

# Virtual Thompson's group

東京大学大学院数理科学研究科 数理科学専攻  
高野 暁弘 (Akihiro TAKANO)\*

## 概要

Jones は 2017 年, Thompson 群  $F$  の元から絡み目を構成する方法を提唱し, 全ての絡み目が  $F$  の元から得られることを示した. 本講演では,  $F$  を部分群として含む群  $VF$  を新たに定義し, 絡み目の一般化である仮想絡み目が, 全て  $VF$  の元から得られることを紹介する. この研究は, 児玉悠弥氏 (東京都立大学) との共同研究である.

## 1 導入

### 1.1 仮想結び目理論

**定義 1.1.** 仮想絡み目図式とは, いくつかの円周の  $S^2 (= \mathbb{R}^2 \cup \{\infty\})$  へのはめ込みであって, 多重点は横断的 2 重点のみで図 1 のいずれかの情報を持つものである. 成分数が 1 つの場合は, 仮想結び目図式とも呼ぶ.



図 1: 実交点 (左図) および仮想交点 (右図)

**定義 1.2.** 2 つの仮想絡み目図式が同値であるとは, 平面上の同位変形と有限回の **generalized Reidemeister move**, すなわち classical Reidemeister move (図 2), virtual Reidemeister move (図 3), および mixed move (図 4) で移りあうときをいう. また, その同値類を**仮想絡み目**という. 成分数が 1 つの場合は, **仮想結び目**とも呼ぶ.

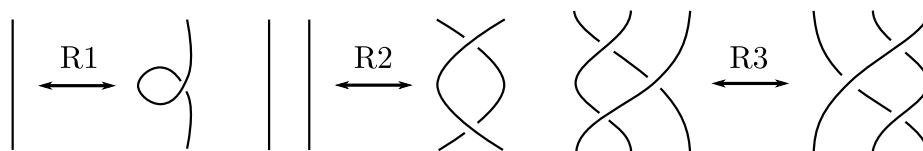


図 2: Classical Reidemeister move

\* E-mail: takano@ms.u-tokyo.ac.jp

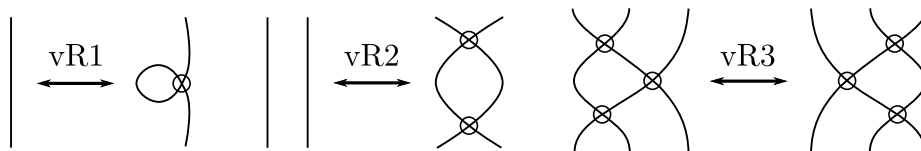


図 3: Virtual Reidemeister move

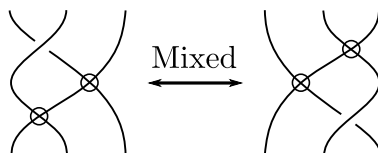


図 4: Mixed move

仮想結び目理論は、Kauffman [7] により導入された、結び目理論の一般化である。古典的な結び目理論が  $S^2 \times [0, 1]$  内の結び目とみなせる一方で、仮想結び目理論は  $\Sigma_g \times [0, 1]$  内の結び目とみなすことが出来る。ただし  $\Sigma_g$  は種数  $g \geq 1$  の向きづけ可能閉曲面である。

仮想結び目理論に対しても、古典的な結び目理論の場合と同様に、仮想組み紐という概念を考えることが可能である。組み紐とは、簡単に言うといくつかの紐を垂らして編んだものである。ただし、これらの紐は重力にしたがって常に上から下になっているとする。2つの組み紐があると、一方の組み紐をもう一方に繋げることで新たな組み紐が得られ、これを演算とすることで組み紐群が定義できる。また、組み紐の両端を繋げる（閉包という）ことで絡み目が得られる。逆に、任意の絡み目はある組み紐の閉包として表すことができることが知られており、これを Alexander の定理という。したがって、組み紐群は結び目理論の群論的な視点を与えていると言える。組み紐を平面に射影し図式として表すことで2次元的に扱うことができ、また組み紐の射影図の2重点に図1のような情報を与えることで、仮想組み紐が定義される。鎌田 [6]、および Kauffman-Lambropoulou [8] は仮想組み紐群を定義し、さらに Alexander の定理を独立に証明した：

