Functional equation for the multiple L-function

名古屋大学大学院 多元数理科学研究科 多元数理科学専攻
戸潤勇一郎 (Yuichiro TOMA)

概要

多重ゼータ (L-) 関数はそれぞれ, Riemann ゼータ (Dirichlet L-) 関数の類似であり, いくつかの多重ゼータ (L-) 関数は Tricomi 型合流超幾何関数を含むある種の対称性を持っていることが知られている．本稿では Mordell-Tornheim 型多重 L-関数の関数等式の結果を紹介する．これは, Mellin-Barnes 積分公式を用いて先行研究の証明を簡略化するものでもある．

1 導入

複素数 $s_j = \sigma_j + it_j$ $(j = 1, \ldots, r+1)$, 自然数 r に対して, r 重 Mordell-Tornheim 型多重ゼータ関数は以下の多重級数で定義される．

$$\zeta_{MT,r}(s_1, \ldots, s_r, s_{r+1}) = \sum_{m_1,\ldots,m_r=1}^{\infty} \frac{1}{m_1^{s_1} \ldots m_r^{s_r} (m_1 + \cdots + m_r)^{s_{r+1}}}. \tag{1.1}$$

この多重級数は

$$\sum_{\ell=1}^{j} \mathrm{Re}(s_{k_\ell}) + \mathrm{Re}(s_{r+1}) > j, \tag{1.2}$$

の領域で絶対収束する．ただし, $1 \le k_1 < k_2 < \cdots < k_j \le r$ $(j = 1, 2, \ldots, r)$ である ([11, Lemma 2.1])．松本 [8] は Mellin-Barnes 積分 (後述の (2.2)) を用いることで, (1.1) が $\mathbb{C}^{r+1}$ 全域へ有理型に接続されることを示し, その possible singularities を与えた．

この級数の起源は Tornheim に遡る．Tornheim は 1950 年代に $\zeta_{MT,2}(p,q,r)$ $(p,q,r \in \mathbb{N})$ の特殊値を最初に考察した．また, 独立して Mordell が $\zeta_{MT,2}(k,k,k)$ $(k \in \mathbb{N})$ や,

$$\sum_{m_1,\ldots,m_r=1}^{\infty} \frac{1}{m_1 \ldots m_r (m_1 + \cdots + m_r + a)} \quad (a > -r)$$

を研究している．これらが級数 (1.1) が Mordell-Tornheim 型と呼ばれる所以である．特に $r = 2$ の場合は Tornheim 型 2 重ゼータ関数や Tornheim 型 2 重和とも呼ばれる．また, (1.1) の定式化は松本 [7] による．

多重ゼータ関数は Riemann ゼータ関数の多重級数への一般化であり, $r = 1$ の場合は Riemann ゼータ関数

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

となる．右辺の級数は $\sigma > 1$ で絶対収束するが, $s = 1$ を除く $\mathbb{C}$ 平面へ解析接続される．また, Riemann ゼータ関数は関数等式

$$\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma(s/2)\zeta(s) = \pi^{-\frac{1-s}{2}}\Gamma((1-s)/2)\zeta(1-s)$$

を満たす．関数等式の $s \leftrightarrow 1-s$ の関係から Riemann ゼータ関数が $\sigma = 1/2$ で対称性を持っていることが分かる．

では, 関数等式を多重ゼータ関数へ一般化することは可能なのであろうか．松本 [9] は Euler-Zagier 型 2 重ゼータ関数を考察した．Euler-Zagier 型 2 重ゼータ関数は

$$\zeta_{EZ,2}(s_1, s_2) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{m^{s_1}(m+n)^{s_2}}. \tag{1.3}$$

で定義される．Zhao [14], 秋山-江上-谷川 [1] により独立に (1.3) は $\mathbb{C}^2$ 全域へ有理型に接続されることが知られている．

今, $\zeta_{EZ,2}(s_1, s_2)$ の modefied 関数として $g(s_1, s_2)$ を定める:

$$g(s_1, s_2) = \zeta_{EZ,2}(s_1, s_2) - \frac{\Gamma(1-s_1)\Gamma(s_1+s_2-1)}{\Gamma(s_2)}\zeta(s_1+s_2-1).$$

