Finite beta-expansions of natural numbers

大阪公立大学数学研究所
高溝 史周 (Fumichika Takamizo)

概要

$\beta > 1$ とし $[0,1]$ 上の変換 T を $T(x) = \beta x - \lfloor \beta x \rfloor$ で定義する．変換 T により各 $x \geq 0$ は

$$x = c_1\beta^{L-1} + \cdots + c_{L-1}\beta + c_L + \frac{c_{L+1}}{\beta} + \cdots + \frac{c_{n+1}}{\beta^n} + \cdots ,$$

$$\beta^{L-1} \leq x < \beta^L,\ c_n = \lfloor \beta T^{n-1}(\beta^{-L}x) \rfloor$$

と展開される．これをベータ展開という．本発表では, $\mathbb{N}$ の各要素が有限ベータ展開を持つための十分条件を与え, さらにその有限性条件を満たす β で positve finiteness と呼ばれる有限性条件を満たさない例を紹介する．

1 導入

$a, b \in \mathbb{Z}$ $(a \leq b)$ に対し $[\![a, b]\!] = [a, b] \cap \mathbb{Z}$ とする．任意の $x \in [0, \infty)$ は $c_n \in [\![0, 9]\!]$ によって $x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n 10^{\ell - n}$ と 10 進展開できる．この展開は次のように $\beta > 1$ の場合に一般化できる．まず $y \in \mathbb{R}$ に対し, 整数部分を $\lfloor y \rfloor$, 小数部分を $\{y\}$ で表し, $T_\beta : [0,1] \mapsto [0,1)$ を

$$T_\beta(x) = \{\beta x\} = \beta x - \lfloor \beta x \rfloor$$

によって定義する．このとき, 各 $x \in [0,1)$ に対し $c_n = \lfloor \beta T_\beta^{n-1}(x) \rfloor$ とおくと,

$$T_\beta^{n-1}(x) = \frac{c_n}{\beta} + \frac{T_\beta^n(x)}{\beta}$$

が成り立つ．この等式を繰り返し利用することにより x の展開

$$x = \frac{c_1}{\beta} + \frac{T_\beta(x)}{\beta} = \frac{c_1}{\beta} + \frac{c_2}{\beta^2} + \frac{T_\beta^2(x)}{\beta^2} = \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{\beta^n}, \quad c_n \in [\![0, \lfloor \beta \rfloor]\!]$$

が得られる．これを x のベータ展開といい,

$$d_\beta(x) = c_1 c_2 \cdots c_n \cdots$$

と表す．一方, $x \geq 1$ に対するベータ展開は

$$x = c_1\beta^{L-1} + \cdots + c_{L-1}\beta + c_L + \frac{c_{L+1}}{\beta} + \cdots + \frac{c_{L+n}}{\beta^n} + \cdots ,$$

$$\text{ただし } L = L(x) := \min\{n \in \mathbb{N} \mid x\beta^{-n} < 1\} \text{ かつ } d_\beta(\beta^{-L}x) = c_1 c_2 \cdots c_n \cdots$$

によって定義される. x のベータ展開の末尾が 0 のみとなるとき, x は有限ベータ展開をもつという. 今後, 有限ベータ展開をもつ $x \in [0, \infty)$ の全体を $\mathrm{Fin}(\beta)$ と表す.

すべての整数は有限な 10 進展開をもつ. Frougny と Solomyak はこの性質の一般化として β に関する 3 種類の有限性条件

$$
\begin{array}{ll}
(\mathrm{F}_1) & \mathbb{N} \subset \mathrm{Fin}(\beta) \\
(\mathrm{PF}) & \mathbb{Z}_{\geq 0}[1/\beta] \subset \mathrm{Fin}(\beta) \\
(\mathrm{F}) & \mathbb{Z}[1/\beta]_{\geq 0} \subset \mathrm{Fin}(\beta)
\end{array}
$$

を考えた ([6]). (PF) が (F) を含むクラスであり, (F_1) が (PF) を含むクラスであることは明らかである. また β が (F_1) を満たすとき, β は代数的整数となることが知られている ([6]). 特に (F_1) については次の事実が知られている.

