coideal 上の 1-cocycle の話

京都大学大学院 理学研究科 数学・数理解析専攻
田中聖人 (Masato TANAKA)

概要

特殊線形群 $SL(2,\mathbb{R})$ は数学のいたるところに登場する興味深い対象であります。その表現論については戦後、Gelfand-Naimark、Bargmann、Harish-Chandra に始まり現在まで様々な研究が行われてきました。そして 2021 年 K. De Commer と J. R. D. Talla により $SL(2,\mathbb{R})$ の量子変形とその表現論が記述されました。. 本講演では coideal 上の 1-cocycle を定義し、量子 $SL(2,\mathbb{R})$ の表現論を用いて量子 $SL(2,\mathbb{R})$ 上の 1-cocycle を構成します。

1　導入

線形代数やら群論等を勉強しておりますと特殊線形群 $SL(2,\mathbb{R})$ なる対象に出くわすかと思います。この対象を具体的に記述しますればすなわち $SL(2,\mathbb{R}) \coloneqq \{x \in \mathbb{M}_2(\mathbb{R}) \mid \det(x) = 1\}$ であります。特殊線形群はどういうわけか (筆者はその理由に明るくないのでありますが) 数学の様々な分野、例えば物理学、例えば保型形式の理論、例えばリー群論といった具合に実に多岐にわたる領域に出没するのであります。いろいろな世界に現れる数学的な対象という点において特殊線形群 $SL(2,\mathbb{R})$ は興味深く、また、深く考究せねばならぬ対象であるように思います。

それでは $SL(2,\mathbb{R})$ を如何にして考察すればよいのかという段階に至るのでありますが、これはリー群でありますから言うなれば「曲がった空間」であります。左様であるからして、このなんだかよく分からぬ空間を直接的に調べるというのは一寸技術的にむつかしいところがありましょう。自然界に現れるもの、例えば微分方程式や多様体は非線形なものばかりですが人間の直感はどういうわけか (この理由についても筆者は明るくないのですが) 線形なものの方が非線形なものよりも扱いやすいようであります。そうした理由によって群ではなく群環を考える、群上の連続関数のなす環を考える、群の表現論を調べるなどといったある種の「線形化」とでも呼ぶべき操作をして我々人類は群であるとか、群でありなおかつ多様体であるところのリー群を研究してきたわけであります。リー群に関してはもう一つ欠かすべからざる線形化の技法がありまして、それはリー群に対応する「リー代数」なるものを考えるという技術であります。リー代数といいますのは、ベクトル空間であってリー括弧というある種の積を持った対象であります。特殊線形群 $SL(2,\mathbb{R})$ に対応するリー代数とはベクトル空間 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}) \coloneqq \{x \in \mathbb{M}_2(\mathbb{R}) \mid \mathrm{tr}(x) = 0\}$ にリー括弧 $[x,y] \coloneqq xy - yx$ を付与したもので、なるほど確かにベクトル空間である点と、ここから元の群の情報を殆ど引き出せるという点においては good news なのですが、しかしながら $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間であるという点は bad news とは言わないまでも一寸苦しい状況であります。と言いますのも、実数体 $\mathbb{R}$ は代数閉体ではありませんから、作用素の固有値 ($\in \mathbb{R}$) を考えられるとは限りません。関数解析、作用素環論の視点から見れば作

用素の固有値が議論できないというのは大きな痛手であります。そこでこの状況を脱する方法の一つとして $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ に複素数体 $\mathbb{C}$ を「かける」即ちテンソルするという方法もありますが、それよりは $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ を少し「膨らませて」普遍包絡環 $U(\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}))$ という $\mathbb{C}$ 上の代数を作るほうが状況は明るいでしょう。と言いますのも $U(\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}))$ の積は結合律を満たすいわゆる普通の積であって、リー括弧よりはずっと扱いやすく、環論的な技法が使いやすく、さらには $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ の情報は、従って $SL(2,\mathbb{R})$ の情報は、殆ど普遍包絡環サイドから理解することができるからであります。