また, $\sigma_\alpha(k) = \sum_{d|k} d^\alpha$ を約数関数, $\Psi(a, c; x)$ は Tricomi 型合流超幾何関数

$$\Psi(a, c; x) = \frac{1}{\Gamma(a)}\int_0^{\infty e^{i\phi}} e^{-xy}y^{a-1}(1+y)^{c-a-1}dy \tag{1.4}$$

とする．ただし, $\mathrm{Re}(a) > 0, -\pi < \phi < \pi, |\phi + \arg x| < \pi/2$ ([3, 6.5 (2)]).

このとき, 以下の等式が成り立つ．

Theorem 1.1 ([9, Theorem 1])**.**

$$\begin{aligned}\frac{g(s_1, s_2)}{(2\pi)^{s_1+s_2-1}\Gamma(1-s_1)} &= \frac{g(1-s_2, 1-s_1)}{i^{s_1+s_2-1}\Gamma(s_2)}\\ &\quad + 2i\sin\left(\frac{\pi}{2}(s_1+s_2-1)\right)\sum_{k=1}^{\infty}\sigma_{s_1+s_2-1}(k)\Psi(s_2, s_1+s_2; 2\pi ik),\end{aligned}$$

が成り立つ．

この定理から $s_1 \leftrightarrow 1-s_2$ の間に対応があることが分かる．この等式は多重ゼータ関数の関数等式と呼ばれている．松本 [9] は contour 積分を用いて Theorem 1.1 を示した．同様の手法を用いて (1.3) の和の分子に指標などを付加させた 2 重 L 関数の関数等式の結果が知られている．(例えば, [5], [6], [2], [11]). 岡本-小野塚 [11] は松本と同様の手法を用いて (1.1) の関数等式を示した．(1.1) の modefied 関数 g_r とする:

$$\begin{aligned}g_r(s_1, \ldots, s_r, s_{r+1}) &= \zeta_{MT,r}(s_1, \ldots, s_r, s_{r+1})\\ &\quad - \frac{\Gamma(1-s_r)\Gamma(s_r+s_{r+1}-1)}{\Gamma(s_{r+1})}\zeta_{MT,r-1}(s_1, \ldots, s_{r-1}, s_r+s_{r+1}-1).\end{aligned}$$

このとき,

Theorem 1.2 ([11, Theorem 1.2]).

$$\begin{aligned}
&\frac{g_r(-s_1,\ldots,-s_{r-1},1-s_{r+1},1-s_r)}{i^{s_r+s_{r+1}-1}\Gamma(s_{r+1})}\\
&+e^{\frac{\pi i}{2}(s_r+s_{r+1}-1)}F_r^{+}(s_1,\ldots,s_r,s_{r+1})+e^{-\frac{\pi i}{2}(s_r+s_{r+1}-1)}F_r^{-}(s_1,\ldots,s_r,s_{r+1})\\
&=\frac{g_r(s_1,\ldots,s_{r-1},s_r,s_{r+1})}{(2\pi)^{s_r+s_{r+1}-1}\Gamma(1-s_r)}\\
&+e^{-\frac{\pi i}{2}(s_r+s_{r+1}-1)}\sum_{\ell_1,\ldots,\ell_{r-1}=1}^{\infty}\sigma_{MT,r-1}(s_1,\ldots,s_{r-1},s_r+s_{r+1}-1;\ell_1,\ldots,\ell_{r-1})\\
&\times\{\Psi(s_{r+1},s_r+s_{r+1};2\pi i(\ell_1+\cdots+\ell_{r-1}))+\Psi(s_{r+1},s_r+s_{r+1};-2\pi i(\ell_1+\cdots+\ell_{r-1}))\}
\end{aligned}$$

