サイクルの二乗グラフ上の乱歩における期待到達時間の解析

早稲田大学大学院 基幹理工学研究科 数学応用数理専攻
田中 優帆（Yuuho TANAKA）

1 はじめに

本研究は，土井 義耀氏，今野 紀雄氏，中上川 友樹氏，佐久間 雅氏，瀬川 悦生氏，篠原 英裕氏，田村 駿也氏，豊田 晃典氏との共同研究である．

端末を頂点，ケーブルを辺と見なすことで，コンピューターネットワークはグラフとして描くことができる．コンピューターネットワークにおいて，ある端末から目的の端末までパケットを届けるためにかかる時間の指標は，グラフにおける期待到達時間で表現できる．

定義 1.1 (期待到達時間)**.** u, v をグラフの頂点とする．このとき，頂点 u から（単純）乱歩を開始し，はじめて頂点 v へ到達するまでのステップ数の期待値のことを u から v への期待到達時間と呼ぶ．頂点 u から頂点 v への期待到達時間を $h(G; u, v)$ で表す．

サイクルの二乗グラフの期待到達時間を表す公式は，実は既に 2014 年に Chair [1] によって与えられていた．これはラプラシアン行列の固有値，固有ベクトルを用いて，グラフの 2 点間の抵抗を表す公式を適用することによって導いている．

定理 1.1 ([1])**.** サイクルの二乗グラフ C_N^2 における期待到達時間は以下で与えられる．
$N = 2n$ ならば，

$$h(C_N^2; 0, \ell) = \frac{2}{5}\ell\,(N-\ell) + (-1)^{\ell+1}\,\frac{2N}{\sqrt{5}}F_\ell^2\left(\frac{1+\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^N}{1-\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^N}\right) + (-1)^\ell\,\frac{2N}{5}F_{2\ell}.$$

$N = 2n+1$ ならば，

$$h(C_N^2; 0, \ell) = \frac{2}{5}\ell\,(N-\ell) + (-1)^{\ell+1}\,\frac{2N}{\sqrt{5}}F_\ell^2\left(\frac{1-\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^N}{1+(\frac{3-\sqrt{5}}{2})^N}\right) + (-1)^\ell\,\frac{2N}{5}F_{2\ell}.$$

上記の通り，その式は閉じた式，すなわち，$\sum$ や $\ldots$ を使わずに表すことができるような式であったが，頂点数の偶奇に依った複雑な式であった．しかし，我々は，考案した連立一次方程式を用いる手法により，頂点数の偶奇に依らず，かつ，先行研究よりも簡単な閉じた式で期待到達時間を表すことができたのである．さらに，期待到達時間の公式から抵抗や Kirchhoff index の公式も得ることができた．

第 2 節では，サイクルグラフの期待到達時間を与える．第 3 節では，サイクルグラフから辺を増やした，サイクルの二乗グラフの期待到達時間を与える．さらに，抵抗や Kirchhoff index の公式も与える．第 4 節では，無向辺ではなく，有向辺を持つサイクルの二乗グラフに対象を変えて期待到達時間を与える．無向辺を持つサイクルの二乗グラフの場合と同様に，頂点数の偶奇に依らない形で期待到達時間の公式を表すことができた．

2 サイクルグラフ

定義 2.1 (サイクルグラフ). N 頂点サイクルグラフ $C_N = (V(C_N), E(C_N))$（$N \geq 5$）とは，頂点集合 $V(C_N) = \mathbb{Z}_N$（N 次巡回群），辺集合 $E(C_N) = \{\{i,j\} \mid i,j \in \mathbb{Z}_N,\ i-j=1\}$ により定義される．

ここで，乱歩は，一般性を失わず，頂点 0 から開始してよい．さらに，サイクルグラフの対称性により，

$$h(C_N;0,\ell) = h(C_N;k,k+\ell) = h(C_N;k+\ell,k) \quad (\forall k,\ell \in \mathbb{Z})$$

が成り立つ．

具体例として，C_7 における期待到達時間を考える．このとき，サイクルの対称性より，

$$h(C_7;0,1) = h(C_7;0,6),\ h(C_7;0,2) = h(C_7;0,5),\ h(C_7;0,3) = h(C_7;0,4).$$

したがって，期待到達時間は $h(C_7;0,3)$ まで考えれば良いから，以下が成り立つ．

$$\begin{cases} h(C_7;0,1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(1 + h(C_7;6,1)) \\ h(C_7;0,2) = \frac{1}{2}(1 + h(C_7;1,2)) + \frac{1}{2}(1 + h(C_7;6,2)) \\ h(C_7;0,3) = \frac{1}{2}(1 + h(C_7;1,3)) + \frac{1}{2}(1 + h(C_7;6,3)) \end{cases}$$