**定理 1.3** ([6, Proposition 3], [8, Theorem 1]). 任意の仮想絡み目は、ある仮想組み紐の閉包として実現される。

## 1.2 Thompson 群と絡み目

Thompson 群  $F$  とは、Richard Thompson により導入された群でありいくつかの同値な定義がある。群論のみならず、幾何学的群論、ホモトピー論など様々な分野に登場し、また、群論における様々な反例を構成する際に用いられるなど非常に面白い性質を持った群である。そして、2017年に Jones [5] によって結び目理論にも登場することとなる。Jones は、planar algebra と呼ばれる代数を用いて Thompson 群のユニタリ表現を構成し、その“内積”をとることで絡み目が構成されることを示した。また、その方法を図形的に解釈し、より簡単な絡み目の構成法を定義した。さらに、任意の絡み目が Thompson 群のある元から得られることを示し、具体的にそのアルゴリズムも開発した。これは Thompson 群における Alexander の定理と言うべきものであり、Aiello [1] によって有向絡

み目に対しても同様の定理が成り立つことが示された。

本研究では、Jones の構成を仮想絡み目へと拡張する。すなわち、仮想 Thompson 群  $VF$  と呼ばれる群を定義し、Jones の構成を拡張することで  $VF$  の元から仮想絡み目が得られることを示す。さらに、仮想絡み目の場合でも Alexander の定理が成立することをアルゴリズムを具体的に構成して証明する：

**定理 1.4** ([10, Theorem 1.1]). 任意の仮想絡み目は、仮想 Thompson 群  $VF$  のある元から得られる。

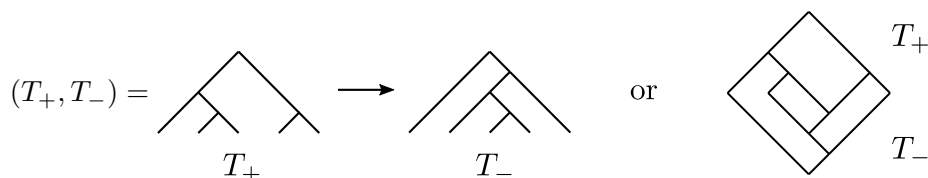
## 2 Thompson 群 $F$

### 2.1 定義

ここでは、Thompson 群  $F$  を 2 分木を用いて定義する。まず、集合  $F$  を

$$F := \{ \text{葉の数が同じ根付き 2 分木の組 } (T_+, T_-) \} / \sim .$$

とする。2 分木の組  $(T_+, T_-)$  を **tree diagram** といい、



のように表す。また、同値関係  $\sim$  を次のように定義する：2 つの tree diagram が同値であるとは、葉への有限回の opposing caret  $\diamond$  の追加および削除で移りあうときをいう (図 5 参照)。上のような opposing caret がない tree diagram を **reduced tree diagram** といい、 $F$  の任意の元はある reduced tree diagram を用いて一意的に表されることが知られている [2]。

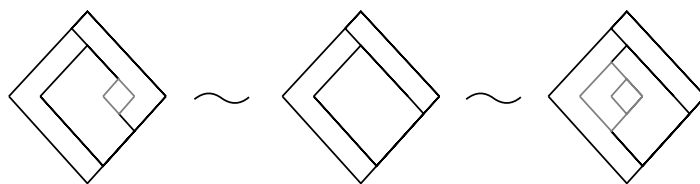


図 5: 同値な tree diagram たち。真ん中の tree diagram は reduced である。

2 つの tree diagram  $(T_{1+}, T_{1-})$  と  $(T_{2+}, T_{2-})$  の積を次で定める：opposing caret の追加および削除により、それぞれと同値な tree diagram  $(T'_{1+}, T'_{1-}), (T'_{2+}, T'_{2-})$  であって、 $T'_{1-}$  と  $T'_{2+}$  が同じ 2 分木となるように変形できる。このとき、積  $(T_{1+}, T_{1-}) \cdot (T_{2+}, T_{2-})$  を  $(T'_{1+}, T'_{2-})$  で定義する。この演算のもと集合  $F$  は群をなし、これを **Thompson 群** という。  $F$  の単位元は、任意の 2 分木  $T$  を用いて  $(T, T)$  と表され、tree diagram  $(T_+, T_-)$  の逆元は  $(T_-, T_+)$  で与えられる。

Thompson 群  $F$  は次のような表示を持つことが知られている [2, Theorem 3.1]:

$$\begin{aligned} F &\cong \langle x_0, x_1, x_2, \dots \mid x_i^{-1} x_j x_i = x_{j+1} \ (i < j) \rangle \\ &\cong \langle x_0, x_1 \mid [x_0 x_1^{-1}, x_0^{-1} x_1 x_0], [x_0 x_1^{-1}, x_0^{-2} x_1 x_0^2] \rangle. \end{aligned}$$

ここで,  $[x, y]$  は  $x$  と  $y$  の交換子を表し, また  $x_0, x_1$  および  $x_2$  は図 6 の tree diagram に対応する.