が成り立つ．ただし，

$$\begin{aligned}
F^{\pm}(s_1,\ldots,s_r,s_{r+1})=\sum_{\ell_1,\ldots,\ell_{r-1}=1}^{\infty}&\frac{\sigma_{s_1+\cdots+s_r+s_{r+1}-1}(\gcd(\ell_1,\ldots,\ell_{r-1}))}{\ell_1^{s_1}\ldots\ell_{r-1}^{s_{r-1}}}\\
&\times\Psi(s_{r+1},s_r+s_{r+1};\pm 2\pi i(\ell_1+\cdots+\ell_{r-1})),
\end{aligned}\tag{1.5}$$

$$\sigma_{MT,r}(s_1,\ldots,s_{r-1},s_{r+1};\ell_1,\ldots,\ell_r)=\sum_{\substack{d_1|\ell_1,\ldots,d_r|\ell_r\\ d_j\geq\frac{\ell_j}{\gcd(\ell_1,\ldots,\ell_r)}}}d_1^{s_1}\ldots d_r^{s_r}(d_1+\cdots+d_r)^{s_{r+1}}.\tag{1.6}$$

Remark 1.3. Theorem 1.2は $g_2(0,s_1,s_2)$ とすれば, Thoerem 1.1を復元する．したがって, 岡本-小野塚 [11] の結果は松本 [9] の一般化になっている．

2 主結果

本稿では, 岡本-小野塚 [11] による結果を多重 L-関数類似を考察した．Mordell-Tornheim 型の多重 Dirichlet L-関数は, $q>1$ を法とする Dirichlet 指標 $\chi_1,\ldots,\chi_r$ をに対して

$$L_{MT,r}(s_1,\ldots,s_r,s_{r+1};\chi_1,\ldots,\chi_r)=\sum_{m_1,\ldots,m_r=1}^{\infty}\frac{\chi_1(m_1)\ldots\chi_r(m_r)}{m_1^{s_1}\ldots m_r^{s_r}(m_1+\cdots+m_r)^{s_{r+1}}}\tag{2.1}$$

と定義される．この多重 Dirichlet 級数は Maoxiang Wu [12] により導入され, Wu は (2.1) が $\mathbb{C}^{r+1}$ 全域へ有理型に接続されることを示した ([10, Theorem 3] 参照)．さらに [12] で, Wu は $\chi_1,\ldots,\chi_r$ がすべて principal でなければ, $L_{MT,r}$ は整関数であり, k 個の principal な指標 $\chi_{j_1},\ldots\chi_{j_k}$ があれば, 以下の possible singularities:

$$\sum_{a=1}^{h}s_{j_{i(a)}}+s_{r+1}=h-\ell\left(1-\left[\frac{h}{r}\right]\right)\quad(1\leq h\leq k,1\leq i(1)<\cdots<i(h)\leq k,\ell\in\mathbb{N}_0)$$

を持つことを示した．

主定理を述べる前に記号を準備しておく．関数

$$
\begin{aligned}
&F^{\pm}(s_1,\ldots,s_r,s_{r+1};\chi_1,\ldots,\chi_{r-1},\chi_r)\\
&\quad=\sum_{\ell_1,\ldots,\ell_{r-1}=1}^{\infty}\frac{\sum_{n\mid\gcd(\ell_1,\ldots,\ell_{r-1})}n^{s_1+\cdots+s_r+s_{r+1}-1}\chi_1(\frac{\ell_1}{n})\cdots\chi_{r-1}(\frac{\ell_{r-1}}{n})\chi_r(n)}{\ell_1^{s_1}\cdots\ell_{r-1}^{s_{r-1}}}\\
&\quad\times\Psi(s_{r+1},s_r+s_{r+1};\pm2\pi i(\ell_1+\cdots+\ell_{r-1})/q)
\end{aligned}
$$

を定める．また,

$$
\kappa_j=\kappa(\chi_j)=\begin{cases}0 & if \quad \chi_j(-1)=1\\ 1 & if \quad \chi_j(-1)=-1\end{cases}
$$

とし, $\tau(\chi)=\sum_{a=1}^{q}\chi(a)e^{2\pi i\frac{a}{q}}$ を Gauss 和とする．このとき, 本稿の主結果である以下が得られる:

Theorem 2.1. *primitive* な *Dirichlet* 指標 χ_r *mod* $q>1$ に対して,

$$
\begin{aligned}
&L_{MT,r}(s_1,\ldots,s_r,s_{r+1};\chi_1,\ldots,\chi_r)\\
&=\left(\frac{2\pi}{q}\right)^{s_r+s_{r+1}-1}\tau(\chi_r)i^{-\kappa_r}\Gamma(1-s_r)\\
&\quad\times\Big\{e^{\pi i\frac{s_r+s_{r+1}+\kappa_r-1}{2}}F^{+}(s_1,\ldots,s_r,s_{r+1};\chi_1,\ldots,\chi_{r-1},\overline{\chi}_r)\\
&\qquad+e^{-\pi i\frac{s_r+s_{r+1}+\kappa_r-1}{2}}F^{-}(s_1,\ldots,s_r,s_{r+1};\chi_1,\ldots,\chi_{r-1},\overline{\chi}_r)\Big\}.
\end{aligned}
$$

が成り立つ．

この主結果で, $L_{MT,r}(s_1,\ldots,s_r,s_{r+1};\chi_1,\ldots,\chi_r)$ と $L_{MT,r}(-s_1,\ldots,-s_{r-1},1-s_{r+1},1-s_r;\chi_1,\ldots,\chi_r)$ を組み合わせれば, Thoerem 1.2の χ 類似の式が得られる．特に, $q=1$ とするとThoerem 1.2と一致する．岡本-小野塚 [11] は松本 [9] が用いた Hankel contour 積分 ([13, Section 12.22, p. 245] 参照) を Mordell-Tornheim 型多重ゼータ関数に応用することで Theorem 1.2を証明したが, 今回は Mellin-Barnes 積分を用いることによって Thoerem 2.1の証明を与えた．これは

$$
(1+\lambda)^{-s}=\frac{1}{2\pi i}\int_{(c)}\frac{\Gamma(s+z)\Gamma(-z)}{\Gamma(s)}\lambda^{z}dz, \tag{2.2}
$$

ただし, $s,\lambda\in\mathbb{C}$, $\sigma=\mathrm{Re}(s)>0,|\arg\lambda|<\pi,\lambda\neq0$ であり, $c\in\mathbb{R}$ は $-\sigma<c<0$ を満たし, 積分路 (c) は虚軸に平行な直線 $\mathrm{Re}(z)=c$ である ([13, Section 14.51, p. 289, Corollary] 参照)．このMellin-Banes 積分を用いるアイディアは木内-谷川-Zhai [4, Section 2] から来ており, [4, Section 2]で彼らは Euler-Zagier 型 2 重ゼータ関数 (1.3) の Mellin-Barnes 積分表示と Tricomi 型合流超幾何関数 (1.4) の Mellin-Banes 積分表示

$$
\Psi(a,c;x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{(\gamma)}\frac{\Gamma(a+z)\Gamma(-z)\Gamma(1-c-z)}{\Gamma(a)\Gamma(a-c+1)}x^{z}dz \tag{2.3}
$$

を結びつけた．ただし, $-\mathrm{Re}(a)<\gamma<\min\{0,1-\mathrm{Re}(c)\},-3\pi/2<\arg x<3\pi/2$ ([3, 6.5 (5)])．本稿では [4, Section 2] の手法を Mordell-Tornheim 型多重 L-関数に一般化することで主結果の証明を与えた．次の Section でその証明の概略について説明していく．

