Tame topology における Lie 亜群の滑層分割

北海道大学大学院 情報科学院 （情報理工学コース）
田邊真郷 (Masato TANABE)

概要

1970 年代から 1980 年代に架けて、J. N. Mather と V. A. Vassiliev は独立に、実代数群の作用を受ける非特異実代数多様体とその軌道空間に対して標準的な滑層分割を構成した。本稿における我々の主結果は、その Mather–Vassiliev 型の滑層分割を精密化し、それをより広いクラスの空間——半代数的、劣解析的、より一般に実数体上の順序極小構造、塩田の $\mathfrak{X}_0, \mathfrak{X}$-category といった ‘tame topology’ における Lie 亜群——で構成したものである。本稿では、その主結果および舞台となる ‘tame topology’ について紹介する。

1 序

1.1 滑層分割

幾何的対象を調べる際、その「よい」分割を求めることがしばしばなされる。代表的なものとしては三角形分割、胞体分割、ハンドル分解が知られているが、ここでは以下に述べる滑層分割というものを考えてみる: C^r 級多様体 M の部分集合 V の C^r 級**滑層分割** *(stratification)* とは、V の局所有限な分割であって、それぞれのメンバーが M の C^r 級（正則）部分多様体であるようなものをいう。また、このときの分割のメンバーを V の**滑層** *(stratum)* という。古典的な例を以下に挙げる:

例 1.1 (代数多様体)**.** $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ とし、$V \subset \mathbb{K}^n$ を d 次元代数多様体とする。このとき、ΣV で V の特異点集合を表し、$\Sigma^i V \coloneqq \Sigma(\Sigma^{i-1} V)$ と書くと、フィルトレーション

$$V \coloneqq \Sigma^0 V \supset \Sigma^1 V \supset \Sigma^2 V \supset \cdots \supset \Sigma^{d+1} V = \varnothing$$

から得られる分割 $\{\Sigma^i V - \Sigma^{i+1} V\}_{i=0}^{d}$ は V の滑層分割である。

例 1.2 (線型代数)**.** $M = \mathrm{M}(m, n; \mathbb{K})$ で $\mathbb{K}$ 係数の $m \times n$ 型行列全体が成す空間を表す。このとき、$\Gamma^i \coloneqq \{A \in M \mid \dim \mathrm{Ker} A \geqslant i\}$ と書くと、フィルトレーション

$$M = \Gamma^0 \supset \Gamma^1 \supset \Gamma^2 \supset \cdots \supset \Gamma^{n+1} = \varnothing$$

から得られる分割 $\{\Gamma^i - \Gamma^{i+1}\}_{i=0}^{n}$ は M の滑層分割である。

例 1.3 (滑層分割を許容しない例)**.** $V \coloneqq \{0\} \cup \{1/n \mid n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$ は滑層分割を許容しない。実際、V を $\mathbb{R}$ の部分多様体によって分割すると $\{\{a\}\}_{a \in V}$ となるが、これは局所有限ではない。

注意 1.4. 本稿では詳しく述べないが、滑層分割を考えるとき、滑層たちに「よい」隣接関係を要請

することがある。その代表的な一つが *Whitney* **滑層分割** *(Whitney stratification)* である。例 1.1の滑層分割は一般に Whitney 滑層分割にはならない（例えば Whitney の傘: $\{xy^2 - z^2 = 0\} \subset \mathbb{R}^3$)。

滑層分割の概念は H. Whitney による代数多様体の分割に端を発し、その後 R. Thom や J. Mather らの手によって理論が整備され、C^0 構造安定性問題の解決という目覚ましい貢献を見せた [4]。現代においても滑層分割の理論や精神は生き続けており、例えば滑層たちの（Whitney でない）隣接関係や、conically smooth stratification といった話題がなお研究されている [1, 6, 12]。