さらに，上記の式は，以下のように書き直せる．

$$\begin{cases} h(C_7;0,1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(1 + h(C_7;0,2)) \\ h(C_7;0,2) = \frac{1}{2}(1 + h(C_7;0,1)) + \frac{1}{2}(1 + h(C_7;0,3)) \\ h(C_7;0,3) = \frac{1}{2}(1 + h(C_7;0,2)) + \frac{1}{2}(1 + h(C_7;0,3)) \end{cases}$$

この連立方程式を解くと，以下のような期待到達時間の公式が得られる．

$$h(C_N;0,\ell) = \ell(7-\ell).$$

一般の C_N に拡張させると，サイクルグラフ C_N（$N \geq 5$）に対して，以下のような期待到達時間の公式が得られる．

$$h(C_N;0,\ell) = \ell(N-\ell).$$

3 サイクルの二乗グラフ

3.1 期待到達時間

対称性を高く保ったまま，サイクルグラフに辺を増やすとサイクルの二乗グラフと呼ばれるグラフになる．これについても考えてみよう．

定義 3.1 (サイクルの二乗グラフ). N 頂点サイクルの二乗グラフ $C_N^2 = (V(C_N^2), E(C_N^2))$（$N \geq 5$）とは，頂点集合 $V(C_N^2) = \mathbb{Z}_N$（N 次巡回群），辺集合 $E(C_N^2) = \{\{i,j\} \mid i,j \in \mathbb{Z}_N,\ i-j=1,2\}$ により定義される．

定義 3.2 (Fibonacci 数列). 漸化式 $F_0 = 0, F_1 = 1, F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$（$n = 0,1,2,\ldots$）によって決まる数列 F_n を Fibonacci 数列という.

サイクルグラフと同様に，乱歩は，一般性を失わず，頂点 0 から開始してよい．さらに，対称性により，

$$h(C_N^2;0,\ell)=h(C_N^2;k,k+\ell)=h(C_N^2;k+\ell,k)\quad(\forall k,\ell\in\mathbb{Z})$$

が成り立つ．

このとき，以下のような連立方程式が得られる．N が奇数の時，

$$\begin{bmatrix}3&-1&-1&0&0&0&0&\cdots&0\\-1&4&-1&-1&0&0&0&\cdots&0\\-1&-1&4&-1&-1&0&0&\cdots&0\\0&-1&-1&4&-1&-1&0&\cdots&0\\\vdots&\ddots&\ddots&\ddots&\ddots&\ddots&\ddots&\ddots&\vdots\\0&\cdots&0&-1&-1&4&-1&-1&0\\0&\cdots&0&0&-1&-1&4&-1&-1\\0&\cdots&0&0&0&-1&-1&4&-2\\0&\cdots&0&0&0&0&-1&-2&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}h(C_N^2;0,1)\\h(C_N^2;0,2)\\h(C_N^2;0,3)\\h(C_N^2;0,4)\\\vdots\\h(C_N^2;0,\lfloor\frac{N}{2}\rfloor-2)\\h(C_N^2;0,\lfloor\frac{N}{2}\rfloor-1)\\h(C_N^2;0,\lfloor\frac{N}{2}\rfloor)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\4\\4\\4\\\vdots\\4\\4\\4\end{bmatrix}.$$

N が偶数の時，

$$\begin{bmatrix}3&-1&-1&0&0&0&0&\cdots&0\\-1&4&-1&-1&0&0&0&\cdots&0\\-1&-1&4&-1&-1&0&0&\cdots&0\\0&-1&-1&4&-1&-1&0&\cdots&0\\\vdots&\ddots&\ddots&\ddots&\ddots&\ddots&\ddots&\ddots&\vdots\\0&\cdots&0&-1&-1&4&-1&-1&0\\0&\cdots&0&0&-1&-1&4&-1&-1\\0&\cdots&0&0&0&-1&-1&3&-1\\0&\cdots&0&0&0&0&-1&-1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}h(C_N^2;0,1)\\h(C_N^2;0,2)\\h(C_N^2;0,3)\\h(C_N^2;0,4)\\\vdots\\h(C_N^2;0,\lfloor\frac{N}{2}\rfloor-2)\\h(C_N^2;0,\lfloor\frac{N}{2}\rfloor-1)\\h(C_N^2;0,\lfloor\frac{N}{2}\rfloor)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\4\\4\\4\\\vdots\\4\\4\\2\end{bmatrix}.$$