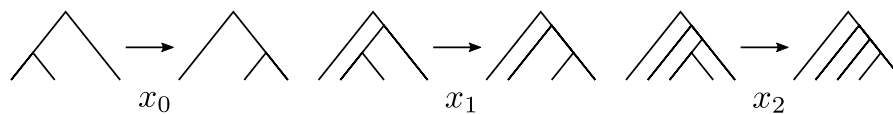


図 6:  $F$  の生成元

## 2.2 絡み目の構成

この節では, Jones [5] により導入された Thompson 群から絡み目を得る図式的な方法を紹介します.  $(T_+, T_-)$  を葉の数が  $n + 1$  の reduced tree diagram とし, 各葉を平面上の点  $(\frac{1}{2}, 0), (\frac{3}{2}, 0), \dots, (\frac{2n+1}{2}, 0)$  に置く.

### Step 1: $\Gamma$ -graph $\Gamma(T_+, T_-)$ の構成

$(T_+, T_-)$  の  $\Gamma$ -graph  $\Gamma(T_+, T_-)$  を次の平面グラフとして定義する:  $\Gamma(T_+, T_-)$  の頂点は  $(0, 0), (1, 0), \dots, (n, 0)$  に置く. また,  $\Gamma(T_+, T_-)$  の辺は  $T_+$  の  $/$  のような辺もしくは  $T_-$  の  $\backslash$  のような辺と 1 度だけ横断的に交わり, それ以外の  $(T_+, T_-)$  の辺とは交わらない (図 7 参照).

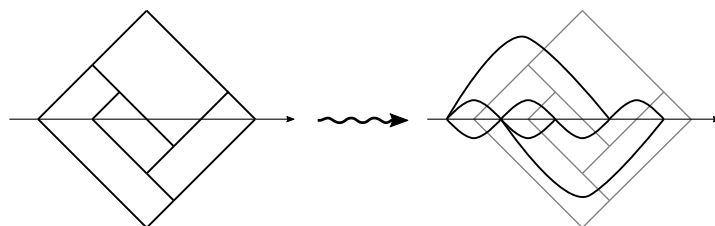


図 7:  $(T_+, T_-)$  から得られる平面グラフ  $\Gamma(T_+, T_-)$

### Step 2: medial graph $M(\Gamma(T_+, T_-))$ の構成

一般に, 連結な平面グラフ  $G$  に対して, その medial graph  $M(G)$  は次のように定義される:  $M(G)$  の頂点を  $G$  の各辺上に置く. また,  $G$  の各領域 (非有界なものも含む) に対して, その領域上で  $G$  の 2 辺がある  $G$  の頂点を共有しているとき, 対応する  $M(G)$  の頂点を辺で繋ぐ (図 8 参照).

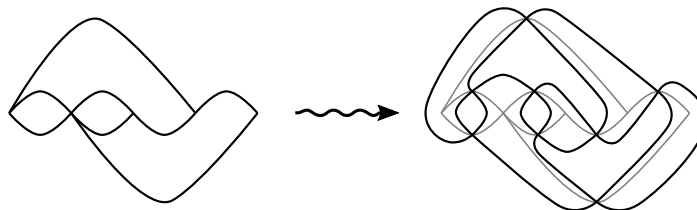


図 8:  $\Gamma(T_+, T_-)$  の medial graph  $M(\Gamma(T_+, T_-))$

### Step 3: 絡み目図式 $\mathcal{L}(T_+, T_-)$ の構成

一般に, medial graph は 4 価頂点, すなわち各頂点は 4 つの辺をもつので, このグラフをある絡み目の射影図と捉えることが出来る. そこで,  $M(\Gamma(T_+, T_-))$  の各頂点を次のようなルールで交点に

取り換えることで絡み目図式  $\mathcal{L}(T_+, T_-)$  を得る: 上半平面にある頂点は  $\diagdown$  とし, 下半平面にある頂点は  $\diagup$  とする\*1 (図9 参照).