Theorem 1.1 ([2, 6]) *β が (F_1) を満たすなら β は Pisot 数である. ここで代数的整数 β が Pisot 数であるとは, $\beta > 1$ かつ β のすべての共役 γ $(\neq \beta)$ に対し $|\gamma| < 1$ が成り立つときにいう.*

定義から 1 次の Pisot 数は 2 以上の自然数となる. そのため, 1 次の Pisot 数は (F) を満たす. 一方, 2 次の Pisot 数については次が知られている.

Theorem 1.2 ([6]) *β が 2 次の Pisot 数なら β は (PF) を満たす.*

(PF) 及び (F) については様々な結果が知られている (セクション 2 を参照). その一方, (PF) を満たさないが (F_1) を満たす β の存在は知られていなかった. セクション 3 では (F_1) の新たな十分条件を与え, 主結果である (PF) を満たさないが (F_1) を満たす β の例について紹介する.

2 (F) 及び (PF) に関する先行研究

T_β による展開は 1 に対しても考えることができる. これを Rényi 展開といい, $d_\beta(1)$ で表す. $d_\beta(x)$ の末尾が 0 のみとなるとき, $d_\beta(x)$ は有限であるという.

(PF) と (F) の関係は $d_\beta(1)$ によって特徴づけることができる.

Theorem 2.1 ([6]) *β が (F) を満たすことの必要十分条件は β が (PF) を満たし, かつ $d_\beta(1)$ が有限となることである.*

(PF) を満たす Pisot 数 β についてはその最小多項式が Akiyama によって特徴づけられた.

Theorem 2.2 ([5]) *β が (F) を満たさずに (PF) を満たすなら, β は Pisot 数でかつ最小多項式が次で与えられる:*

$$
x^d - (\lfloor \beta \rfloor + 1)x^{d-1} + \sum_{j=2}^{d} a_j x^{d-j},\ a_j \in \mathbb{Z}_{\geq 0},\ a_d \in \mathbb{N},\ \sum_{j=2}^{d} a_j < \lfloor \beta \rfloor.
$$

一方, (F) を満たす β の最小多項式については (PF) のような特徴づけが得られていない. しかし, (F) を満たすための十分条件についてはいくつか知られている.

Proposition 2.3 ([6, 7]) 代数的整数 $\beta > 1$ の最小多項式を

$$x^d - a_{d-1}x^{d-1} - \cdots - a_1 x - a_0 \ (a_k \in \mathbb{Z})$$

とし, 次のいずれかを満たすとする.

(FS) $a_{d-1} \geq \cdots \geq a_1 \geq a_0 \geq 1$.
(H) $a_j \geq 0$ かつ $a_{d-1} > \sum_{0 \leq n \leq d-2} a_n$.

このとき, β は *(F)* を満たす.

β が 3 次の場合に限れば次が知られている.

Proposition 2.4 ([9]) *Pisot* 数 β の最小多項式を

$$x^3 - ax^2 - bx - c \ (a, b, c \in \mathbb{Z})$$

とし, 次のいずれかを満たすとする.

(A1) $0 \leq a < b$, $2a - 2b + c \geq -1$, $b - 2c \geq -1$.
(FS) $a \geq b \geq c \geq 1$.
(H_m) $a \geq b \geq 0$, $a - b - c \leq 0$, $b - c = -1$.
(H) $a \geq b \geq 0$, $a - b - c > 0$, $c \geq 1$.
(A2) $-a < -c \leq b < 0$, $a + b - c \geq 0$.

このとき, β は *(F)* を満たす.

上述の命題は Akiyama による 3 次の Pisot 単数の特徴づけ (Theorem 3 of [2]) の一般化になっている. またこの命題のうち, (H_m) を除く場合については次のセクションで述べる *Shift radix system* を利用したアプローチで (F) であることが証明されている ([4]).

一般に, β が (F) を満たすための十分条件を発見するのは難しい問題である. しかし, β が (F) を満たすかどうかを判定するアルゴリズムが存在することが知られている ([1]).