さて、「量子群」などと呼ばれるものがございます。量子群とは何ぞやという疑問もありますけれども、ここでは正確な定義はせずに、普通のリー群 G からそれに対応する量子群 G_q を得る操作について大まかに考えることにいたしましょう。「リー群 G に対応するリー環 $\mathfrak{g}$ の普遍包絡環 $U(\mathfrak{g})$ を変形したものであるところの $U_q(\mathfrak{g})$ とそれの dual と思うべき対象 G_q が存在する」これが基本的な思想であり量子群を得る操作であります ([4][5] も参照されたし)。つまるところ「普遍包絡環を変形したらもともとのリー群も変形されたと思うべきである」というわけであります。このような視座の下、特殊線形群 $SL(2,\mathbb{R})$ を変形するとなればまずは普遍包絡環をこそ変形すべきでありましょう。去る 2021 年、普遍包絡環の量子変形をすることによって K. De Commer, J. R. D. Talla 両氏により量子 $SL(2,\mathbb{R})$([1]) が構成されたのでありますが、これを $SL_q(2,\mathbb{R})$ と書くことにしましょう。

特殊線形群 $SL(2,\mathbb{R})$ 及び $SL_q(2,\mathbb{R})$ の表現論についても言及しておきましょう。特殊線形群 $SL(2,\mathbb{R})$ の表現論の研究は比較的新しいもので、歴史を振り返れば 1946 年の Gelfand-Naimark、1947 年の Bargmann、1952 年の Harish-Chandra の仕事が fundamental であるという意味においても重要なのであります。特に既約ユニタリ表現の分類がなされたことは特筆すべきであります。既約ユニタリ表現がすべて分類されたことで $SL(2,\mathbb{R})$ の unitary dual(= 既約ユニタリ表現の同値類の代表元全体の集合) を考察することができます。この集合にちょうどよい位相 (Fell 位相) が入るという事も留意すべき事実であります。位相を入れて何になるのだという厳しい意見もありましょうが、この位相が入っていることによって群 $SL(2,\mathbb{R})$ の性質を、例えば property(T) や Haagerup property のありやなしやを、議論できるのであります。量子化された特殊線形群の既約ユニタリ表現については、論文 [1] にて分類されましたように、凡そ特殊線形群のそれと同様であります。論文 [1] 内では明示的には書かれておりませんが、Fell 位相の様子も凡そ特殊線形群のそれと同様であることが分かります。

特殊線形群であるとかその量子化の表現論が分かれば何が分かるのでありましょうか?いろいろ分かることはあるのでありまするが、今回は定義はあとで述べるものとして、非自明な (coboundary でない)1-cocycle なるものを構成することができるということを言及させていただこうかと思います。では 1-cocycle なるものから何が分かるのかということになるわけですが、群の場合においては、1-cocycle は群上のレヴィ過程を考えているに等しく、また群の Haagerup property であるとか property(T) であるとかが分かるのであります。ならば群の量子化の場合においても同様のことが言えるであろうという心持になります。また、具体的に非自明な 1-cocycle を具体的に構成すること自体も面白い問題であります。そうした事情によりまして、今回は筆者の論文 [8] をもとに $SL_q(2,\mathbb{R})$ 上の非自明な 1-cocycle を構成することを目標に (用紙の都合上あるいは筆者の都合上多少正確さは欠きますけれども) そのために必要な用語などを用意することにいたしましょう。

2 Hopf $*$-algebras, coideals, Drinfeld doubles

Definition 2.1 (Hopf $*$-algebras)**.** A を単位元を持ち積が結合律を満たす代数 (over $\mathbb{C}$) とします。積を線形写像 $A \otimes A \xrightarrow{m} A$、単位元のことを線形写像 $\mathbb{C} \xrightarrow{\eta} A$ であって任意の $a \in A$ について $m(\eta(1) \otimes a) = a = m(a \otimes \eta(1))$ を満たすものと考えることにします。この A が *Hopf $*$-algebra* であるとは、線形写像 $A \xrightarrow{\Delta} A \otimes A$、$A \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{C}$、$A \xrightarrow{S} A$ があって次を満たすことを言います:

$$\begin{aligned} \Delta \circ * &= (* \otimes *)\Delta \\ (\Delta \otimes \mathrm{id})\Delta &= (\mathrm{id} \otimes \Delta)\Delta \qquad\qquad (\text{余結合律}) \\ (\epsilon \otimes \mathrm{id})\Delta &= \mathrm{id} = (\mathrm{id} \otimes \epsilon)\Delta \\ m(S \otimes \mathrm{id})\Delta &= \eta \circ \epsilon = m(\mathrm{id} \otimes S)\Delta \end{aligned}$$