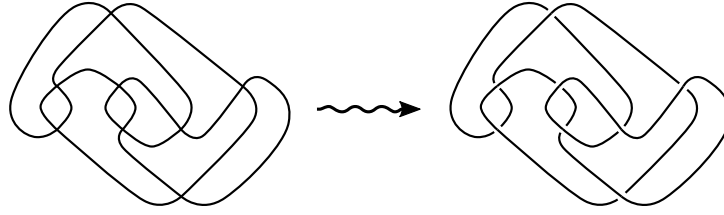


図9:  $M(\Gamma(T_+, T_-))$  から得られる絡み目図式  $\mathcal{L}(T_+, T_-)$

**補足 2.1.** reduced でない tree diagram に対しても上の構成は適用できるが, 一般に reduced tree diagram から得られる絡み目とは異なるものが出来る. 具体的には,  $(T_+, T_-)$  を reduced tree diagram とし,  $(T'_+, T'_-)$  を  $(T_+, T_-)$  に opposing caret  $\diamond$  を1つ追加した tree diagram とする (特に, これら2つの tree diagram は同値である). このとき,  $\mathcal{L}(T'_+, T'_-) = \mathcal{L}(T_+, T_-) \sqcup \bigcirc$  が成立する. 上述の通り,  $F$  の元  $g$  の reduced tree diagram は一意に定まる. そこで,  $g$  から得られる絡み目を, その reduced tree diagram を用いて構成し,  $\mathcal{L}(g)$  と書くこともある.

### 3 仮想 Thompson 群 $VF$

Jones の構成は, 本質的には2分木の一部の辺 ( $T_+$  内の  $\diagup$  や  $T_-$  内の  $\diagdown$ ) が絡み目の交点に対応しているので, 仮想絡み目に拡張するにはこれらの辺に実交点または仮想交点の情報 (ラベル) を乗せることが必要になる. そのために, diagram 群と呼ばれる群を導入する. この群は, 半群の有限表示およびその生成集合上の語の組から得られる群であり, Thompson 群も diagram 群の一つであることが知られている (詳細は例えば [4] を参照).

#### 3.1 Diagram 群

半群の有限表示  $\mathcal{P} = \langle \Sigma \mid \mathcal{R} \rangle$  を一つとる. ここで,  $\Sigma$  は生成元の有限集合,  $\mathcal{R}$  は関係子の有限集合である. また, 関係子  $(u, v) \in \mathcal{R}$  は  $u \rightarrow v$  と書くこととする. ただし  $u, v$  は  $\Sigma$  上の語である. diagram 群を定義する際は,  $\mathcal{R}$  には  $u \rightarrow u$  という関係子は無いことを仮定する. また, 簡単のため  $u \rightarrow v \in \mathcal{R}$  ならば  $v \rightarrow u \in \mathcal{R}$  であるとする.

生成集合  $\Sigma$  上の語  $w$  を一つ固定する. このとき, 集合  $\mathcal{D}(\mathcal{P}, w)$  を

$$\mathcal{D}(\mathcal{P}, w) := \{ \text{有限列 } w = w_1 \rightarrow w_2 \rightarrow \cdots \rightarrow w_{n-1} \rightarrow w_n = w \} / \sim$$

とする. 有限列  $w = w_1 \rightarrow w_2 \rightarrow \cdots \rightarrow w_{n-1} \rightarrow w_n = w$  を **diagram** という. ここで,  $w_i \rightarrow w_{i+1}$  は, 「 $w_i$  を  $\mathcal{R}$  内のある関係子を用いて  $w_{i+1}$  に書き換える」ことを意味する. つまり,  $w_i$  および  $w_{i+1}$  は, ある語  $w', w''$  とある関係子  $p_i \rightarrow p_{i+1} \in \mathcal{R}$  を用いて  $w_i = w'(p_i)w'', w_{i+1} = w'(p_{i+1})w''$  と書け

\*1 結び目理論 (とグラフ理論) を知っている人向けに説明すると,  $\Gamma(T_+, T_-)$  は  $\mathcal{L}(T_+, T_-)$  の Tait graph である.