2.1 Shift Radix System

代数的整数 $\beta > 1$ の最小多項式を

$$x^d - a_{d-1}x^{d-1} - \cdots - a_1 x - a_0$$

とする. $\boldsymbol{l} = (l_1, l_2, \cdots, l_{d-1}) \in \mathbb{Z}^{d-1}$ に対し $\lambda_\beta : \mathbb{Z}^{d-1} \to \mathbb{R}$, $\tau_\beta : \mathbb{Z}^{d-1} \to \mathbb{Z}^{d-1}$ をそれぞれ

$$\begin{aligned}
\lambda_\beta(\boldsymbol{l}) &= l_1 a_0 \beta^{-1} + \cdots + l_j \left(\sum_{i=1}^{j} a_{j-i} \beta^{-i} \right) + \cdots + l_{d-1} \left(\sum_{i=1}^{d-1} a_{d-1-i} \beta^{-i} \right) \\
\tau_\beta(\boldsymbol{l}) &= (l_2, \cdots, l_{d-1}, -\lfloor \lambda_\beta(\boldsymbol{l}) \rfloor)
\end{aligned}$$

と定義し, $(\mathbb{Z}^{d-1}, \tau_\beta)$ を shift radix system (SRS) と呼ぶ. 特に

$$\{\lambda_\beta\}(\boldsymbol{l}) := \{\lambda_\beta(\boldsymbol{l})\}$$

とすると, $\{\lambda_\beta\}:\mathbb{Z}^{d-1}\to\mathbb{Z}[\beta]\cap[0,1)$ は全単射で次の可換図式が得られる.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}^{d-1} & \xrightarrow{\tau_\beta} & \mathbb{Z}^{d-1} \\ {\scriptstyle\{\lambda_\beta\}}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle\{\lambda_\beta\}} \\ \mathbb{Z}[\beta]\cap[0,1) & \xrightarrow[T_\beta]{} & \mathbb{Z}[\beta]\cap[0,1) \end{array}$$

したがって, τ_β は T_β の一般化である. また SRS については次の結果が知られている.

Theorem 2.5 ([3, 4]) $W\subset\mathbb{Z}^{d-1}$ が次を満たすとする:

(i) $\pm\boldsymbol{e}_k\in W$ $(k=1,2,\cdots,d-1)$. ただし $\boldsymbol{e}_k=(0,\cdots,0,\overset{\overset{k}{\vee}}{1},0,\cdots,0)\in\mathbb{Z}^{d-1}$.

(ii) $\boldsymbol{\ell}\in W\Rightarrow\{\tau_\beta(\boldsymbol{\ell}),\tau_\beta^*(\boldsymbol{\ell})\}\subset W$. ただし $\tau_\beta^*(\boldsymbol{\ell}):=-\tau_\beta(-\boldsymbol{\ell})$.

(iii) ${}^\forall\boldsymbol{\ell}\in W$, ${}^\exists k\in\mathbb{N}$, *s.t.* $\tau_\beta^k(\boldsymbol{\ell})=\mathbf{0}$

このとき, β は *(F)* を満たす.

Theorem 2.5 の条件 (i) と (ii) を満たす集合 W は *set of witnesses* と呼ばれる. Akiyama et al. は τ_β のパラメータ $(a_0\beta^{-1},a_1\beta^{-1}+a_0\beta^{-2},\cdots,\sum_{1\le i\le d-1}a_{d-1-i}\beta^{-i})$ を $\boldsymbol{r}=(r_1,r_2,\cdots,r_{d-1})\in\mathbb{R}^{d-1}$ の場合へ一般化して議論し, 一般化された (F) を導入した ([3]). さらに [4] では, 小さい多面体 $H\subset\mathbb{R}^{d-1}$ が与えられたとき, すべての $\boldsymbol{r}\in H$ に対し $\tau_{\boldsymbol{r}}$ が一般化された (F) を満たすか否かを判定するアルゴリズムを構成することに成功し, (F) を満たすための十分条件をいくつか発見した.

3 主結果

Theorem 3.1 x^3-4x^2+4x-2 の根 $\beta>1$ は *(PF)* を満たさないが *(F_1)* を満たす.

Theorem 3.1 の β が Pisot 数であることは Akiyama の結果 (Lemma 1 of [2]) から確認できる. さらに Theorem 2.2 の対偶によりこの β が (PF) を満たさないことも示される. 以下, (F_1) の十分条件について考察する.