3 主結果の証明の概略

ここでは主結果である Theorem 2.1の証明の概略を述べる．最初に $(s_1,\dots,s_r,s_{r+1})\in\mathbb{C}^{r+1}$ は絶対収束領域 (1.2) に入っていると仮定する．このとき Mellin-Banes 積分 (2.2) を適用することで,

$$\begin{aligned}
&L_{MT,r}(s_1,\dots,s_r,s_{r+1};\chi_1,\dots,\chi_r)\\
&=\sum_{m_1,\dots,m_r=1}^{\infty}\frac{\chi_1(m_1)\dots\chi_r(m_r)}{m_1^{s_1}\dots m_r^{s_r}\left(m_r\left(1+\frac{m_1+\cdots+m_{r-1}}{m_r}\right)\right)^{s_{r+1}}}\\
&=\frac{1}{2\pi i}\int_{(c)}\frac{\Gamma(s_{r+1}+z)\Gamma(-z)}{\Gamma(s_{r+1})}L_{MT,r-1}(s_1,\dots,s_{r-1},-z;\chi_1,\dots,\chi_{r-1})\\
&\times L(s_r+s_{r+1}+z,\chi_r)dz
\end{aligned}$$

を得る．ただし, $\max\{1-\sigma_r-\sigma_{r+1},-\sigma_{r+1}\}<c<\min_{1\le j\le r-1}\{0,\sum_{\ell=1}^{j}\mathrm{Re}(s_{k_\ell})-j\}$ $(1\le k_1<k_2<\cdots<k_j\le r-1)$. ここで $\sigma_r<0$ を仮定する．このとき $-\sigma_{r+1}<-\sigma_r-\sigma_{r+1}<1-\sigma_r-\sigma_{r+1}$ となるので $-\sigma_{r+1}<\eta<-\sigma_r-\sigma_{r+1}$ となるような $\eta\in\mathbb{R}$ をとる．

積分路を (c) から (η) へ左へ移動させて, さらに Dirichlet L-関数の関数等式

$$L(1-s,\chi)=\varepsilon(\chi)L(s,\overline{\chi})2^{1-s}\pi^{-s}q^{s-\frac{1}{2}}\Gamma(s)\cos\frac{\pi(s-\kappa)}{2} \tag{3.1}$$

を用いて (ただし, $\varepsilon(\chi)=\tau(\chi)/i^{\kappa_j}\sqrt{q}$) 計算すると,

$$\begin{aligned}
&L_{MT,r}(s_1,\dots,s_r,s_{r+1};\chi_1,\dots,\chi_r)\\
&=\frac{1}{2\pi i}\int_{(\eta)}\frac{\Gamma(s_{r+1}+z)\Gamma(-z)}{\Gamma(s_{r+1})}L_{MT,r-1}(s_1,\dots,s_{r-1},-z;\chi_1,\dots,\chi_{r-1})\\
&\quad\times\varepsilon(\chi_r)\frac{(2\pi)^{s_r+s_{r+1}+z}}{\pi}q^{\frac{1}{2}-s_r-s_{r+1}-z}\Gamma(1-s_r-s_{r+1}-z)L(1-s_r-s_{r+1}-z,\overline{\chi_r})\\
&\quad\times\cos\frac{\pi(1-s_r-s_{r+1}-z-\kappa_r)}{2}dz.\\
&=q^{-\frac{1}{2}}\varepsilon(\chi_r)\left(\frac{2\pi}{q}\right)^{s_r+s_{r+1}-1}\\
&\quad\times\sum_{\ell_1,\dots,\ell_{r-1}\ge1}\frac{\sum_{n|\gcd(\ell_1,\dots,\ell_{r-1})}n^{s_1+\cdots+s_r+s_{r+1}-1}\chi_1(\frac{\ell_1}{n})\dots\chi_{r-1}(\frac{\ell_{r-1}}{n})\overline{\chi_r}(n)}{\ell_1^{s_1}\dots\ell_{r-1}^{s_{r-1}}}\\
&\quad\times\frac{1}{2\pi i}\int_{(\eta)}\frac{\Gamma(s_{r+1}+z)\Gamma(-z)}{\Gamma(s_{r+1})}\Gamma(1-s_r-s_{r+1}-z)\\
&\quad\times\left(e^{\pi i\left(\frac{s_r+s_{r+1}+\kappa_r-1}{2}+\frac{z}{2}\right)}+e^{-\pi i\left(\frac{s_r+s_{r+1}+\kappa_r-1}{2}+\frac{z}{2}\right)}\right)\left(\frac{2\pi}{q}(\ell_1+\cdots+\ell_{r-1})\right)^{z}dz.
\end{aligned}$$