サイクルグラフやサイクルの二乗グラフでは，係数行列において，頂点数が偶数の場合と奇数の場合で値が異なる行や列が存在する．例えばサイクルの二乗グラフの場合の係数は下 2 行の成分が異なっており，定数ベクトルの一番最後の行の成分も異なっていることがわかる．

$\lfloor\frac{N}{2}\rfloor\times\lfloor\frac{N}{2}\rfloor$ の係数行列を H_N とし，行列 $U_N=[U_N(i,j)]$ を次のように定義する．

$$U_N(i,j)=\begin{cases}1&(i-j\le 0)\\0&(\text{otherwise})\end{cases}$$

さらに，以後の議論に必要となる行列 $W_N=[W_N(i,j)],D_N=[D_N(i,j)]$ を以下のように定義すると，定理 3.1 が成り立つ．

$$W_N(i,j)=\begin{cases}1&(i=j)\\\frac{F_{2j-1}}{F_{2j+1}}&(i=j-1)\\0&(\text{otherwise})\end{cases},\ D_N(i,j)=\begin{cases}\frac{F_{2j+1}}{F_{2j-1}}&(i=j,\ i\neq\lfloor\frac{N}{2}\rfloor)\\\frac{F_N}{F_{2\lfloor\frac{N}{2}\rfloor-1}}&(i=j=\lfloor\frac{N}{2}\rfloor)\\0&(\text{otherwise})\end{cases}.$$

定理 3.1 ([2])**.**

$$H_N=U_N^{-1}W_ND_N{}^tW_N{}^tU_N^{-1}.$$

ここで，新しい変数ベクトルとして $\mathbf{y} = {}^tU_N^{-1} \begin{bmatrix} h(C_N^2;0,1) \\ h(C_N^2;0,2) \\ \vdots \\ h(C_N^2;0,\lfloor \frac{N}{2} \rfloor) \end{bmatrix}$ を用意すると，

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_\ell \\ \vdots \\ y_{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h(C_N^2;0,1) \\ h(C_N^2;0,2) - h(C_N^2;0,1) \\ \vdots \\ h(C_N^2;0,\ell) - h(C_N^2;0,\ell-1) \\ \vdots \\ h(C_N^2;0,\lfloor \frac{N}{2} \rfloor) - h(C_N^2;0,\lfloor \frac{N}{2} \rfloor - 1) \end{bmatrix} = 2{}^tW_N^{-1}D_N^{-1}W_N^{-1} \begin{bmatrix} N-1 \\ N-3 \\ \vdots \\ N-2\ell+1 \\ \vdots \\ N-1-2(\lfloor \frac{N}{2} \rfloor - 1) \end{bmatrix}$$

と，書き表すことができる．

さらに，新しい変数ベクトル $\mathbf{z} = {}^tW_N\mathbf{y}$ を用意すると，行列方程式は，

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor - 1} \\ z_{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 + \frac{F_1}{F_3}y_2 \\ y_2 + \frac{F_3}{F_5}y_3 \\ \vdots \\ y_{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor - 1} + \frac{F_{2\lfloor \frac{N}{2} \rfloor - 3}}{F_{2\lfloor \frac{N}{2} \rfloor - 1}} y_{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor} \\ y_{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor} \end{bmatrix} = 2D_N^{-1}W_N^{-1} \begin{bmatrix} N-1 \\ N-3 \\ \vdots \\ N-1-2(\lfloor \frac{N}{2} \rfloor - 2) \\ N-1-2(\lfloor \frac{N}{2} \rfloor - 1) \end{bmatrix}$$

と書き表すことができる．この行列方程式を解くと次の補題が得られる．

補題 3.1. $1 \leq \ell \leq \lfloor \frac{N}{2} \rfloor - 1$ のとき，

$$z_\ell = \frac{2}{5}\left\{ N - 2\ell + 1 + \frac{(N-2\ell-1)F_{2\ell-1} + 2N(-1)^{\ell-1}}{F_{2\ell+1}} \right\}$$

である．ただし，$\ell = \lfloor \frac{N}{2} \rfloor$ のとき，

$$z_{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor} = \frac{2}{5F_N}\left\{ \left(N - 2\left\lfloor \frac{N}{2} \right\rfloor \right)\left(F_{2\lfloor \frac{N}{2} \rfloor + 1} + F_{2\lfloor \frac{N}{2} \rfloor - 1} \right) + F_{2\lfloor \frac{N}{2} \rfloor} + 2N(-1)^{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor - 1} \right\}$$