3.1 Key Lemma

この小節では $\beta>1$ は実数とする. また $x\in[0,\infty)$ に対し,

$$f_p(x)=\sum_{n\ge L(x)+1}c_n\beta^{L(x)-n}\quad ただし\ d_\beta(x\beta^{-L(x)})=c_1c_2\cdots$$

と定義する. $f_p(x)$ はベータ展開における x の小数部分である.

Lemma 3.2 任意の $x\in[0,\infty)$ に対し, $\theta\in\{0,1\}$ と 非負整数列 $\{\varepsilon_n\}_{1\le n\le r}$ が存在して次が成り立つ.

$$f_p(x+1)-f_p(x)=\theta-\sum_{n=1}^{r}\varepsilon_nT_\beta^n(1)$$

Lemma 3.2 の証明の概略を述べる前に補足と記号の導入をする．今後,

$$d_\beta^*(1) = d_1 d_2 \cdots := \begin{cases} (b_1 b_2 \cdots b_{q-1}(b_q - 1))^\infty & \text{if } d_\beta(1) = b_1 b_2 \cdots b_{q-1} b_q 0^\infty,\ b_q > 0 \\ d_\beta(1) & \text{otherwise} \end{cases}$$

とおく．$d_\beta^*(1)$ を利用することで, 与えられた記号列がベータ展開に現れるか否かを判定できる.

Remark 3.1 ([8, 10]) 以下の 2 条件は同値である.

(1) $c_1 c_2 \cdots \in d_\beta([0,1))$.

(2) $0^\infty \leq_{lex} c_n c_{n+1} \cdots <_{lex} d_\beta^*(1),\ {}^\forall n \in \mathbb{N}$.

ただし, $<_{lex}$ は辞書式順序であり, $\leq_{lex}$ は $<_{lex}$ または $=$ を意味する.

$x \in [0, \infty)$ に対し,

$$D_\beta(x) := \begin{cases} c_1 c_2 \cdots c_{L(x)} . c_{L(x)+1} \cdots & \text{if } L(x) \geq 1 \\ .c_1 c_2 \cdots & \text{if } L(x) = 0 \end{cases}$$

と定義する．ただし, $d_\beta(\beta^{-L(x)} x) = c_1 c_2 \cdots$ である．また,

$$\mathscr{D} := \{0^n D_\beta(x) \mid x \in [0, \infty),\ n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$$

とおく．以下の Lemma 3.2 の証明では,

$$\xi_n := d_n \beta^{-1} + d_{n+1} \beta^{-2} + \cdots = \sum_{k \geq n} d_k \beta^{n-k-1}$$

とする．このとき, $d_\beta^*(1)$ の定義より任意の $k \in \mathbb{N}$ に対し $\xi_k = T^\ell(1)$ を満たす $\ell \geq 0$ が存在する.

Sketch of the proof of Lemma 3.2. $x \in [0, \infty)$ とし, $\ell = L(x+1)$ とおく．さらに

$$c_1 c_2 \cdots = 0^{\ell - L(x)} D_\beta(x)$$

とする．このとき,

$$x + 1 = \sum_{n=2}^{\ell} c_{\ell-n+1} \beta^{n-1} + c_\ell + 1 + \sum_{n=\ell+1}^{\infty} c_n \beta^{\ell-n}$$

が成り立つ．ここで

$$c_1 \cdots c_{\ell-1}(c_\ell + 1).c_{\ell+1} \cdots \in \mathscr{D} \Rightarrow f_p(x+1) = \sum_{n=\ell+1}^{\infty} c_n \beta^{\ell-n} = f_p(x)$$

であるから, $c_1 \cdots c_{\ell-1}(c_\ell + 1).c_{\ell+1} \cdots \notin \mathscr{D}$ の場合を考えればよい．このとき,

$$k_0 = 0 \quad \text{かつ} \quad k_i < k_{i+1} \quad \text{かつ} \quad c_{k_i + j} \begin{cases} = d_j & \text{if } 1 \leq j \leq k_{i+1} - k_i - 1 \\ < d_j & \text{if } j = k_{i+1} - k_i \end{cases} \qquad (i \geq 0)$$