線形写像 $A \xrightarrow{\Delta} A \otimes A$, $A \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{C}$, $A \xrightarrow{S} A$ をそれぞれ *coproduct, counit, antipode* と呼びます。

Hopf $*$-algebra の計算をするにあたって Δ がらみの計算を強いられるのでありますが、毎度毎度正直に $\overset{\text{有限和}}{\sum_i} a_i \otimes b_i$ などと書いて居れば日が暮れること請け合いでありますからもっと簡明なる記号が要請されるのであります。例えば graphical notation などというものもありますけれども、ここでは Sweedler notation を用いることにします。即ち $\Delta(a) = a_{(1)} \otimes a_{(2)}$ と書いて計算するのでありますがこの記法が数学的に真っ当なものであるということは余結合律によって保証されます。

Example. coproduct などの詳細は省略しますが有限群 G にたいして、その群環 $\mathbb{C}[G]$ 及び群上の連続関数のなす環は Hopf $*$-algebra になっています。

Definition 2.2 (Unitary pairings, actions, Drinfeld doubles)**.** A と U とは Hopf $*$-algebra であるとします。線形写像 $(-,-)\colon A \otimes U \to \mathbb{C}$ であって $(\Delta(a), h \otimes k) = (a, hk)$, $(a \otimes b, \Delta(h))$, $(1, h) = \epsilon(h)$, $(a, 1) = \epsilon(a)$, $(a^*, h) = \overline{(a, S(h)^*)}$, $(a, h^*) = \overline{(S(a)^*, h)}$ for all $a, b \in A$ and $h, k \in U$ となるもののことを A と U の *unitary pairing* と呼びます。このとき *action* というものを次で定めることにします。

$$\begin{aligned} h \triangleright a &:= a_{(1)}(a_{(2)}, h) = (\mathrm{id} \otimes (\bullet, h))\Delta(a) \\ a \triangleleft h &:= (a_{(1)}, h)a_{(2)} = ((\bullet, h) \otimes \mathrm{id})\Delta(a) \\ a \triangleright h &:= h_{(1)}(a, h_{(2)}) = (\mathrm{id} \otimes (a, \bullet))\Delta(h) \\ h \triangleleft a &:= (a, h_{(1)})h_{(2)} = ((a, \bullet) \otimes \mathrm{id})\Delta(h) \end{aligned}$$

$(a \in A, h \in U)$. またそのような A と U から新たなる代数を次のごとく構成することができます。即ち、A と U の *Drinfeld double* $A \bowtie U$ とは A と U 及び commuting relations

$$\begin{aligned} ha &= a_{(2)}(S^{-1}(a_{(1)}) \triangleright h \triangleleft a_{(3)} = (a_{(3)}, h_{(1)})a_{(2)}h_{(2)}(a_{(1)}, S^{-1}(h_{(3)})) \\ ah &= h_{(2)}(S^{-1}(h_{(1)}) \triangleright a \triangleleft h_{(3)}) = (S^{-1}(a_{(3)}), h_{(1)})h_{(2)}a_{(2)}(a_{(1)}, h_{(3)}) \end{aligned}$$

$(a \in A, h \in U)$ から生成される $*$-algebra のことであります。

Definition 2.3 (Coideals)**.** U を Hopf $*$-algebra、I を unital $*$-subalgebra としましょう。I が U の unital left (resp. right) *coideal* $*$-subalgebra であるとは $\Delta(I) \subset U \otimes I$ (resp. $\Delta(I) \subset I \otimes U$). であることを言うのであります。Hopf $*$-algebra A と U の間に unitary pairing があるとします。I が Hopf $*$-algebra U の unital left coideal $*$-subalgebra であるとき $I^\perp$ を $\{a \in A \mid a \triangleleft h = \epsilon(h)a \text{ for all } h \in U\}$ で定めます。一方 I が unital right coideal $*$-subalgebra なら $I^\perp := \{a \in A \mid h \triangleright a = \epsilon(h)a \text{ for all } h \in U\}$ と定めます。

Remark 2.4. I が Hopf $*$-algebra U の unital left coideal $*$-subalgebra であるとき $I^\perp$ は A の unital right coideal $*$-subalgebra になります。証明は [1, Lemma 1.2] を参照なさってください。