ここで (2.3) を用いることで

$$\begin{aligned}
&L_{MT,r}(s_1,\dots,s_r,s_{r+1};\chi_1,\dots,\chi_r)\\
&=q^{-\frac{1}{2}}\varepsilon(\chi_r)\left(\frac{2\pi}{q}\right)^{s_r+s_{r+1}-1}\Gamma(1-s_r)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\times \sum_{\ell_1,\ldots,\ell_{r-1}\geq 1} \frac{\sum_{n|\gcd(\ell_1,\ldots,\ell_{r-1})} n^{s_1+\cdots+s_r+s_{r+1}-1}\chi_1(\frac{\ell_1}{n})\cdots\chi_{r-1}(\frac{\ell_{r-1}}{n})\overline{\chi_r}(n)}{\ell_1^{s_1}\cdots\ell_{r-1}^{s_{r-1}}} \\
&\times \Big\{ e^{\pi i\frac{s_r+s_{r+1}+\kappa_r-1}{2}}\Psi(s_{r+1},s_r+s_{r+1};2\pi i(\ell_1+\cdots+\ell_{r-1})/q) \\
&\quad + e^{-\pi i\frac{s_r+s_{r+1}+\kappa_r-1}{2}}\Psi(s_{r+1},s_r+s_{r+1};-2\pi i(\ell_1+\cdots+\ell_{r-1})/q)\Big\}. \qquad (3.2)
\end{aligned}
$$

この等式 (3.2) は Mordell-Tornheim 型多重 L-関数の絶対収束領域 (1.2) かつ, $\sigma_r < 0$ でのみでしか意味を持たないが, $\Psi(a,c;x)$ の漸近公式

$$
\Psi(a,c;x) = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{(-1)^k(a-c+1)_k(a)_k}{k!}x^{-a-k} + \rho_N(a,c;x)
$$

(ただし, N は任意の非負整数, $(a)_k = \Gamma(a+k)/\Gamma(k)$ は Pochhammer 記号) を用いることで, (3.2) は $\mathbb{C}^{r+1}$ 上全域へ有理型へ接続することができる.

最後に Tricomi 型合流超幾何関数 $\Psi(a,c;x)$ の反転公式 [3, 6.5 (6)]

$$
\Psi(a,c;x) = x^{1-c}\Psi(a-c+1,2-c;x)
$$

を用いることで多重ゼータ関数の関数等式は Tricomi 型合流超幾何関数の対称性へ帰着される.

Remark 3.1. 主結果の Theorem 2.1では, Thoerem 1.2と違い, modefied 関数 g_r は現れない. これは primitive な Dirichlet 指標の L-関数は Riemann ゼータ関数と違い, $s=1$ で正則であるから Mellin-Barnes 積分の積分路を移動する際に留数が出てこないためである.

Remark 3.2. Mellin-Banes 積分を用いた今回の手法は (1.1) にも適用できて, (3.1) の代わりに Riemann ゼータ関数の関数の関数等式を使えば, Thoerem 1.2の別証明を与える.

4 特殊な場合

最後に, $r=2$ の場合 Theorem 2.1は小森-松本-津村 [6] による 2 重 L-関数の関数等式を復元することを紹介する. 小森-松本-津村 [6] は, χ_1, χ_2 は $q>1$ を法とする primitive な Dirichlet 指標に対して,

$$
L_2^{\sqcup\!\sqcup}(s_1,s_2;\chi_1,\chi_2) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\chi_1(m)\chi_2(n)}{m^{s_1}(m+n)^{s_2}}
$$