を満たす自然数列 $\{k_i\}_{i=0}^\infty$ が存在する．ここで

$$k_i < \ell \leq k_{i+1}$$

としてよい．今, $\{\ell_n\}_{n\geq 1}$ と $\{y_n\}_{n\geq 1}$ を次のように帰納的に定義する．最初に

$$\begin{aligned} y_1 &:= \theta + f_p(x) - \xi_{\ell-k_i+1} \\ \ell_1 &:= L(y_1) \end{aligned}$$

とおく．ただし,

$$\theta = c_\ell + 1 - d_{k_{i+1}-k_i} = \begin{cases} 0 & \text{if } \ell = k_{i+1} \\ 1 & \text{if } \ell \neq k_{i+1} \end{cases}$$

とする．y_1 の定義を図解すると以下のようになる．今 $\overline{a} := -a$ とし, $\overset{\nu}{=}$ で数値化が等しい記号列を表すとする．このとき, y_1 は

$$\begin{array}{cccccccccccc} & c_1 & \cdots & c_{k_i-1} & c_{k_i} & c_{k_i+1} & \cdots & c_{\ell-1} & (c_\ell+1). & c_{\ell+1} & \cdots \\ +) & 0 & \cdots & 0 & 1 & \overline{d_1} & \cdots & \overline{d_{\ell-k_i-1}} & \overline{d_{\ell-k_i}}. & \overline{d_{\ell-k_i+1}} & \cdots \\ \hline & c_1 & \cdots & c_{k_i-1} & (c_{k_i}+1) & 0 & \cdots & 0 & \theta. & (c_{\ell+1}-d_{\ell-k_i+1}) & \cdots \\ \overset{\nu}{=} & c_1 & \cdots & c_{k_i-1} & (c_{k_i}+1) & & 0^{\ell-k_i-\ell_1} & & D_\beta(y_1) & & \end{array}$$

となっている．次に $y_n \geq 0$ と $\ell_n \geq 0$ が定義され, かつ $c_1 \cdots c_{k_{i-n}-1}(c_{k_{i-n}}+1)0^{\ell-k_{i-n}-\ell_n}D_\beta(y_n) \notin \mathscr{D}$ のとき,

$$\begin{aligned} y_{n+1} &:= y_n - \xi_{\ell-k_{i-n-1}+1} \\ \ell_{n+1} &:= L(y_{n+1}) \end{aligned}$$

と定義する．すなわち y_{n+1} については

$$\begin{array}{cccccccccc} & c_1 & \cdots & c_{k_{i-n-1}} & c_{k_{i-n-1}+1} & \cdots & (c_{k_{i-n}}+1) & 0^{\ell-k_{i-n}-\ell_n} & D_\beta(y_n) \\ +) & 0 & \cdots & 1 & \overline{d_1} & \cdots & \overline{d_{k_{i-n}-k_{i-n-1}}} & \cdots & \cdots \\ \hline & c_1 & \cdots & (c_{k_{i-n-1}}+1) & 0 & \cdots & 0 & 0^{\ell-k_{i-n}-\ell_n} & D_\beta(y_n - \xi_{\ell-k_{i-n-1}+1}) \\ \overset{\nu}{=} & c_1 & \cdots & (c_{k_{i-n-1}}+1) & & & 0^{\ell-k_{i-n-1}-\ell_{n+1}} & & D_\beta(y_{n+1}) \end{array}$$

となっている．このとき, 次が成り立つ．

(i) $c_1 \cdots c_{k_{i-n}-1}(c_{k_{i-n}}+1)0^{\ell-k_{i-n}-\ell_n}D_\beta(y_n) \notin \mathscr{D}$ ならば $y_{n+1} \geq 0$.

(ii) ある $n < i$ が存在して $c_1 \cdots c_{k_{i-n}-1}(c_{k_{i-n}}+1)0^{\ell-k_{i-n}-\ell_n}D_\beta(y_n) \in \mathscr{D}$.

(iii) $c_1\beta^{\ell-1} + \cdots + c_{k_{i-n}-1}\beta^{\ell-k_{i-n}+1} + y_n = x+1$.