さて、滑層分割の基本的な問題意識として

Q1.　どのようなクラスの空間が滑層分割を許容するのか？

Q2.　滑層分割はどれだけよい条件を充たすように得られるか？

というものが考えられる。本稿では、この二つの問いに対する答として、古典的な事実と筆者の主結果を紹介する。

1.2　半代数幾何

まず、Q1 の答となる最も代表的なものが半代数的集合のクラスである。実 Euclid 空間 $\mathbb{R}^n$ の部分集合 X が**半代数的集合** *(semialgebraic set)* であるとは、X が有限個の実係数多項式による方程式・不等式で定義されることをいう。また、半代数的集合 $X \subset \mathbb{R}^n, Y \subset \mathbb{R}^p$ の間の連続写像 $f\colon X \to Y$ が**半代数的写像** *(semialgebraic map)* であるとは、そのグラフ $\Gamma(f) \subset \mathbb{R}^{n+p}$ が半代数的集合であることをいう。例えば実代数的集合、したがって実代数多様体は半代数的集合であり、半代数的集合の幾何学（半代数幾何）は実代数幾何における重要な道具として用いられている。半代数幾何において次のことが知られている。これは前述の Q1, Q2 に対する一つの答である:

定理 1.5. 任意の半代数的集合は、有限個の半代数的な滑層から成る C^ω 級 Whitney 滑層分割を許容する。

さて、J. N. Mather は実代数幾何における群作用を考え、1976 年に以下の滑層分割を構成した。これもまた Q2 に対する答であり、本稿における我々の先行研究の一つである:

定理 1.6 ([8, Theorem 1])**.** G をアファイン実代数群、M を d 次元アファイン非特異実代数多様体、G が M 上に実代数的に作用しているとする。このとき、M はフィルトレーション

$$M = M_0 \supset M_1 \supset \cdots \supset M_{d+1} = \varnothing$$

であって、以下を充たすものを許容する: 任意の $i = 0, 1, \ldots, d$ に対し、

(1) M_i は M の閉集合であり、半代数的かつ G 不変である;
(2) $M^i = M_i - M_{i+1}$ は M の余次元 i なる C^ω 級部分多様体である（ただし空かもしれない）;
(3) 商空間 M^i/G は、C^ω 級多様体構造であって、商写像 $M^i \to M^i/G$ が局所自明な C^ω 級ファイブレーションとなるものを許容する。

注意 1.7. V. A. Vassiliev [13, Theorem 8.6.6] も 1985 年に同様の滑層分割を（独立に）構成して

いることに注意しておく。本稿では詳しく述べないが、彼らのモチベーションは**可微分写像の特異点論**にあり、主たる具体例は微分同相芽のジェットが成す群のジェット空間上への作用、すなわち特異点分類が成す滑層分割であった。実際、Mather は同論文の中で、C^∞ 級写像空間の "滑層分割" が構成できることを主張している [8, Theorem 3]。(しかし、その証明は未だどこにもない。)

1.3 主結果バージョン 1

Mather–Vassiliev の滑層分割に対して、Q1, Q2 を再び見ると

Q1′. より広いクラスの空間で Mather–Vassiliev 型の滑層分割は構成できるか?
Q2′. 商空間 M^i や商写像の構造はどれだけ精密化できるか?

ということが考えられる。我々はその一つの答として主結果を得た。まずは Q2′ のみに対する答として、半代数幾何バージョンの主結果を述べる:

定理 1.8 (主結果バージョン 1 [11, Theorem 1.1])**.** G をアファイン実代数群、M を d 次元アファイン非特異実代数多様体とし、G が M 上に実代数的に作用しているとする。このとき、M はフィルトレーション

$$M = M_0 \supset M_1 \supset \cdots \supset M_{d+1} = \varnothing$$

であって、以下を充たすものを許容する: 任意の $i = 0, 1, \ldots, d$ に対し、

(1) M_i は M の閉集合であり、半代数的かつ G 不変である;
(2) $M^i = M_i - M_{i+1}$ は M の余次元 i なる C^ω 級部分多様体であり(ただし空かもしれない)、$\{M^i\}_{i=0}^d$ は M の Whitney 滑層分割である;
(3) 商空間 M^i/G は、piecewise algebraic な C^ω 級多様体構造であって、商写像 $M^i \to M^i/G$ が局所自明で piecewise algebraic な C^ω 級ファイブレーションとなるものを許容する。