である．

証明. z_ℓ の一般式は以下の行列計算をすることによって，得ることができる．

$$\begin{aligned} z_\ell &= 2D_N^{-1}W_N \begin{bmatrix} N-1 \\ N-3 \\ \vdots \\ 2 \end{bmatrix} \\ &= \frac{2}{F_{2\ell+1}} \sum_{k=1}^{\ell} (-1)^{\ell-k}(N-2k+1)F_{2k-1} \\ &= \frac{2}{F_{2\ell+1}} \left\{ (N+1)\sum_{k=1}^{\ell}(-1)^{\ell-k}F_{2k-1} - 2\sum_{k=1}^{\ell} kF_{2k-1} \right\} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{2}{F_{2\ell+1}} \left\{ (N+1)F_\ell^2 - \frac{2}{5}F_{2\ell-1} + \frac{2}{5}(-1)^{\ell-1}(2\ell-1) - 2\ell F_\ell^2 \right\} \\
&= \frac{2}{5F_{2\ell+1}} \left\{ (N-2\ell+1)(F_{2\ell-1}+F_{2\ell+1}) + (-1)^{\ell-1}(2N-4\ell+2) - 2F_{2\ell-1} + (-1)^{\ell-1}(4\ell-2) \right\} \\
&= \frac{2}{5F_{2\ell+1}} \left\{ (N-2\ell-1)F_{2\ell-1} + (N-2\ell+1)F_{2\ell+1} + 2N(-1)^{\ell-1} \right\} \\
&= \frac{2}{5} \left\{ (N-2\ell+1) + \frac{(N-2\ell-1)F_{2\ell-1} + 2N(-1)^{\ell-1}}{F_{2\ell+1}} \right\}
\end{aligned}
$$

また，$\mathbf{y} = {}^tW_N^{-1}\mathbf{z}$ と補題 3.1 より，以下の補題が得られる．

補題 3.2.

$$
y_\ell = \frac{2}{5}\left\{ (N-2\ell+1) + 2N\frac{(-1)^{\ell-1}F_{N-2\ell+1}}{F_N} \right\}
$$

証明. z_ℓ を y_ℓ について解くと，以下のように書ける．

$$
y_\ell = F_{2\ell-1} \sum_{i=\ell}^{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor -1} (-1)^{\ell+i} \frac{z_i}{F_{2i-1}} + (-1)^{\ell+\lfloor \frac{N}{2} \rfloor} \frac{F_{2\ell-1}}{F_{2\lfloor \frac{N}{2} \rfloor -1}} z_{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor}
$$