を定め, 以下の関数等式を証明した ([6, Corollary 2.3]):

$$
\left(\frac{2\pi i}{q}\right)^{\frac{1-s_1-s_2}{2}}\frac{\Gamma(s_2)}{\tau(\chi_1)}L_2^{\sqcup\!\sqcup}(s_1,s_2;\chi_1,\chi_2) = \left(\frac{2\pi i}{q}\right)^{\frac{s_1+s_2-1}{2}}\frac{\Gamma(1-s_1)}{\tau(\overline{\chi_1})}L_2^{\sqcup\!\sqcup}(1-s_2,1-s_1;\overline{\chi_2},\overline{\chi_1})
$$

が超平面

$$
\begin{cases} s_1+s_2 = 2k+1 & (k\in\mathbb{Z}, \chi_1(-1)\chi_2(-1)=1) \\ s_1+s_2 = 2k & (k\in\mathbb{Z}, \chi_1(-1)\chi_2(-1)=-1) \end{cases} \qquad (4.1)
$$

上で成り立つ.

primitive な Dirichlet 指標 $\chi_1, \chi_2 \mod q > 1$ に対して，$L_{MT,2}(0, s_1, s_2; \chi_1, \chi_2) = L_2^{ш}(s_1, s_2; \chi_1, \chi_2)$ であり，超平面 (4.1) 上では合流超幾何関数を含む項は消えるので，Theorem 2.1は [6, Corollary 2.3] の Mordell-Tornheim 型多重 L-関数への一般化である．

参考文献

[1] Akiyama, S., Egami, S., Tanigawa, Y.: Analytic continuation of multiple zeta-functions and their values at non-positive integers, Acta Arith., **98**, 107-–116 (2001)

[2] Choie, Y., Matsumoto, K.: Functional equations for double series of Euler type with coefficients, Adv. Math, **292** (2016), 529-–557.

[3] Erdélyi, A., Magnus, W., Oberhettinger, F., Tricomi, F. G.: Higher Transcendental functions I, McGraw-Hill, New York (1953)

[4] Kiuchi, I., Tanigawa, Y., Zhai W.: Analytic properties of double zeta-functions, Indag. Math. (N.S.) **21**(1-2), 16-–29, (2011)

[5] Komori, Y., Matsumoto, K., Tsumora, H.: Functional equations and functional relations for the Euler double zeta-function and its generalization of Eisenstein type, Publ. Math. Debrecen **77**(1-2), 15–31 (2010)

[6] Komori, Y., Matsumoto, K., Tsumora, H.: Functional equations for double L-functions and values at non-positive integers, Int. J. Number Theory **7**, 1441–1461 (2011)

[7] Matsumoto, K.: On analytic continuation of various multile zeta-functions, in Number Theory for the Millennium II, Proc. of the Millennial Conference on Number Theory, M. A. Bennett et al. (eds.), pp. 417–440, A K Peters, Wellesley (2002)

[8] Matsumoto, K.: On Mordell-Tornheim and other multiple zeta-functions, in: Proceedings of the Session in Analytic Number Theory and Diophantine Equations (Bonn, 2002), D. R. Heath-Brown and B. Z. Moroz (eds.), Bonner Math. Schriften 360, Bonn, no. 25, 17 pp. (2003)

[9] Matsumoto, K.: Functional equations for double zeta-functions, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **136**(1), 1–7, (2004)

[10] Matsumoto, K.: Analytic properties of multiple zeta-functions in several variables, in "Number Theory: Tradition and Modernization", Proc. 3rd China-Japan Seminar (Xi'an, 2004), (eds. W. Zhang and Y. Tanigawa), Springer, pp. 153-–173 (2006)

[11] Okamoto, T., Onozuka, T.: Functional equation for the Mordell-Tornheim multiple zeta-function, Funct. Approx. Comment. Math. **55**(2), 227–241, (2016)

[12] Wu, M.: On analytic continuation of Mordell-Tornheim and Apostol-Vu L-functions, Master Thesis, Nagoya University (2003)

[13] Whittaker, E.T., Watson, G.N.: A Course of Modern Analysis. Cambridge University Press, Cambridge (1927)

[14] Zhao, J. Q.: Analytic continuation of multiple zeta function, Proc. Amer. Math. Soc. **128**,

1275–1283 (2000)