本質的な変更点は (3) である。ここで、piecewise algebraic な空間とは、局所コンパクト空間であって局所表示先や座標変換がすべて半代数的なものをいう (cf. Kontsevich–Soivelman [5])。つまり、主結果バージョン 1 は**「軌道空間に誘導される多様体構造も半代数的にできる」**というものである。証明の大きな流れは Mahter の方針と同様であったが、多様体構造を得る段階で、Mather とは本質的に異なる道具として塩田の結果を用いた。詳しくは最終節 §3 を参照されたい。

では、Q1′ の答として何が考えられるか?本稿では、次に述べる二方向への一般化を考える。

第一に、半代数幾何の解析的類似にあたる**劣解析幾何** *(subanalytic geometry)*、そしてそれらの公理的一般化にあたる塩田の $\mathfrak{X}_0, \mathfrak{X}$-*category* への一般化である [9]。$\mathfrak{X}_0$-category は実数体上の**順序極小構造** *(o-minimal structure)* と同一の概念である [14]。これらの category では任意の対象に対する Whitney 滑層分割・三角形分割可能性が示されており、しかも位相空間論的に病的な例が生じないことから、Grothendieck の提唱した 'tame topology' の代表的な候補となっている。本稿のタイトルにある 'tame topology' とは、本稿ではこれらのカテゴリーを指す。

そして第二に、群作用の公理的一般化にあたる**亜群** *(groupoid)*——ここでは幾何構造も込めて Lie 亜群と呼ぶのが正しい——への一般化である。近年の研究では、固有な C^∞Lie 亜群の滑層分割に関

する結果が上がっている [3]。

まとめると、我々は Mather–Vassiliev 型の滑層分割を *'tame topology'* **における** *Lie* **亜群**に対して考える。こうして得られたものが、後述する主結果バージョン 2 である。以降は、我々が舞台とする塩田の $\mathfrak{X}_0, \mathfrak{X}$-category の導入（§2）、主結果バージョン 2 およびその証明に用いた技術の紹介（§3）に費やされる。

2 塩田の $\mathfrak{X}_0, \mathfrak{X}$-category

本節では、半代数幾何から出発し、塩田の $\mathfrak{X}_0, \mathfrak{X}$-category を導入する。詳しくは [2, 10, 9] を参照されたい。

半代数的集合全体が成す集合族は、以下の 4 公理を充たす最小の集合族 $\mathfrak{S}_0 \subset \coprod_{n=0}^{\infty} 2^{\mathbb{R}^n}$ として特徴づけられる:

(I)$_0$ 任意の実代数的集合は $\mathfrak{S}_0$ の元である;

(II)$_0$ $X_1, X_2 \in \mathfrak{S}_0$ ならば、$X_1 \cap X_2,\ X_1 - X_2,\ X_1 \times X_2 \in \mathfrak{S}_0$;

(III)$_0$ $X \in \mathfrak{S}_0,\ X \subset \mathbb{R}^n$ かつ写像 $p\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ が線型ならば、$p(X) \in \mathfrak{S}_0$;

(IV)$_0$ $X \in \mathfrak{S}_0,\ X \subset \mathbb{R}^1$ ならば、それは有限個の点と区間たちの合併である。

非自明な性質は (III)$_0$ のみだが、これは Tarski–Seidenberg の原理という量化子除去定理の帰結として知られている。また、半代数的集合の位相的内部・閉包・境界もまた半代数的集合になるし、半代数的集合の半代数的写像による順像・逆像もまた半代数的集合になる。このように、半代数的集合のクラスは非常によい性質を持っており、さらに Grothendieck が提唱した 'tame topology'——空間充填曲線や Banach–Tarski のパラドクスのような位相的に病的な例・現象を持たない空間のクラス——の代表的な候補にもなっている。

さて、塩田の $\mathfrak{X}_0$-category とは、上記の公理を充たす 'tame topology' のことである。正確には:

定義 2.1. $\mathfrak{X}_0 \subset \coprod_{n=0}^{\infty} 2^{\mathbb{R}^n}$ を、上記の 4 公理 (I)$_0$–(IV)$_0$ を充たす集合族とする。このとき