3 量子 $SL(2,\mathbb{R})$ とその表現論

3.1 Hopf $*$-algebra $\mathcal{O}_q(SU(2))$ と $U_q(\mathfrak{su}(2))$

表題の Hopf $*$-algebra は両者ともに大変興味深い対象ではありますがここでは深く立ち入らず、定義と両者の unitary pairing について言及するにとどめることにいたします。

Definition 3.1. $\mathcal{O}_q(SU(2))$ とは生成元 α, γ と関係式
$\alpha^*\alpha + \gamma^*\gamma = 1, \alpha\alpha^* + q^2\gamma\gamma^* = 1, \gamma^*\gamma = \gamma\gamma^*, \alpha\gamma = q\gamma\alpha, \alpha\gamma^* = q\gamma^*\alpha.$
によって生成されるところの universal unital algebra であります。上述の関係式は行列 $U_{1/2} := [u_{i,j}]_{i,j=1/2,-1/2} := \begin{bmatrix} \alpha & -q\gamma^* \\ \gamma & \alpha^* \end{bmatrix}$ がユニタリーであるということに他なりません。coproduct は $\Delta(u_{i,j}) = \sum_k u_{i,k} \otimes u_{k,j}$ によって、counit ϵ と antipode S は $\epsilon(\alpha) = 1$, $\epsilon(\gamma) = 0$, $S(\alpha) = \alpha^*, S(\alpha^*) = \alpha, S(\gamma) = -q\gamma, S(\gamma^*) = -q^{-1}\gamma^*$. によって夫々定義されるものであります。

Definition 3.2. $U_q(\mathfrak{su}(2))$ とは生成元 k, k^{-1}, e, f と関係式

$$kk^{-1} = k^{-1}k = 1, \quad ke = q^2ek, \quad kf = q^{-2}fk, \quad [e,f] = \frac{k - k^{-1}}{q - q^{-1}}.$$

によって生成される universal unital algebra であります。Hopf $*$-algebra としての構造は次の通りであります:

$$\Delta(k^\pm) = k^\pm \otimes k^\pm, \quad \Delta(e) = e \otimes 1 + k \otimes e, \quad \Delta(f) = 1 \otimes f + f \otimes k^{-1}$$
$$\epsilon(k^\pm) = 1, \quad \epsilon(e) = 0, \quad \epsilon(f) = 0$$
$$S(k^\pm) = -k^\mp, \quad S(e) = -k^{-1}e, \quad S(f) = -fk$$

Hopf $*$-algebra $\mathcal{O}_q(SU(2))$ と $U_q(\mathfrak{su}(2))$ の unitary pairing は次の式によって与えられるもので

あります:

$$(U_{1/2}, k) = \begin{bmatrix} q & 0 \\ 0 & q^{-1} \end{bmatrix},$$
$$(U_{1/2}, e) = \begin{bmatrix} 0 & q^{1/2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$
$$(U_{1/2}, f) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ q^{-1/2} & 0 \end{bmatrix}.$$

ただし上式は例えば $(\alpha, k) = q, (-q\gamma^*, k) = 0$ などと読むものとします。これが実際に unitary pairing を与えているということはそれなりに簡単に証明できます。

3.2 $SL(2,\mathbb{R})$ の普遍包絡環の量子変形

Hopf $*$-algebra $U_q(\mathfrak{su}(2))$ の元 B_t を $B_t := q^{-1/2}(e - fk) - \sqrt{-1}(q - q^{-1})^{-1}tk \in U_q(\mathfrak{su}(2))$ によって定めます。また、線形写像 $R\colon U_q(\mathfrak{su}(2)) \to U_q(\mathfrak{su}(2))$ を $R(x) := k^{1/2}S(x)k^{-1/2} \quad (x \in U_q(\mathfrak{su}(2)))$ によって定めましょう。すると愚直に計算することで多項式環 $\mathbb{C}[R(B_t)]$ が $U_q(\mathfrak{su}(2))$ の unital right coideal $*$-subalgebra となるということが証明できます。いま $\mathcal{O}_q(S^2_t) := (\mathbb{C}[R(B_t)])^{\perp}$ と定めこれを *Podleś sphere* と呼びましょう。すると Drinfeld double $\mathcal{O}_q(SU(2)) \bowtie U_q(\mathfrak{su}(2))$ の部分空間として Drinfeld double $\mathcal{O}_q(S^2_t) \bowtie \mathbb{C}[R(B_t)]$ を構成することができますがこれこそが [1] で構成されましたところの $U_q(\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})_t)$、即ち普遍包絡環の量子変形であります。(厳密に言いますれば、$\mathcal{O}_q(S^2_t) \bowtie \mathbb{C}[R(B_t)]$ を考えるというのは筆者の論文 [8] の convention なのでありまして、論文 [1] においては $U_q(\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})_t)$ として $\mathbb{C}[B_t]^{\perp} \bowtie \mathbb{C}[B_t]$ が採用されております。1-cocycle の growth なるものを考える場合は $\mathcal{O}_q(S^2_t) \bowtie \mathbb{C}[R(B_t)]$ を考えたほうが自然であろうと思われます。)

