsilon \in (0,\,1)$ に依存しない一様楕円性が担保されている．これは ER に関する評価 (11) から容易に確認できる．特に，台が $\{V_\varepsilon \geq 1\}$ に含まれる（従ってファセットとは決して交わり得ない）ような試験函数を注意深く選ぶことで，V_ε の局所有界性評価を与えることができる．特に，標準的な手法である Moser の逐次法 (Moser's iteration) や De Giorgi の切り捨て法 (De Giorgi's truncation) を駆使することが可能である．結果として十分大きな定数 $M = M(d_*, b, n, N, p, q, F, U) \in (1, \infty)$ で， B 上で $V_\varepsilon \le M$ をみたすようなものが取れる．次に，より小さな開球 $B_\rho := B_\rho(x_0) \Subset B$ を考える．ここで，「切り捨てられた微分」のノルム $|\mathcal{G}_{\delta,\,\varepsilon}(Du_\varepsilon)|$ の局所的上界を表すパラメータ $\mu \in (0,\, M-\delta)$ を導入して，

$$\sup_{B_\rho} |\mathcal{G}_{\delta,\,\varepsilon}(Du_\varepsilon)| \le \mu \le \mu+\delta \le M, \quad \text{or equivalently} \quad \sup_{B_\rho} V_\varepsilon \le \mu+\delta \le M \tag{13}$$

とする．条件 (13) にある 2 つの不等式が同値であることは，等式 $|\mathcal{G}_{\delta,\,\varepsilon}(Du_\varepsilon)| \equiv (V_\varepsilon - \delta)_+$ によりわかる．さらに，定数 $\nu \in (0,\,1)$ は後で十分小さく取って決めることにして，V_ε の上位集合

$$S_{\rho,\,\mu,\,\nu} := \{x \in B_\rho \mid V_\varepsilon(x) - \delta > (1-\nu)\mu\}$$

を定める．命題 1.2 の証明では，この上位集合の大きさに応じて異なる解析を 3 通り行う．

<u>第 1 の場合</u>．上位集合の Lebesgue 測度が十分大きい場合，言い換えると

$$|S_{\rho,\,\mu,\,\nu}| \ge (1-\nu)|B_\rho| \tag{14}$$

をみたす場合．粗く言ってしまうと，$0 < \nu \ll 1$ の場合では仮定 (14) は B_ρ のほぼ 100% の場所で， V_ε が上界値 $\delta + \mu$ のほぼ 100% の値をとっていることを意味する．特に，不等式

$$|Du_\varepsilon| \le V_\varepsilon = \sqrt{\varepsilon^2 + |Du_\varepsilon|^2} \le \varepsilon + |Du_\varepsilon| \le \frac{\delta}{8} + |Du_\varepsilon|$$

に注意すると，微分 Du_ε 自体が B_ρ の中心 x_0 の周りで退化していないことが期待される．ただし，これを数学的に正当化するためには，半径 ρ と比率 $\nu \in (0,\,1)$ を十分小さくとる必要があるが，これは D^2u に関する局所 L^2-評価によって定まる．なお，この L^2-評価を導出するために技術的な仮定 $0 < \delta < \mu$ が必要となる．結果として，この場合には微分 Du_ε の積分平均が決して退化しないということがわかる．具体的には

$$|(Du_\varepsilon)_r| := \left| \frac{1}{|B_r|} \int_{B_r} Du_\varepsilon \, \mathrm{d}x \right| \ge \delta + \frac{\mu}{4} \quad \text{even when } r \to 0$$

に相当する結果が得られる（正確に言うと r は 0 に収束する等比級数列の値として離散的にとった上で上の不等式を示している）．この結果は，微分 Du_ε が中心 x_0 の周りで退化していないことを意味しており，このような場合には係数凍結法が機能する．つまり，$\xi := (Du_\varepsilon)_r \in \mathbb{R}^{Nn}$ とおいた上で，定数係数行列 $A := \nabla^2 E_\varepsilon(\xi)$ が与える Laplace 方程式の弱解との比較を行うことにより，

$$\int_{B_r} |Du_\varepsilon - (Du_\varepsilon)_r|^2 \, \mathrm{d}x \le C \left(\frac{r}{\rho}\right)^{n+2\beta} \mu^2 \quad \text{for all } r \in (0,\,\rho]$$

を得ることができる．これは平均振動にあたる量を二乗積分した際に，2β の分だけ減衰のオーダーに余裕があることを意味しており，微分の β-Hölder 連続性がここから従う．上のような評価はしばしば Campanato 評価と呼ばれる．合成写像 $\mathcal{G}_{2\delta,\,\varepsilon}$ が $\varepsilon \in (0,\,\delta/8)$ に依らずに一様 Lipschitz 連続であることにより，実は上の Campanato 評価は $\mathcal{G}_{2\delta,\,\varepsilon}(Du_\varepsilon)$ に対しても成立することがわかる．

<u>第 2 の場合</u>．条件 (14) が成り立たない場合には，上にあるような分離法が機能しないため，ファセットの周りで解析をしてしまう可能性がある．この問題を解決するために，De Giorgi の切り捨て