- $\mathfrak{X}_0$ の元を $\mathfrak{X}_0$-*set* といい、
- $\mathfrak{X}_0$-set 間の連続写像であって、そのグラフがまた $\mathfrak{X}_0$-set であるものを $\mathfrak{X}_0$-*map* という。

そして、$\mathfrak{X}_0$-set の全体と $\mathfrak{X}_0$-map の全体の二つ組を $\mathfrak{X}_0$-*category* という。

半代数的集合の全体よりも真に広い例を挙げておこう。

例 2.2 (Wilkie の例)**.** $\mathfrak{W}_n \coloneqq \{p^{-1}(0) \subset \mathbb{R}^n \mid p \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n, e^{x_1}, \ldots, e^{x_n}]\}$ と置く。このとき、$\coprod_{n=0}^{\infty} \mathfrak{W}_n$ を包む最小の $\mathfrak{X}_0$-category が存在する。

注意 2.3. $\mathfrak{X}_0$-category は、実数体 $\mathbb{R}$ 上の順序極小構造と同一の概念である。

さらに、半代数的集合の解析的類似として、**劣解析的集合** *(subanalytic set)* が知られている。本来の定義は煩雑であるため、ここでは特徴づけのみ述べる。劣解析的集合全体が成す集合族は、以下の 3 公理を充たす最小の集合族 $\mathfrak{S} \subset \coprod_{n=0}^{\infty} 2^{\mathbb{R}^n}$ として特徴づけられる:

(I)' 任意の実解析的集合は $\mathfrak{S}$ の元である;

(II)' $X_1, X_2 \in \mathfrak{S}$ ならば、$X_1 \cap X_2,\ X_1 - X_2 \in \mathfrak{S}$;

(III)' $X \in \mathfrak{S},\ X \subset \mathbb{R}^n$ かつ写像 $p\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ が線型であり $p|\mathrm{Cl}_{\mathbb{R}^n} X$ が固有ならば、$p(X) \in \mathfrak{S}$.

公理 (III)' は半代数的な場合よりも仮定が厳しい。これは実解析的集合の線型写像による像が時に病的な例となるためである。例えば、$\{(0,0)\} \cup \{(x, 1/x) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}^2$ の第 2 成分への射影は例 1.3となってしまう。

さて、上述と同様にこの公理的一般化として $\mathfrak{X}$-category を定義したいが、$\coprod_{n=0}^{\infty} 2^{\mathbb{R}^n}$ 自体も公理 (I')–(III') を充たしてしまう。また、必ずしも解析的な例を含まないものも対象とするために、少し公理を変更する:

定義 2.4. $\mathfrak{X} \subset \coprod_{n=0}^{\infty} 2^{\mathbb{R}^n}$ を、下記の 4 公理を充たす集合族とする:

(I) 任意の実代数的集合は $\mathfrak{X}$ の元である;

(II) $X_1, X_2 \in \mathfrak{X}$ ならば、$X_1 \cap X_2,\ X_1 - X_2,\ X_1 \times X_2 \in \mathfrak{X}$;

(III) $X \in \mathfrak{X},\ X \subset \mathbb{R}^n$ かつ写像 $p\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ が線型であり $p|\mathrm{Cl}_{\mathbb{R}^n} X$ が固有ならば、$p(X) \in \mathfrak{X}$;

(IV) $X \in \mathfrak{X},\ X \subset \mathbb{R}^1$ ならば、X は任意の点 $x \in \mathbb{R}^1$ の近くで有限個の点と区間たちの合併である。

このとき

- $\mathfrak{X}$ の元を $\mathfrak{X}$-*set* といい、
- $\mathfrak{X}$-set 間の連続写像であって、そのグラフがまた $\mathfrak{X}$-set であるものを $\mathfrak{X}$-*map* という。

そして、$\mathfrak{X}$-set の全体と $\mathfrak{X}$-map の全体の二つ組を $\mathfrak{X}$-*category* という。