る。したがって、diagram とは、「語  $w$  を  $\mathcal{R}$  内の関係子を用いて書き換えを行い、再び  $w$  へ戻ってくるまでに得られる語たちの有限列」である。一回の書き換え  $w_i = w'(p_i)w'' \rightarrow w'(p_{i+1})w'' = w_{i+1}$  またはそれに用いる関係子  $p_i \rightarrow p_{i+1}$  を **cell** という。関係  $\sim$  は次の 2 つで生成される同値関係とする:

**dipole の消去および挿入** diagram  $w = w_1 \rightarrow w_2 \rightarrow \cdots \rightarrow w_{n-1} \rightarrow w_n = w$  の一部が<sup>s</sup>, ある関係子  $p \rightarrow q$  を用いて

$$\cdots \rightarrow w(q)w' \rightarrow w(p)w' \rightarrow w(q)w' \rightarrow \cdots$$

と表せるとき、その部分を  $\cdots \rightarrow w(p)w' \rightarrow \cdots$  に変える。この操作および逆操作を **dipole<sup>\*2</sup>の消去および削除** という。

**分離した cell の可換性** diagram  $w = w_1 \rightarrow w_2 \rightarrow \cdots \rightarrow w_{n-1} \rightarrow w_n = w$  の一部が<sup>s</sup>, ある関係子  $p_i \rightarrow q_i$  ( $i = 1, 2$ ) を用いて

$$\cdots \rightarrow w(p_1)w'p_2w'' \rightarrow w(q_1)w'p_2w'' = wq_1w'(p_2)w'' \rightarrow wq_1w'(q_2)w'' \rightarrow \cdots$$

と表せるとき、その部分を

$$\cdots \rightarrow wp_1w'(p_2)w'' \rightarrow wp_1w'(q_2)w'' = w(p_1)w'p_2w'' \rightarrow w(q_1)w'q_2w'' \rightarrow \cdots$$

に変える。つまり、互いに影響しない語の書き換えはどちらが先でも良いという関係である。

2 つの diagram  $w = a_1 \rightarrow \cdots \rightarrow a_n = w$  と  $w = b_1 \rightarrow \cdots \rightarrow b_m = w$  の積を

$$w = a_1 \rightarrow \cdots \rightarrow a_n = w = b_1 \rightarrow \cdots \rightarrow b_m = w$$

で定義する。この演算は上述した同値関係の下 well-defined であり、集合  $\mathcal{D}(\mathcal{P}, w)$  上に群構造を定める。この群を **diagram 群** という。

diagram 群の元はグラフを用いて記述することも出来る。そのために、まずは語をグラフとして表すことを説明する。 $w = w_1w_2\cdots w_n$  を  $\Sigma$  上の語とする。ここで各  $w_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) は  $\Sigma$  の元である。このとき、語  $w$  に対して、次のような有向グラフを定義する: 頂点を  $v_1, v_2, \dots, v_{n+1}$  とし、辺を  $(v_1, v_2), (v_2, v_3), \dots, (v_n, v_{n+1})$  とする。各辺  $(v_i, v_{i+1})$  にはこの順で向きがついており、 $w_i$  というラベルがついているとする。このグラフを語  $w$  の **trivial geometric diagram** という。また、一般に有向グラフの頂点  $v$  に対して、 $v$  を終点とする辺 (resp. 始点とする辺) を  $v$  の **incoming edge** (resp. **outgoing edge**) という。

次に、1 つの cell  $p \rightarrow q \in \mathcal{R}$  をとり、 $p = p_1 \cdots p_n, q = q_1 \cdots q_m$  とする。 $v_{p_1}$  (resp.  $v_{p_n}$ ) を  $p$  の trivial geometric diagram の頂点であって  $p_1$  (resp.  $p_n$ ) のラベルが付いた辺を outgoing edge (resp. incoming edge) として持つものとする。同様にして、 $v_{q_1}, v_{q_m}$  を定義する。 $p$  と  $q$  の trivial geometric diagram を、 $v_{p_1}, v_{p_n}$  をそれぞれ  $v_{q_1}, v_{q_m}$  に貼り合わせて得られるグラフを **geometric  $(p, q)$ -cell** という。

最後に、一般の diagram  $w = w_1 \rightarrow w_2 \rightarrow \cdots \rightarrow w_{n-1} \rightarrow w_n = w$  に対して、次のように有向グラフを構成する: まず、cell  $w_1 = w'(p_1)w'' \rightarrow w'(p_2)w'' = w_2$  に対して、 $w_1$  の trivial geometric

<sup>\*2</sup> dipole (双極子) とは大きさが等しい正負の単極子 (電荷など) の対を少し離れた位置に置いたものである。例えば電荷を置いた時に発生する電気力線の様子と、後述する図を用いた diagram の説明の中での dipole の様子が似ていることが分かると思う。

diagram の  $p_1$  に対応する部分グラフに沿って geometric  $(p_1, p_2)$ -cell を貼り合わせたグラフを考える。つまり、このグラフは  $w_1$  と  $w_2$  の trivial geometric diagram を  $w'$  と  $w''$  に対応する部分で貼り合わせたものになっている。次に、cell  $w_2 \rightarrow w_3$  に対して、先ほど構成した  $w_1 \rightarrow w_2$  に対するグラフの  $w_2$  に対応する trivial geometric diagram に上と同様の方法で geometric  $(p_2, p_3)$ -cell を貼り合わせたグラフを考える。この操作を diagram の最後の cell まで繰り返して得られたグラフを  $w$  の **geometric diagram** という。