よって，

$$
\begin{aligned}
y_\ell = &\frac{2}{5}F_{2\ell-1} \sum_{i=\ell}^{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor -1} (-1)^{\ell+i} \frac{(N-2i+1)F_{2i+1} + (N-2i-1)F_{2i-1} + 2N(-1)^{i-1}}{F_{2i-1}F_{2i+1}} \\
&+ \frac{2}{5}F_{2\ell-1}\frac{(-1)^{\ell+\lfloor \frac{N}{2} \rfloor}}{F_N F_{2\lfloor \frac{N}{2} \rfloor -1}} \left\{ \left(N - 2\left\lfloor \frac{N}{2} \right\rfloor + 1 \right) F_{2\lfloor \frac{N}{2} \rfloor +1} + \left(N - 2\left\lfloor \frac{N}{2} \right\rfloor - 1 \right) F_{2\lfloor \frac{N}{2} \rfloor -1} + 2N(-1)^{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor -1} \right\} \\
= &\frac{2}{5}F_{2\ell-1} \left[\sum_{i=l}^{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor -1} (-1)^{\ell+i} \left\{ \frac{(N-2i-1)(F_{2i+1}+F_{2i-1}) + 2F_{2i+1} - 2N(-1)^i}{F_{2i-1}F_{2i+1}} \right\} \right. \\
&\left. + \frac{(-1)^{\ell+\lfloor \frac{N}{2} \rfloor}}{F_N F_{2\lfloor \frac{N}{2} \rfloor -1}} \left\{ (N - 2\left\lfloor \frac{N}{2} \right\rfloor + 1)F_{2\lfloor \frac{N}{2} \rfloor +1} + (N - 2\left\lfloor \frac{N}{2} \right\rfloor - 1)F_{2\lfloor \frac{N}{2} \rfloor -1} + 2N(-1)^{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor -1)} \right\} \right] \\
= &\frac{2}{5}F_{2\ell-1} \left\{ \frac{N-2\ell+1}{F_{2l-1}} + 2N(-1)^{\ell-1} \sum_{i=\ell}^{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor -1} \frac{1}{F_{2i-1}F_{2i+1}} + \frac{2N(-1)^{\ell-1}}{F_N F_{2\lfloor \frac{N}{2} \rfloor -1}} \right\} \\
= &\frac{2}{5}F_{2\ell-1} \left\{ \frac{N-2\ell+1}{F_{2\ell-1}} + 2N(-1)^{\ell-1} \sum_{i=l}^{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor -1} \left(\frac{F_{2i+2}}{F_{2i-1}} - \frac{F_{2i}}{F_{2i-1}} \right) + \frac{2N(-1)^{\ell-1}}{F_N F_{2\lfloor \frac{N}{2} \rfloor -1}} \right\} \\
= &\frac{2}{5}F_{2\ell-1} \left\{ \frac{N-2\ell+1}{F_{2\ell-1}} + 2N(-1)^{\ell-1} \left(\frac{F_{2\lfloor \frac{N}{2} \rfloor}}{F_{2\lfloor \frac{N}{2} \rfloor -1}} - \frac{F_{2\ell}}{F_{2\ell-1}} \right) + 2N(-1)^{\ell-1} \left(\frac{F_{N+1}}{F_N} - \frac{F_{2\lfloor \frac{N}{2} \rfloor}}{F_{2\lfloor \frac{N}{2} \rfloor -1}} \right) \right\} \\
= &\frac{2}{5}F_{2\ell-1} \left\{ \frac{N-2\ell+1}{F_{2\ell-1}} + 2N(-1)^{\ell-1} \left(\frac{F_N}{F_{N-1}} - \frac{F_{2\ell}}{F_{2\ell-1}} + \frac{F_{N+1}}{F_N} - \frac{F_N}{F_{N-1}} \right) \right\} \\
= &\frac{2}{5} \left\{ N - 2\ell + 1 + 2N\frac{(-1)^{\ell-1}F_{N-2\ell+1}}{F_N} \right\}
\end{aligned}
$$

補題 3.1，3.2 に，$h(C_N^2; 0, \ell) = \sum_{i=1}^{\ell} y_i$ という事実を組み合わせると，次のように $h(C_N^2; 0, \ell)$ についての簡明な閉じた式を得る．

定理 3.2 ([2])**.** グラフ C_N^2 において，点 0 から点 ℓ への期待到達時間 $h(C_N^2;0,\ell)$ は

$$h(C_N^2;0,\ell)=\frac{2}{5}\left\{\ell\,(N-\ell)+2N\frac{F_\ell\cdot F_{N-\ell}}{F_N}\right\}.$$

証明.

$$\begin{aligned}
h(C_N^2;0,\ell)&=\sum_{i=1}^{\ell}\frac{2}{5}\left\{(N-2i+1)+2N\frac{(-1)^{i-1}F_{N-2i+1}}{F_N}\right\}\\
&=\frac{2}{5}\ell(N+1)-\frac{4}{5}\sum_{i=1}^{\ell}i-\frac{4N}{5F_N}\sum_{i=1}^{\ell}(-1)^i(F_{N-1}F_{2i-1}-F_NF_{2i-2})\\
&=\frac{2}{5}\ell(N-\ell)-\frac{4N}{5F_N}\left\{F_{N-1}\sum_{i=1}^{\ell}(-1)^iF_{2i-1}-F_N\sum_{i=1}^{\ell}(-1)^iF_{2i-2}\right\}\\
&=\frac{2}{5}\ell(N-\ell)+\frac{4N}{5F_N}\left\{(-1)^{\ell-1}F_{N-1}F_\ell^2+(-1)^\ell F_N\cdot F_{\ell-1}\cdot F_\ell\right\}\\
&=\frac{2}{5}\ell(N-\ell)+\frac{4N}{5F_N}F_\ell\cdot F_{N-\ell}\\
&=\frac{2}{5}\left\{\ell(N-\ell)+2N\frac{F_\ell\cdot F_{N-\ell}}{F_N}\right\}.
\end{aligned}$$