公理 (I), (II) はそれぞれ $(\mathrm{I})_0$, $(\mathrm{II})_0$ と同じものである。また、劣解析的集合全体が成す集合族は $\mathfrak{X}$-category である。

以下では、$\mathfrak{X}_0$-*category* または $\mathfrak{X}$-*category* を一つ固定する。そして、順序極小構造の分野での慣習に倣い、$\mathfrak{X}_0, \mathfrak{X}$-set を *definable set*、$\mathfrak{X}_0, \mathfrak{X}$-map を *definable map* と呼ぶことにする。この他にも、この category 上で定義される概念には *definable* という形容詞をつける。

注意 2.5. 半代数幾何・劣解析幾何の諸結果の多くは一般の $\mathfrak{X}_0, \mathfrak{X}$-category に受け継がれるが、正則性に関しては注意が必要である。例えば、定理 1.5の $\mathfrak{X}_0, \mathfrak{X}$-category バージョンは「$1 \leqslant r < \infty$ とする。任意の definable set は、有限個の definable set な滑層から成る C^r 級 Whitney 滑層分割を許容する」となる。$r = \infty, \omega$ に対して、$\mathfrak{X}_0, \mathfrak{X}$-category の一般論はまだ存在しない。また、$\mathfrak{X}$-category においては、公理 (III), (IV) の事情から、集合や写像に対して有界性を課すことが多い。

3 主結果について

本節では、主結果バージョン 2 およびその証明を紹介する。

3.1 Lie 亜群

主結果を述べるために、Lie 亜群の定義を復習する。Lie 亜群は、ラフに言えば「滑らかな構造を持った可逆圏」のことである。Lie 亜群の一般論は [7] を参照されたい。

定義 3.1. C^r **級** *Lie* **亜群** *(C^r Lie groupoid)* $\mathcal{G} \rightrightarrows M$ とは、以下のデータたちの組であって、以下の整合性条件 $(*)$ を充たすものをいう:

(射の集合および対象の集合) C^r 級多様体 $\mathcal{G}, M$;
(source map および target map) C^r 級沈め込み $s, t\colon \mathcal{G} \to M$;
(合成) C^r 級写像 $c\colon \mathcal{G}^{(2)} \to \mathcal{G},\ g \cdot h \coloneqq c(g,h)$、ただし $\mathcal{G}^{(2)} \coloneqq \{(g,h) \in \mathcal{G} \times \mathcal{G} \mid s(g) = t(h)\}$;
(単位) C^r 級埋め込み $u\colon M \to \mathcal{G}$;
(逆) C^r 級微分同相 $i\colon \mathcal{G} \to \mathcal{G},\ g^{-1} \coloneqq i(g)$.

$(*)$ 任意の $g, h, k \in \mathcal{G}$ と任意の $m \in M$ に対して、以下の等式が意味を持つ限り成り立つ:

(合成) $(g \cdot h) \cdot k = g \cdot (h \cdot k)$;
(単位) $s(u(m)) = t(u(m)) = m$;
(逆) $g^{-1} \cdot g = u(s(g)),\ g \cdot g^{-1} = u(t(g))$.

例 3.2. $G \curvearrowright M$ を C^r 級 Lie 群の C^r 級多様体への C^r 級作用とする。このとき $\mathcal{G} \coloneqq G \times M$ とし、$s(g,m) \coloneqq m,\ t(g,m) \coloneqq g.m$ と定めれば C^r 級 Lie 亜群を得る。

例 3.3. $f\colon M \to N$ を C^r 級多様体間の全射 C^r 級沈め込みとすると、$\mathcal{G} \coloneqq M \times_N M$ は M 上の同値関係である。このとき、$s = \mathrm{pr}_1,\ t = \mathrm{pr}_2$ と定めれば C^r 級 Lie 亜群を得る。

例 3.4. C^r 級 Lie 亜群 $\mathcal{G} \rightrightarrows M$ に関して、$(s,t)\colon \mathcal{G} \to M \times M$ が固有写像であり、s, t が共に C^r 級局所微分同相であるとする。このとき、Lie 亜群 $\mathcal{G} \rightrightarrows M$ は *orbifold groupoid* と呼ばれる。