3.3 量子 $SL(2,\mathbb{R})$ の表現論

以下 $t = q^a - q^{-a}$ とします。ここでは量子 $SL(2,\mathbb{R})$ の表現論について以下の節において必要になるものだけを手短に紹介します。詳細につきましてはぜひとも論文 [1](または筆者の論文 [8]) をご覧になってください。まず $\mathcal{I}_c$ という、ベクトル空間としては複素数体の加算個の直和に等しいものを導入します。いろいろな理解の仕方があるかと思いますが、$\mathcal{I}_c$ とはつまるところ $\mathcal{O}_q(S^2_t)^{\perp}$(において稠密なもの) と思っていただければよいかと思います。論文 [8] において記述されました通り、$U_q(\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})_t)$ の表現と $\mathcal{O}_q(S^2_t) \bowtie \mathcal{I}_c$ の表現にはある対応があるのでありまして、$\mathcal{O}_q(S^2_t) \bowtie \mathcal{I}_c$ の方がいくらか計算の面で労力が少ないのでこちらの表現を見ているということにいたしましょう。本稿で用いる $\mathcal{O}_q(S^2_t) \bowtie \mathcal{I}_c$ の表現は以下の 4 つであります:

1. 自明表現 $\mathbb{1}$
2. $(q + q^{-1}, a)$-basic module $\mathcal{M}_{q+q^{-1},a}$ これは大まかにいうと $\sqrt{-1}S(B_t)e_a = \dfrac{t}{q - q^{-1}}e_a$ なるベクトル e_a が cyclic となっているような表現のことであります。
3. 離散系列表現のひとつ $\mathcal{D}^+_2$ これは特殊線形群の場合の離散系列表現のひとつに相当するものであります。
4. 離散系列表現のひとつ $\mathcal{D}^-_2$ 上に同じ

これらを用いることで我々は所望の 1-cocycle を構成できるのであります。それを次とその次の節で考察いたしましょう。

4 coideal 上の 1-cocycle

CQG Hopf $*$-algebra などというものが出てきますが、細かな定義はそこまで気にしなくて大丈夫ですので、何かいい感じの Hopf $*$-algebra が CQG Hopf $*$-algebra なのだと思ってください。

Definition 4.1 (1-cocycles, coboundaries)**.** A を CQG Hopf $*$-algebra、B をその unital left coideal $*$-subalgebra とします。$\mathcal{H}$ を preHilbert space すなわち内積の定まった空間とし、$\pi\colon B \to \mathrm{End}(\mathcal{H})$ を $*$-表現とします。このとき線形写像 $C\colon B \to \mathcal{H}$ が (π,ϵ)-1-*cocycle* であるとは $C(xy) = \pi(x)C(y) + C(x)\epsilon(y)$ for all $x, y \in B$ であることを言います。線形写像 $C\colon B \to \mathcal{H}$ が *coboundary* であるとは C が $\pi(\bullet)\xi - \epsilon(\bullet)\xi$ for some $\xi \in \mathcal{H}$ という姿をしていることを言います。容易に分かりますように coboundary は 1-cocycle であります。

線形写像と $*$-表現とが与えられたときその線形写像が 1-cocycle であるのかどうか coboundary であるのかどうかを容易に判定することはできるでしょうか?答えは YES であります:

Proposition 4.2 (1-cocycle, coboundary であるための条件 [8])**.** $\pi\colon B \to \mathrm{End}(\mathcal{H})$ を $*$-表現、$C\colon B \to \mathcal{H}$ を線形写像としましょう。$\tilde{\pi} := \begin{bmatrix} \pi & C \\ 0 & \epsilon \end{bmatrix} \colon B \to \mathrm{End}(\mathcal{H} \oplus \mathbb{C})$ とおきます。このとき次が成立します。