以上の構成により、diagram と geometric diagram を同一視し、diagram の同値関係と同様に、geometric diagram 全体の集合上にも同値関係を定義する。消去出来る dipole を持たない (geometric) diagram を、**reduced (geometric) diagram** といい、diagram 群の各元 (同値類) は、ただ一つの reduced geometric diagram を持つことが知られている [9].

**例 3.1.** 半群の有限表示  $\mathcal{P} = \langle a, b \mid a \rightarrow ab, b \rightarrow aa, a \rightarrow aa \rangle$  および語  $w = a$  を考える。図 10 はこの表示に対する trivial geometric diagram や geometric cell の例である。また、次のような diagram を考える：

$$(a) \rightarrow (ab) = a(b) \rightarrow a(aa) \rightarrow a(a) = (aa) \rightarrow (a).$$

このとき、対応する geometric diagram は図 11 のようになる。

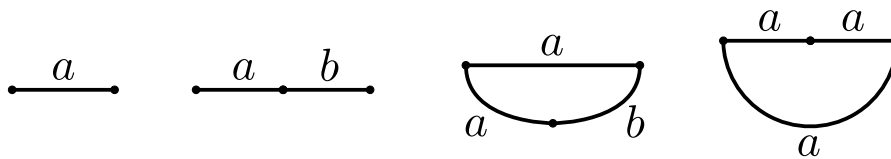


図 10:  $a$  と  $ab$  の trivial geometric diagram, および geometric  $(a, ab)$ -cell と  $(aa, a)$ -cell

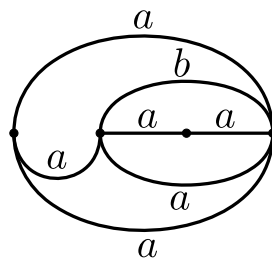


図 11: 例 3.1 の diagram に対応する geometric diagram

**例 3.2.** 半群の有限表示  $\mathcal{P}_F = \langle x \mid x \rightarrow xx \rangle$  を考える。このとき、diagram 群  $\mathcal{D}(\mathcal{P}_F, x)$  は Thompson 群  $F$  と同型である。  $\mathcal{D}(\mathcal{P}_F, x)$  の geometric diagram と  $F$  の tree diagram の対応は次のように得られる: reduced geometric diagram を考える (生成元は 1 つだけなので辺のラベルは省略する)。各  $(a, aa)$ -cell および  $(aa, a)$ -cell に対して、図 12 の上図のように tree を対応させる。ここで、語  $a$  に対応する tree の頂点を根とみなし、  $aa$  に対応する 2 つの頂点は葉とみなす。そして、それらの tree を繋げていくことで図 12 の下図のように reduced tree diagram を得る。ここで、  $T_+$  と  $T_-$  の

境目は diagram 内の長さが最大の語に対応する trivial geometric diagram である.

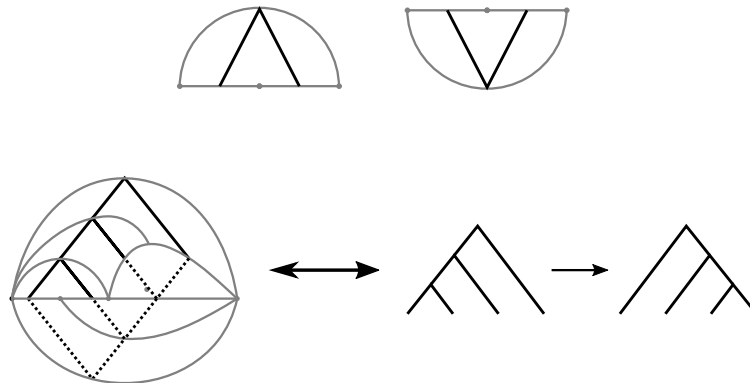


図 12: cell と tree の対応 (上図), および geometric diagram と tree diagram の対応 (下図). 実線が  $T_+$  で破線が  $T_-$  になっている.