定義 3.5. $\mathcal{G} \rightrightarrows M$ を C^r 級 Lie 亜群とする。このとき、点 $x \in M$ に対して、その**軌道** *(orbit)* を

$$\mathcal{G}.x \coloneqq t(s^{-1}(x))$$

で定める。また、M 上に同値関係

$$x \sim y \iff \text{或る } g \in \mathcal{G} \text{ に対して } s(g) = x \text{ かつ } t(g) = y \text{ が成り立つ}$$

を定め、商空間 $M/\mathcal{G} \coloneqq M/\sim$ を Lie 亜群 $\mathcal{G} \rightrightarrows M$ の**軌道空間** *(orbit space)* という。

さて、C^r 級 Lie 亜群が *definable* であるとは、そのデータにおけるすべての集合と写像が definable であることとする。

3.2 主結果バージョン 2 およびその証明

それでは我々の主結果バージョン 2 を述べる。本節を通して、r は category が半代数的または劣解析的のとき ω とし、一般のとき $1 \leqslant r < \infty$ なる整数とする。

定理 3.6 (主結果バージョン 2 [11, Theorem 3.1]). $\mathcal{G} \rightrightarrows M$ を definable な C^r 級 Lie 亜群、$d = \dim M$ とする。さらに、$\mathfrak{X}$-category の場合、$\mathcal{G}$ および M は有界とする。このとき、M はフィルトレーション

$$M = M_0 \supset M_1 \supset \cdots \supset M_{d+1} = \varnothing$$

であって、以下を充たすものを許容する: 任意の $i = 0, 1, \ldots, d$ に対し、

(1) M_i は M の閉集合であり、definable かつ $\mathcal{G}$ 不変である;
(2) $M^i = M_i - M_{i+1}$ は M の余次元 i なる definable な C^r 級部分多様体であり（ただし空かもしれない）、$\{M^i\}_{i=0}^d$ は M の Whitney 滑層分割である;
(3) 商空間 $M^i/\mathcal{G}$ は、piecewise definable な C^r 級多様体構造であって、商写像 $M^i \to M^i/\mathcal{G}$ が局所自明で piecewise definable な C^r 級ファイブレーションとなるものを許容する。

注意 3.7. $M/\mathcal{G}$ は一般に Hausdorff になるとも限らない空間である。上記の定理は、それが $\{M^i/\mathcal{G}\}_{i=0}^d$ という “滑層分割” を持つことを主張している。

主結果の証明は、以下に箇条書きするような方針に沿うことで得ることができる。これは Mather のスケッチに基づいている。詳しくは Mather の原論文または筆者のプレプリントを参照されたい。

(i) 所望のフィルトレーションが $M_0 \supset M_1 \supset \cdots \supset M_i$ まで得られたとする。欲しいのは M_{i+1} である。
(ii) M_i 上の軌道の族 $\mathcal{R}_i := \coprod_{x \in M_i} \{x\} \times \mathcal{G}.x$ を考える。このとき、射影 $\mathrm{pr}_1 \colon \mathcal{R}_i \to M_i$ が $M^i = M_i - M_{i+1}$ 上で局所自明となるように、不良集合 M_{i+1} を定める。
(iii) M^i の軌道に対するスライスを取り、その上で軌道の族を自明化する。このとき、スライスが $M^i/\mathcal{G}$ の局所座標を定め、族の局所自明性が商写像 $M^i \to M^i/\mathcal{G}$ の局所自明性に対応する。

Mather の証明との相違点は、ステップ (ii) において局所自明性を得るための技術である。まず、Mather は軌道の族をファイバー方向にコンパクト化した上で、以下の *Thom* **のアイソトピー補題**を用いた。

定理 3.8. N, Y を C^∞ 級多様体、$X \subset N$ を部分集合、$\{X_\alpha\}$ を X の C^∞ 級 Whitney 滑層分割とする。$f \colon X \to Y$ は固有な C^∞ 級写像（つまり、f は X の N における開近傍 U 上へと C^∞ 級に延長可能）であり、各 α について $f|_{X_\alpha} \colon X_\alpha \to Y$ は C^∞ 級沈め込みであるとする。このとき、f は C^0 級で局所自明であり、この局所自明化の下で、各 $f|_{X_\alpha}$ は C^∞ 級で局所自明である。