さらに，定理 3.1 より，以下のように H_N^{-1} の各成分を求めることができる．

$$H_N^{-1}(i,j)=\begin{cases}\dfrac{F_iF_jF_{N-i}F_{N-j}}{F_NF_{N-1}}+\displaystyle\sum_{k=1}^{i-1}\frac{F_{i-k}F_{j-k}F_{N-i-k}F_{N-j-k}}{F_{N-2k+1}F_{N-2k-1}} & (\text{if } i\le j),\\[2ex] \dfrac{F_iF_jF_{N-i}F_{N-j}}{F_NF_{N-1}}+\displaystyle\sum_{k=1}^{j-1}\frac{F_{i-k}F_{j-k}F_{N-i-k}F_{N-j-k}}{F_{N-2k+1}F_{N-2k-1}} & (\text{otherwise}).\end{cases}$$

これも用いると，以下の命題を得られる．

命題 3.1.

$$h(C_N^2;0,1)=\frac{2}{F_N}\sum_{i=0}^{N}F_iF_{N-i}.$$

Proof.

$$\begin{aligned}
h(C_N^2;0,1)&=4\sum_{j=1}^{\lfloor\frac{N}{2}\rfloor}H_N^{-1}(1,j)\\
&=4\sum_{j=1}^{\lfloor\frac{N}{2}\rfloor}\frac{F_1F_jF_{N-1}F_{N-j}}{F_NF_{N-1}}\\
&=4\sum_{j=1}^{\lfloor\frac{N}{2}\rfloor}\frac{F_jF_{N-j}}{F_N}\\
&=\frac{2}{F_N}\sum_{j=0}^{N}F_jF_{N-j}.
\end{aligned}$$

□

3.2　全域木，抵抗

定義 3.3 (全域木). 連結であり，閉路がないグラフを木という．グラフ G に対して，

$$E(G') \subseteq E(G), V(G') = V(G)$$

を満たす G' を G の全域部分グラフであるという．連結グラフ G における全域部分グラフ G' が木であるとき，G' をグラフ G の全域木という．$t(G)$ をグラフ G が持つ全域木の総数とする．また，$t(G; x, y)$ を G の 2 頂点 x, y を同一視したグラフ（ただし，多重辺ができた場合にはそれを残す）における全域木の総数と定義する．

定義 3.4 (グラフの抵抗). グラフ G の 2 頂点 x, y 間の抵抗値 $r(G; x, y)$ とは，G の各辺を 1ω の抵抗と見なして測定した頂点 x, y 間の抵抗値のことである．

グラフを用いて期待到達時間を求めることができると，ネットワークにおける経路の構築手順や経路の構成を知ることに有用な，グラフにおける全域木の総数を数え上げることも可能になる．また，その他にも，電気回路における抵抗値等も求めることができ，これはネットワークの複雑性を解析することに役に立つ．

まず，以降の議論に必要となる定理をいくつか紹介する．

定理 3.3 ([3]).

$$r(G; x, y) = \frac{t(G; x, y)}{t(G)}.$$

定理 3.4 ([5]).

$$r(G; x, y) = \frac{h(G; x, y) + h(G; y, x)}{|2E(G)|}.$$

定理 3.5 ([4]).

$$t(C_N^2) = F_N^2.$$

グラフ G の Kirchhoff index $Kf(G)$ を以下の式により定義すると，定理 3.6 が成り立つ．

$$Kf(G) := \sum_{i<j} r(G; i, j).$$

定理 3.6 ([2]).

$$\mathrm{Kf}(C_N^2) = \frac{N(N-1)(5N+17)}{300} + \frac{2N^2}{25}\frac{F_{N-1}}{F_N}.$$