**定義 3.3.** 半群の有限表示  $\mathcal{P}_{VF}$  を次で定義する:

$$\mathcal{P}_{VF} := \left\langle x, v \mid \begin{array}{l} x \rightarrow xx, x \rightarrow xv, x \rightarrow vx, x \rightarrow vv \\ v \rightarrow xx, v \rightarrow xv, v \rightarrow vx, v \rightarrow vv \end{array} \right\rangle.$$

このとき, diagram 群  $\mathcal{D}(\mathcal{P}_{VF}, x)$  を  $VF$  と書き, **仮想 Thompson 群** という.

仮想 Thompson 群の代数的な性質はいくつか分かっているが, ここでは省略する.

### 3.2 仮想絡み目の構成

上述の通り, tree diagram から Jones の方法を真似て仮想絡み目を構成するためには, tree の辺に実交点か仮想交点かの情報を乗せる必要があった. 仮想 Thompson 群は diagram 群として定義されたが, 図 12 のように geometric diagram を tree diagram に書き換え, そしてラベルに対応する tree の辺に付ける. そして,  $x$  のラベルがついている辺には実交点を,  $v$  のラベルがついている辺には仮想交点を対応させれば Jones の方法がそのまま使えると思われる. しかし, この過程で Thompson 群では現れなかった別の問題が浮上する. それは, 一般には仮想 Thompson 群の元は tree diagram の形では書けないということである. 例えば, 図 13 のような状況を考えると, Thompson 群の場合はラベルが無い場合 dipole となっており削除することが出来たが, 仮想 Thompson 群では削除出来ず残ることになる. そのため, Jones の構成を別の視点で考える必要がある. Golan-Sapir [3] は, Thompson 群を diagram 群  $\mathcal{D}(\mathcal{P}_F, x)$  として扱い, Jones の構成を geometric diagram の文脈で書き直した. 我々は, この方法を仮想 Thompson 群に拡張することでこの問題を解決した. ただし, ここでは詳しい方法は述べてない. 実は, Alexander の定理を証明する際に, 与えられた仮想絡み目を実現するような仮想 Thompson 群の元を実際に構成するのであるが, その元は図 13 のような変な状況は起こらず, tree diagram として書けるようなものなのである. したがって, ここでは Jones の方法をそのまま用いて, 仮想絡み目を構成する方法を説明する.



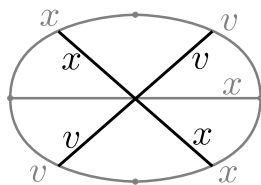


図 13:  $xv \rightarrow x \rightarrow vx$  なので, これは  $VF$  において dipole とはならない.

### Step 1: ラベル付き tree diagram の構成

仮想 Thompson 群  $VF$  の reduced geometric diagram をとる. ただし, 図 13 のような cell は持たないとする. 図 12 のように各 cell に対して tree を対応させる. その際, 根と葉を繋ぐ辺に, 葉の頂点に対応する geometric diagram の辺に乗っているラベルを乗せる. これらを繋げていくことで, ラベル付きの tree diagram が得られる (図 14 参照).

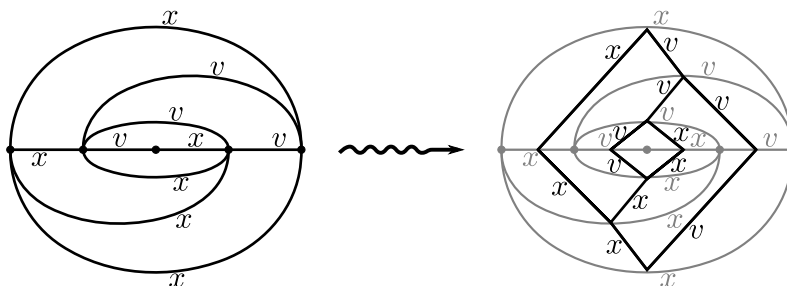


図 14:  $VF$  の geometric diagram から得られるラベル付き tree diagram

### Step 2: ラベル付き $\Gamma$ -graph の構成

まず, 2.2 節の Step 1 の時と同様にして (ラベル無しの)  $\Gamma$ -graph を構成する. 各辺は, tree diagram のただ一つの辺と交わっているので, そのラベルを  $\Gamma$ -graph の辺にも付けることでラベル付き  $\Gamma$ -graph が出来る (図 15 参照).