(i) により y_n と ℓ_n が帰納的に定義できることが保証される．次に (ii) により $c_1 \cdots c_{k_{i-n}-1}(c_{k_{i-n}}+1)0^{\ell-k_{i-n}-\ell_n}D_\beta(y_n) \in \mathscr{D}$ となったときにこの操作をやめ, そして (iii) により操作をやめたときに得られた列 $c_1 \cdots c_{k_{i-n}-1}(c_{k_{i-n}}+1)0^{\ell-k_{i-n}-\ell_n}D_\beta(y_n)$ が $x+1$ のベータ展開になっていることが分かる．さらに実際には

$$f_p(x+1) \in \{y_n, y_n - \beta^{\ell_n-1}\}$$

となることも示される．$f_p(x+1) = y_n$ なら定理が示されているから, $f_p(x+1) = y_n - \beta^{\ell_n-1}$ の場合を考えればよい．しかしこのとき, $y_n < 2$ より $D(y_n) = 10^{\ell_n-1}.d_\beta(f_p(y_n))$ となるため $d_1d_2\cdots d_{\ell_n-1} = 10^{\ell_n-2}$ が成り立つ．これにより $\beta^{\ell_n-1} = 1 + \sum_{1\leq j\leq p}\xi_j$ を満たす $\{\xi_j\}_{1\leq j\leq p}$ の存在を証明することができ, 定理が成り立つ． □

Lemma 3.2 より次を得る．

Corollary 3.3 任意の $N \in \mathbb{N}$ に対し, 非負整数列 $\{\varepsilon_n\}_{1\le n\le r}$ が存在して次が成り立つ.

$$f_p(N) = \left\{ -\sum_{n=1}^{r} \varepsilon_n T_\beta^n(1) \right\}$$

3.2 (F_1) の十分条件

この小節では $\beta > 1$ を代数的整数とし, β の最小多項式を

$$x^d - a_{d-1}x^{d-1} - \cdots - a_1 x - a_0$$

とする.

Remark 3.2 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し $T_\beta^n(1) = \{\lambda_\beta\}(\tau_\beta^{n-1}(0, \cdots, 0, 1))$.

Proof. T_β と λ_β の定義から $T_\beta(1) = \beta - \lfloor \beta \rfloor = \{\lambda_\beta\}(0, \cdots, 0, 1)$. よってセクション 2.1 の可換図式により $T_\beta^n(1) = \{\lambda_\beta\}(\tau_\beta^{n-1}(0, \cdots, 0, 1))$ $(n \in \mathbb{N})$. □

次に,

$$F_\beta := \{\boldsymbol{\ell} \in \mathbb{Z}^{d-1} \mid {}^\exists k \ge 0;\ \tau_\beta^k(\boldsymbol{\ell}) = \mathbf{0}\}$$

とおく. 今, Corollary 3.3 と Remark 3.2 から次が示される.

Remark 3.3 任意の $r \in \mathbb{N}$ と非負整数列 $\{\varepsilon_n\}_{1\le n\le r}$ に対し,

$$-\sum_{n=1}^{r} \varepsilon_n \tau_\beta^{n-1}(0, \cdots, 0, 1) \in F_\beta$$

が成り立つとする. このとき, β は *(F_1)* を満たす.

さらに

$$Q_\beta = \left\{ \boldsymbol{\ell} \in \mathbb{Z}^{d-1} \;\middle|\; \begin{array}{l} {}^\exists N \in \mathbb{N},\ {}^\exists\{\boldsymbol{\ell}_n\}_{n=1}^{N} \text{ s.t. } \boldsymbol{\ell}_1 = (0, \cdots, 0, 1), \\ \boldsymbol{\ell}_N = \boldsymbol{\ell},\ \boldsymbol{\ell}_{n+1} \in \{\tau_\beta(\boldsymbol{\ell}_n), \tau_\beta^*(\boldsymbol{\ell}_n)\} \end{array} \right\}$$
$$P_\beta = \{\boldsymbol{\ell} \in Q_\beta \setminus \{0\} \mid {}^\exists N \in \mathbb{N};\ \tau_\beta^N(\boldsymbol{\ell}) = \boldsymbol{\ell}\}$$

とおく. 一般に β が Pisot 数なら Q_β は有限集合である ([11]). さらに β が 3 次の Pisot 数なら Q_β は set of witnesses になることが知られている ([9]).

これまでの準備から次の定理を得る.

Theorem 3.4 *Pisot* 数 β が次を満たすとする.