Proof. 命題 3.1，定理 3.2 より，以下の式が導き出せる．

$$\sum_{i=0}^{N} F_i F_{N-i} = \frac{1}{5}((N-1)F_N + 2NF_{N-1}).$$

このとき，以下の式が導き出せる．

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Kf}(C_N^2) &= \sum_{x<y} r(C_N^2; x, y) \\
&= \sum_{i=1}^{N-1} (N-i) r(C_N^2; 0, i) \\
&= \sum_{i=1}^{N-1} (N-i) \frac{h(C_N^2; 0, i) + h(C_N^2; i, 0)}{2|E(C_N^2)|} \\
&= \sum_{i=1}^{N-1} (N-i) \frac{h(C_N^2; 0, i)}{2N} \\
&= \sum_{i=1}^{N-1} \frac{(N-i)}{5N} \left(i(N-i) + 2N \frac{F_i F_{N-i}}{F_N} \right) \\
&= \frac{1}{5} \left(N \sum_{i=1}^{N-1} i - \sum_{i=1}^{N-1} i^2 + \frac{2N}{F_N} \sum_{i=1}^{N-1} F_i F_{N-i} \right) - \frac{1}{5N} \left(N \sum_{i=1}^{N-1} i^2 - \sum_{i=1}^{N-1} i^3 + \frac{2N}{F_N} \sum_{i=1}^{N-1} i F_i F_{N-i} \right) \\
&= \frac{1}{5} \left(N \sum_{i=1}^{N-1} i - 2 \sum_{i=1}^{N-1} i^2 + \frac{2N}{F_N} \sum_{i=1}^{N-1} F_i F_{N-i} \right) - \frac{1}{5N} \left(- \sum_{i=1}^{N-1} i^3 + \frac{N^2}{F_N} \sum_{i=1}^{N-1} F_i F_{N-i} \right) \\
&= \frac{1}{5} \left(N \sum_{i=1}^{N-1} i - 2 \sum_{i=1}^{N-1} i^2 + \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N-1} i^3 + \frac{N}{F_N} \sum_{i=1}^{N-1} F_i F_{N-i} \right) \\
&= \frac{1}{5} \left(\frac{N^2(N-1)}{2} - \frac{N(N-1)(2N-1)}{3} + \frac{N(N-1)^2}{4} + \frac{N}{5F_N} ((N-1)F_N + 2NF_{N-1}) \right) \\
&= \frac{1}{5} \left(\frac{N(N-1)(N+1)}{12} + \frac{N}{5F_N} (2NF_{N-1} + (N-1)F_N) \right) \\
&= \frac{1}{5} \left(\frac{N(N-1)(N+1)}{12} + \frac{2N^2 F_{N-1}}{5F_N} + \frac{N(N-1)}{5} \right) \\
&= \frac{1}{5} \left(\frac{N(N-1)(5N+17)}{60} + \frac{2N^2 F_{N-1}}{5F_N} \right) \\
&= \frac{N(N-1)(5N+17)}{300} + \frac{2N^2}{25} \frac{F_{N-1}}{F_N}.
\end{aligned}
$$

□

さらに，以下の定理が成り立つ．

命題 3.2.

$$
t(C_N^2; 0, \ell) = \frac{F_N}{5} \left(\ell(N-\ell)F_N + 2NF_\ell F_{N-\ell} \right).
$$

Proof. 定理 3.2，3.3，3.4，3.5 より，以下の式が導き出せる．

$$\begin{aligned}
t(C_N^2;0,\ell) &= r(C_N^2;0,\ell)t(C_N^2) \\
&= \frac{h_N(0,\ell)F_N^2}{2} \\
&= \frac{F_N^2}{5}(\ell(N-\ell)+2N\frac{F_\ell F_{N-\ell}}{F_N}) \\
&= \frac{F_N}{5}(\ell(N-\ell)F_N+2NF_\ell F_{N-\ell}).
\end{aligned}$$

□

前節，本節で期待到達時間等を求めたグラフは無向グラフであり，サイクルの二乗グラフの期待到達時間の公式には Fibonacci 数が現れていた．

4 有向辺を持つサイクルの二乗グラフ

定義 4.1 (ケイリーグラフ)．G を群，S を G の部分集合とする．ケイリーグラフ $\mathrm{Cay}(G,S) = (V(\mathrm{Cay}(G,S)),E(\mathrm{Cay}(G,S)))$ とは，頂点集合 $V(\mathrm{Cay}(G,S)) = G$，辺集合 $E(\mathrm{Cay}(G,S)) = \{\{g,gs\} \mid g \in G,\ s \in S\}$ により定義される．

ケイリーグラフの定義より，C_N は $\mathrm{Cay}(\mathbb{Z}_N,\{\pm 1\})$，$C_N^2$ は $\mathrm{Cay}(\mathbb{Z}_N,\{\pm 1,\pm 2\})$ だと見なすことができる．有向辺を持つサイクルの二乗グラフとして，$\mathrm{Cay}(\mathbb{Z}_N,\{+1,+2\})$ を対象に，同様の手法で期待到達時間を求める．$X = \mathrm{Cay}(\mathbb{Z}_N,\{+1,+2\})$ とおく．このとき，以下のような連立方程式が得られる．

$$\begin{bmatrix}
2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\
-1 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
-1 & -1 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & -1 & -1 & 2 & \ddots & \vdots \\
\vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\
0 & \cdots & 0 & -1 & -1 & 2
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
h(X;0,1) \\ h(X;0,2) \\ h(X;0,3) \\ \vdots \\ h(X;0,N-2) \\ h(X;0,N-1)
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
2 \\ 2 \\ 2 \\ \vdots \\ 2 \\ 2
\end{bmatrix}.$$

$(N-1)\times(N-1)$ の係数行列を H_N とおくと，以下の定理が成り立つ．

定義 4.2 (Jacobsthal 数列)．漸化式 $J_0 = 0, J_1 = 1, J_{n+2} = J_{n+1} + 2J_n$（$n = 0,1,2,\ldots$）によって決まる数列 J_n を Jacobsthal 数列という.