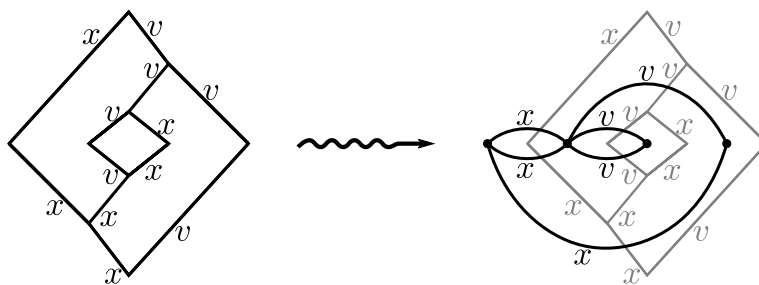


図 15: ラベル付き tree diagram から得られるラベル付き  $\Gamma$ -graph

### Step 3: 仮想絡み目図式の構成

2.2 節の Step 2 の時と同様にして medial graph を構成し, 各 (4 価) 頂点に実交点または仮想交

点を次のように割り振る (図 16 参照) : 対応する  $\Gamma$ -graph の辺が

$$\begin{cases} \text{上半平面にあり } x \text{ のラベルが付いていれば, } \times \rightarrow \diagup \diagdown, \\ \text{上半平面にあり } x \text{ のラベルが付いていなければ, } \times \rightarrow \diagdown \diagup, \\ v \text{ のラベルが付いていれば, } \times \rightarrow \otimes. \end{cases}$$

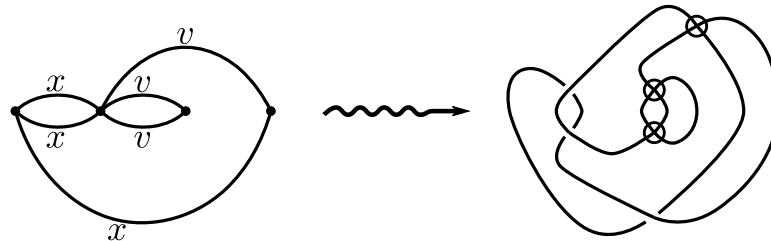


図 16: ラベル付き  $\Gamma$ -graph から得られる仮想絡み目

以上により, (全てではないが) 仮想 Thompson 群の元から仮想絡み目が構成された.

### 3.3 Alexander の定理

最後に, Alexander の定理 (定理 1.4) の証明の概要を述べる. 簡単に言えば, Jones の構成を逆にたどるのである. 最も本質的な部分は, (仮想) Thompson 群の (ラベル付き)  $\Gamma$ -graph となるような連結平面グラフを特徴づけることである. 古典的な場合は Jones [5] によって示されており, 与えられた絡み目の Tait graph を条件を満たすように Reidemeister move を使って変形することが, いわゆるアルゴリズムにあたる場所である. 仮想絡み目の場合も同様の条件を構成することで, Jones の証明と同じ流れをたどることが出来る. 実は, アルゴリズムに必要な Reidemeister move は R1 と R2 のみであるので, welded 絡み目や特異絡み目に対しても同様の結果が成り立つ.

### 参考文献

- [1] V. Aiello, *On the Alexander Theorem for the oriented Thompson group  $F$* , Algebraic & Geometric Topology **20** (2020), no. 1, 429–438.
- [2] J. W. Cannon, W. J. Floyd, and W. R. Parry, *Introductory notes on Richard Thompson's groups*, Enseign. Math. (2) **42** (1996), no. 3-4, 215–256.
- [3] G. Golan and M. V. Sapir, *On Jones' subgroup of  $R$ . Thompson group  $F$* , Journal of Algebra **470** (2017), 122–159.
- [4] V. S. Guba and M. V. Sapir, *Diagram groups*, Mem. Amer. Math. Soc. **130** (1997), no. 620, viii+117.
- [5] V. Jones, *Some unitary representations of Thompson's groups  $F$  and  $T$* , J. Comb. Algebra **1** (2017), no. 1, 1–44.
- [6] S. Kamada, *Braid presentation of virtual knots and welded knots*, Osaka J. Math. **44** (2007), no. 2, 441–458.
- [7] L. H. Kauffman, *Virtual knot theory*, European J. Combin. **20** (1999), no. 7, 663–690.
- [8] L. H. Kauffman and S. Lambropoulou, *Virtual braids*, Fund. Math. **184** (2004), 159–186.
- [9] V. Kilibarda, *On the algebra of semigroup diagrams*, ProQuest LLC, Ann Arbor, MI, 1994. Thesis (Ph.D.)–The University of Nebraska - Lincoln.
- [10] Y. Kodama and A. Takano, *Virtual Thompson's group*, arXiv:2210.15990 (2022). preprint.