1. C が 1-*cocycle* $\iff$ $\tilde{\pi}$ が表現
2. C が *coboundary* $\iff$ $\tilde{\pi} \simeq \pi \oplus \mathbb{1}$

1-cocycle のうち我々が相手にするものを以下で定めます。

Definition 4.3 (Yetter-Drinfeld condition[8])**.** B と I は unitary pairing をもつ Hopf $*$-algebra A, U の coideal 達ということにします。$\pi\colon B \bowtie I \to \mathrm{End}(\mathcal{H})$ を $*$-表現とします。このとき (π,ϵ)-1-cocycle $C\colon B \to \mathcal{H}$ が *Yetter-Drinfeld condition* を満たすとは $\pi(\omega)C(x) = C(x \triangleleft S^{-1}(\omega))$ for all $x \in B$ and all $\omega \in I$ が成立するということであります。

1-cocycle が Yetter-Drinfeld condition を満たすとうれしいことがあります:

Proposition 4.4 (Drinfeld double に 1-cocycle が延びるための条件 [8])**.** 次は同値であります。

1. C は *Yetter-Drinfeld condition* をみたす。
2. C は 1-*cocycle* $\tilde{C}\colon B \bowtie I \to \mathcal{H}$ *such that* $\tilde{C}(x\omega) = C(x)\epsilon(\omega)$ *for all* $x \in B$ *and* $\omega \in I$ に延長する。

5 量子 $SL(2,\mathbb{R})$ 上の 1-cocycle の構成

さて以上の準備の下に早速本丸を構成の概要を説明いたしましょう。 まず我々は [8, Lemma. 4.1] により $\mathcal{O}_q(S_t^2) \bowtie \mathcal{I}_c$ の表現のなす短完全列

$$0 \to \mathcal{D}_2^+ \oplus \mathcal{D}_2^- \xrightarrow{\phi} \mathcal{M}_{q+q^{-1},a} \xrightarrow{p} \mathbb{1} \to 0$$

を持っております (ϕ は inclusion, p は canonical projection)。 ということはベクトル空間としては $\mathcal{M}_{q+q^{-1},a} \simeq \mathcal{D}_2^+ \oplus \mathcal{D}_2^- \oplus \mathbb{C}$ なのであります。したがって Proposition3.3 を考慮しますれば、表現 $\tilde{\pi}\colon \mathcal{M}_{q+q^{-1},a} \to \mathrm{End}(\mathcal{H})$ の off-diagonal は 1-cocycle になるのであります。さらにはこの 1-cocycle は Yetter-Drinfeld condition を満たすのであります ([8, Lemma 4.6])。故に Proposition3.6 により $\mathcal{O}_q(S_t^2) \bowtie \mathcal{I}_c$ 上の 1-cocycle ができるわけであります。そして上述の短完全列は $\mathcal{O}_q(S_t^2) \bowtie \mathcal{I}_c$ の表現のなす列としては分裂しません ([8, Lemma 4.3]) ので、再び Proposition3.3 によりその 1-cocycle は coboundary ではございません。以上をまとめますと、次の定理を得るのであります:

Theorem 5.1 (非自明な 1-cocycle の存在 [8])**.** 線形写像 $\tilde{C}\colon \mathcal{O}_q(S_t^2) \bowtie \mathcal{I}_c \to \mathcal{D}_2^+ \oplus \mathcal{D}_2^-$ を $\tilde{C}(bx) := \tilde{\pi}(bx)e_a - \epsilon(bx)e_a \quad (b \in \mathcal{O}_q(S_t^2), x \in \mathcal{I}_c)$ で定めるとそれは量子 $SL(2,\mathbb{R})$ 上の *coboundary* でない 1-*cocycle* である。