すると、滑層 $\mathcal{R}_i \cap (\mathrm{pr}_1)^{-1}(M^i)$ だけに注目すれば pr_1 は C^∞ 級で局所自明なことが分かる。この後、それぞれの局所自明化写像を C^ω 級に近似すればよい。しかし、Thom のアイソトピー補題はベクトル場の積分を用いて証明された事実であり、得られる局所自明化は definable 性を一般に持たない。これを解決するのが、以下の**塩田のアイソトピー補題**である。

定理 3.9. $Y \subset \mathbb{R}^p$ を definable な C^1 級多様体、$X \subset \mathbb{R}^n$ を部分集合、$\{X_\alpha\}$ を X の definable な C^1 級 Whitney 滑層分割とする。$f \colon X \to Y$ は固有かつ definable な C^1 級写像であって、各 α について $f|_{X_\alpha} \colon X_\alpha \to Y$ は C^1 級沈め込みであるとする。このとき、f は definable かつ C^0 級で局所

自明であり、この局所自明化の下で、各 $f|_{X_\alpha}$ は C^1 級で局所自明である。

この定理は、ベクトル場の積分ではなく局所自明化の延長補題を利用して示される。そのため、局所自明化も definable になることが保証される。この定理を用いた後、definable な写像の C^r 級近似定理を適用することで、definable かつ C^r 級の局所自明性が得られるのである。筆者はこの方法を用いて主結果の条件 (3) を得た。以上が主結果の証明の概略である。

参考文献

[1] D. Ayala, J. Francis, and H. L. Tanaka: *Local structures on stratified spaces*, Adv. Math. **307** (2017) 903–1028.

[2] J. Bochnak, M. Coste, and M. F. Roy: *Real Algebraic Geometry*, Ergeb. Math. Grenzgeb. (3) **36**, Springer–Verlag (1998).

[3] M. Crainic and J. N. Mestre: *Orbispaces as differentiable stratified spaces*, Lett. Math. Phys. **108** (2018) 805–859.

[4] C. G. Gibson, K. Wirthmüller, Andrew A. du Plessis, and Eduard J. N. Looijenga: *Topological Stability of Smooth Mappings*, LNM **552**, Springer–Verlag (1976).

[5] M. Kontsevich and Y. Soibelman: *Deformations of algebras over operads and the Deligne conjecture*, In Conférence Moshé Flato 1999, Vol. I (Dijon), Math. Phys. Stud. **21**, Kluwer Acad. Publ. (2000) 255–307.

[6] J. Lurie: *Higher Algebra*, `https://www.math.ias.edu/~lurie/papers/HA.pdf` (2017).

[7] K. Mackenzie: *General theory of lie groupoids and lie algebroids*, London Math. Soc. Lecture Note Ser. **213**, Cambridge Univ. Press (2005).

[8] J. N. Mather: *Infinite Dimensional Group Actions*, Société mathématique de France, Astérisque **32–33** (1976) 165–172.

[9] M. Shiota: *Geometry of Subanalytic and Semialgebraic Sets*, Progress in Math. **150**, Birkhäuser, Boston (1997).

[10] M. Shiota: *Nash Manifolds*, LNM **1269**, Springer-Verlag (1987).

[11] M. Tanabe: *Canonical stratification of definable groupoids*, arXiv:2205.13306 [math.AG], preprint (2022).

[12] D. Trotman: *Stratification theory*, Cisneros-Molina José Luis, Dũng Tráng Lê, Seade José (Eds.): *Handbook of Geometry and Topology of Singularities I* (2020).

[13] V. A. Vassiliev: *Lagrange and Legendre characteristic classes*, Adv. Stud. Contemp. Math. **3**, Gordon and Breach, New York (1988).

[14] L. van den Dries: *Tame Topology and O-minimal Structures*, London Math. Soc. Lecture Note Ser. **248**, Cambridge Univ. Press (1998).