定義 4.3 (Jacobsthal-Lucas 数列)．漸化式 $JL_0 = 2, JL_1 = 1, JL_{n+2} = JL_{n+1} + 2JL_n$（$n = 0,1,2,\ldots$）によって決まる数列 JL_n を Jacobsthal-Lucas 数列という.

X について H_N^{-1} の成分表示や期待到達時間の公式を与えることは，新たに発見した内容であり，Jacobsthal 数列や Jacobsthal-Lucas 数列を用いて，以下のような定理を得た．

定理 4.1 ([6])．行列 $H_N^{-1} = [H_N^{-1}(i,j)]$ の成分表示は以下の通りである．

$$H_N^{-1}(i,j) = \begin{cases}
\frac{J_i J_{N-i-1}}{J_N} & (j = i+1) \\
\frac{J_{i-j+1}(3J_{N-i+j-3}+JL_{N-i+j-3})-(-1)^{i+j}J_{j-1}J_{N-i-1}}{J_N} & (j < i+1) \\
\frac{J_i J_{N-j}(3J_{j-i-2}+JL_{j-i-2})}{J_N} & (j > i+1) \\
\frac{J_{N-1}}{J_N} & ((i,j) = (N-1,1))
\end{cases}$$

これを用いると，X に対しても期待到達時間の公式を与えることができる．

定理 4.2 ([6])**.** $1 \leq \ell \leq N-2$ のとき，

$$h(X;0,\ell) = \frac{2}{J_N}(J_\ell J_{N-\ell-1} + \sum_{1\leq j\leq \ell}(J_{\ell-j+1}(3J_{N-\ell+j-3} + JL_{N-\ell+j-3}) - (-1)^{\ell+j}J_{j-1}J_{N-\ell-1}) + \sum_{\ell+2\leq j\leq N-1}(J_\ell J_{N-j}(3J_{j-\ell-2} + JL_{j-\ell-2}))$$

である．ただし，$\ell = N-1$ のとき，

$$h(X;0,N-1) = \frac{2}{J_N}(J_{N-1} + \sum_{2\leq j\leq N-1}(J_{N-j}(3J_{j-2} + JL_{j-2})).$$

数列の関係式を用いれば，さらに簡明な式になる可能性もあり，それについては現在解析中である．また，全域木や抵抗値等についても，どのような式が与えられるのかは現在解析中である．

5 最後に

本講演では，C_N や C_N^2 における期待到達時間を，頂点数の偶奇に依らない閉じた式で与えた．さらに C_N^2 の抵抗や Kirchhoff index を与え，類似した有向グラフ $\mathrm{Cay}(\mathbb{Z}_n, \{+1,+2\})$ における期待到達時間についても得られた事実を述べた．なお，本稿の内容は，[2] に基づく．

今後の展望としては，グラフ $C_N^{2,3}$ や $C_N^{1,2,n}$，それらに類似した有向グラフにおける期待到達時間の公式や抵抗，Kirchhoff index を解析する事が考えられる．

参考文献

[1] N. Chair. : The Effective Resistance of the N-Cycle Graph with Four Nearest Neighbors, *Journal of Statistical Physics*, **154** (2014) 1177-1190.

[2] Y. Doi, N. Konno, T. Nakamigawa, T. Sakuma, E. Segawa, H. Shinohara, S. Tamura, Y. Tanaka, K. Toyota : On the average hitting times of the squares of cycles, *Discrete Applied Mathematics 313*, (2022) 18-28.

[3] G. Kirchhoff. : Uber die Auflösung der Gleichungen, auf welche man bei der Untersuchung der linearen Verteilung galvanischer Ströme geführt wird, *Annalen Physik und Chemie*, **72** (1847) 497-508

[4] D. J. Kleitman, B. Golden. : Counting Trees in a Certain Class of Graphs, *The American Mathematical Monthly*, **82** No.1 (1975) 40-44

[5] C. S. J. A. Nash-Williams. : Random walk and electric currents in networks. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. Mathematical and Physical Sciences*, **55** (1959) 181-194.

[6] Y. Tanaka. : On the average hitting times of $\mathrm{Cay}(\mathbb{Z}_n, \{+1,+2\})$, in preparation.