法を用いて，非一様楕円性を駆除することにする．具体的には，スカラー値函数 $U_{\delta,\,\varepsilon} \coloneqq (V_\varepsilon - \delta)_+^2$ がとある一様楕円型の楕円型方程式の劣解となっていることを証明する．特に注意すべき点は，函数 $U_{\delta,\,\varepsilon}$ の台が $\{\delta \le V_\varepsilon \le M\}$ に含まれており，この領域では問題 (9) が，(3) にあるような（古典的な意味での）一様楕円型問題になることである．特にこの函数 $U_{\delta,\,\varepsilon}$ は Caccioppoli 評価（Poincaré 不等式の逆向き版に相当するエネルギー評価）をみたすため，それを基にして De Giorgi の振動量補題（つまり，$U_{\delta,\,\varepsilon}$ に関する減衰評価）が得られる．最終的には，$U_{\delta,\,\varepsilon} \equiv |\mathcal{G}_{\delta,\,\varepsilon}(Du_\varepsilon)|^2$ と $|\mathcal{G}_{2\delta,\,\varepsilon}(Du_\varepsilon)| \le |\mathcal{G}_{\delta,\,\varepsilon}(Du_\varepsilon)|$ を踏まえれば，$|\mathcal{G}_{2\delta,\,\varepsilon}(Du_\varepsilon)|$ についての減衰評価も得られる．

第 3 の場合．最後に (14) かつ $0 < \mu < \delta$ となる場合が残っているが，この時は $|\mathcal{G}_{2\delta,\,\varepsilon}(Du_\varepsilon)|$ の振動量評価が自明なものとして成り立つ．実際，この場合には B_ρ 上で $\mathcal{G}_{2\delta,\,\varepsilon}(Du_\varepsilon) \equiv 0$ である．

半径 ρ を縮めていきながら，条件に応じて上の 3 通りの解析を繰り返し行なっていくことにより，近似パラメータ $\varepsilon \in (0,\,\delta/8)$ に依存しない Campanato 評価

$$\int_{B_\rho} \left|\mathcal{G}_{2\delta,\,\varepsilon}(Du) - (\mathcal{G}_{2\delta,\,\varepsilon}(Du_\varepsilon))_\rho\right|^2 \,\mathrm{d}x \le C\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{n+2\alpha} \mu^2 \quad \text{for all } r \in (0,\,\rho_*]$$

を導出することができる．なお，半径の上限 ρ_* は切り捨てパラメータ δ に依存しており，この値は係数凍結法と De Giorgi の切り捨て法が常に機能するようにして選ばれている．この積分評価が点 x_0 の位置に依らずに導出できるため，開球 $B_{\rho_*}(x_*)$ 上でア・プリオリ Hölder 評価が得られる．なお，De Giorgi の切り捨て法を用いることで非一様楕円性を上手く回避しているが，そこで得られた一様楕円性は切り捨てパラメータ $\delta \in (0,\,1)$ に根本的に依存している．特に，Hölder 指数 $\alpha \in (0,\,\beta)$ は切り捨てパラメータ $\delta \in (0,\,1)$ に依存することには注意しなくてはならない．

参考文献

[1] V. Bögelein, F. Duzaar, R. Giova, and A. Passarelli di Napoli. Higher regularity in congested traffic dynamics. Math. Ann., 2022.

[2] M. Colombo and A. Figalli. Regularity results for very degenerate elliptic equations. J. Math. Pures Appl. (9), 101(1):94–117, 2014.

[3] E. DiBenedetto. $C^{1+\alpha}$ local regularity of weak solutions of degenerate elliptic equations. Nonlinear Anal., 7(8):827–850, 1983.

[4] G. Duvaut, and J.-L. Lions. Inequalities in Mechanics and Physics, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Vol 219. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1976.

[5] E. Giusti. Direct Methods in the Calculus of Variations. World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge, NJ, 2003.

[6] Y. Giga, and S. Tsubouchi. Continuity of derivatives of a convex solution to a perturbed one-Laplace equation by p-Laplacian. Arch. Ration. Mech. Anal., 244, 253-292, 2022.

[7] R. V. Kohn. Surface relaxation below the roughening temperature: some recent progress and open questions. Nonlinear partial differential equations, Abel Symp., Vol 7, 207–221. Springer, Heidelberg, 2012.

[8] O. A. Ladyzhenskaya, and N. N. Ural'tseva. Linear and Quasilinear Elliptic Equations. Academic Press, New York-London, 1968.

[9] G. Mingione, and V. Rădulescu. Recent developments in problems with nonstandard growth and nonuniform ellipticity. J. Math. Anal. Appl., 501(1):Paper No. 125197, 41, 2021.

[10] F. Santambrogio and V. Vespri. Continuity in two dimensions for a very degenerate elliptic equation. Nonlinear Anal., 73(12):3832–3841, 2010.

[11] S. Tsubouchi. Continuous differentiability of a weak solution to very singular elliptic equations involving anisotropic diffusivity. arXiv:2208.14640, 2022.

[12] S. Tsubouchi. A weak solution to a perturbed one-Laplace system by p-Laplacian is continuously differentiable. arXiv:2209.00004v1, 2022, to appear in Math. Ann.