6 これから

これから進むべき道はそれなりにございます。それらを以下に列挙しコメントを付してこの小論を終わらせていただきます。

1. 量子 $SL(2,\mathbb{R})$ 上のレヴィ過程の構成
   群や局所コンパクト量子群 [4] の場合を考えますと 1-cocycle にはレヴィ過程が対応しているのでありますが、coideal の場合はそうは問屋が卸さない状況にあるというのが現状であります。何が障壁になっておるのかと言いますれば即ち linear functional たちの convolution product が定義されぬ可能性があるというところであります。例えば [3] にあるような特殊な coideal であれば convolution product も意味を持ちますが量子 $SL(2,\mathbb{R})$ の場合はそれとは状況が違うのであります。しかしながら 1-cocycle にはレヴィ過程が対応しないというのはなんとも不自然で非理想的であるように思います。
2. 量子 $SL(2,\mathbb{R})$ の諸性質
   群のあるいは局所コンパクト量子群の性質で気になるものとして例えば property(T) であるとか Haagerup property などというものがございます。群や局所コンパクト量子群の場合 [4] を考えますと 1-cocycle の情報によってそれらの性質を引き出すことができるのであります。我々の 1-cocycle $\tilde{C}$ は proper という性質を持っています ([8, Theorem 5.10])。これによって例えば $SL_q(2,\mathbb{R})$ が Haagerup property を持っていると思うべきであるのですが、では Haagerup property なる性質をどのように定義するのが適切でしょうか?その特徴付けはどれ

程あるでしょうか?また property(T) についてはどうでしょうか?

3. 量子 $SL(3,\mathbb{R})$ の構成、規約表現の分類、1-cocycle の構成
これはきわめて安直な発想でありますが量子 $SL(3,\mathbb{R})$ の構成、規約表現の分類、1-cocycle の構成をするという方向もございます。もともとのリー群がランク 1 ではありませんからそれに伴う表現論の方面での困難があるであろうと思われます。

上記 3 つの 1-cocycle 関連の話以外にも道はございます:

4. 量子 $SL(2,\mathbb{R})$ の表現のテンソル積の既約分解
特殊線形群 $SL(2,\mathbb{R})$ の場合は [7] で論証されましたように表現のテンソル積の既約分解の様子が分かっております。では量子 $SL(2,\mathbb{R})$ の場合はどうなのかというとそれはまだ未知であります。そもそも量子 $SL(2,\mathbb{R})$ の表現圏に monoidal structure が入るのかという至極真っ当な疑問も沸き起こるのですが、それに関しては [2] にありますように問題ありません。しかしながら、その monoidal structure がこれまた難物でありまして、離散系列表現同士のテンソル積の既約分解すらむつかしいというのが現状であります。筆者は既約分解の様子は特殊線形群のそれと同じであろうと予想しております。
5. 量子 $SL(2,\mathbb{R})$ 上の確率論
量子 $SL(2,\mathbb{R})$ 上のレヴィ過程が構成できるにせよできないにせよ、今度は量子 $SL(2,\mathbb{R})$ 上の確率過程はどのようなものであるのかという疑問が生ずるのは自然なことと思います。量子 $SL(2,\mathbb{R})$ 上の確率過程を定義すること自体は可能でありますが、例えば、もっと具体的に量子 $SL(2,\mathbb{R})$ 上の random walk を考えて、poisson boundary を計算して、などといったことをするにはどうすればよいのでしょうか。そしてそこから何が帰結されるのでしょうか。

Email adress: tanakamasato.2121@gmail.com

参考文献

[1] K. De Commer, and J. R. Dzokou Talla, Quantum $SL(2,\mathbb{R})$ and its irreducible representations, preprint arXiv:2107.04258.

[2] K. De Commer, and J. R. Dzokou Talla, Invariant integrals on coideals and their Drinfeld doubles, preprint arXiv:2112.07476v1.

[3] B. Das, U. Franz and X. Wang, Invariant Markov semigroups on quantum homogeneous spaces, preprint arXiv:1901.00791v2.

[4] M. Daws, P. Fima, A. Skalski, S. White, The Haagerup property for locally compact quantum groups, *J. Reine Angew. Math.* **711** (2016), 189-229.

[5] A. Klimyk and K. Schmüdgen, Quantum groups and their representations, Texts and Monographs in Physics, Springer, 1997.

[6] S. Neshveyev and L. Tuset: Compact Quantum Groups and Their Representation Categories, Cours Spéc., **20**, Soc. Math. France, 2013.

[7] J. Repka, Tensor Products of Unitary Representations of $SL_2(\mathbb{R})$, *American Journal of Mathematics*, Aug., 1978, Vol. **100**, No.4, pp.747-774.

[8] M. Tanaka, A proper 1-cocycle on a Podleś sphere.