(i) $-Q_\beta = \{-\boldsymbol{\ell} \in \mathbb{Z}^{d-1} \mid \boldsymbol{\ell} \in Q_\beta\} \subset Q_\beta$.
(ii) $\tau_\beta^{-1}(P_\beta) = \{\boldsymbol{\ell} \in \mathbb{Z}^{d-1} \mid \tau_\beta(\boldsymbol{\ell}) \in P_\beta\} \subset P_\beta$
(iii) $R \subset F_\beta$. ただし R は

$$R := [\![-\delta, \delta]\!]^{d-1} \cap \{-\sum_{n=1}^{r} \varepsilon_n \tau_\beta^{n-1}(0, \cdots, 0, 1) \mid r \in \mathbb{N},\ \{\varepsilon_n\}_{n=1}^{r} \text{ は非負整数列 }\},$$

であり, また $\delta := \max\{|l_j| \mid (l_1, l_2, \cdots, l_{d-1}) \in P_\beta,\ j \in [\![1, d-1]\!]\}$ である.

このとき, β は *(F_1)* を満たす.

Proof. 証明は以下の 3 段階に分ける.

step 1: $\boldsymbol{\ell}, \boldsymbol{\ell}' \in \mathbb{Z}^{d-1}$ に対し $\tau_\beta(\boldsymbol{\ell} - \boldsymbol{\ell}') \in \{\tau_\beta(\boldsymbol{\ell}) - \tau_\beta(\boldsymbol{\ell}'), \tau_\beta(\boldsymbol{\ell}) - \tau_\beta^*(\boldsymbol{\ell}')\}$.

Proof of step 1: $\tau_\beta(\boldsymbol{\ell} - \boldsymbol{\ell}')$ の第 $d-1$ 成分について考えれば十分である．今,

$$\lfloor \lambda_\beta(\boldsymbol{\ell}) \rfloor - (\lfloor \lambda_\beta(\boldsymbol{\ell}') \rfloor + 1) = \lfloor \lambda_\beta(\boldsymbol{\ell}) \rfloor - \lfloor \lambda_\beta(\boldsymbol{\ell}') \rfloor - 1 \leq \lfloor \lambda_\beta(\boldsymbol{\ell}) - \lambda_\beta(\boldsymbol{\ell}') \rfloor \leq \lfloor \lambda_\beta(\boldsymbol{\ell}) \rfloor - \lfloor \lambda_\beta(\boldsymbol{\ell}') \rfloor$$

が成り立つ．これより主張を得る.

step 2: $\boldsymbol{\ell} \in F_\beta$ かつ $\mathbb{k}_1 = \tau_\beta^{n-1}(0, \cdots, 0, 1)$ $(n \in \mathbb{N})$ とする．このとき,

$$\boldsymbol{\ell} - \mathbb{k}_1 \notin F_\beta \Rightarrow \boldsymbol{\ell} - \mathbb{k}_1 \in P_\beta.$$

Proof of step 2: step 1 より $\{\mathbb{k}_n\}_{n \geq 2} \subset Q_\beta$ で

$$\tau_\beta(\tau_\beta^{n-2}(\boldsymbol{\ell}) - \mathbb{k}_{n-1}) = \tau_\beta^{n-1}(\boldsymbol{\ell}) - \mathbb{k}_n \text{ かつ } \mathbb{k}_n \in \{\tau_\beta(\mathbb{k}_{n-1}), \tau_\beta^*(\mathbb{k}_{n-1})\}$$

を満たすものが存在する．そこで $\tau_\beta^{N-1}(\boldsymbol{\ell}) \neq \mathbf{0}$ かつ $\tau_\beta^N(\boldsymbol{\ell}) = \mathbf{0}$ とすると,

$$\tau_\beta^N(\boldsymbol{\ell} - \mathbb{k}_1) = \tau_\beta^N(\boldsymbol{\ell}) - \mathbb{k}_{N+1} = -\mathbb{k}_{N+1} \in -Q_\beta \subset Q_\beta.$$

ここで $\boldsymbol{\ell} - \mathbb{k}_1 \notin F_\beta$ であるから $-\mathbb{k}_{N+1} \notin F_\beta$. 特に $\tau_\beta^{-1}(P_\beta) \subset P_\beta$ の仮定から $-\mathbb{k}_{N+1} \in P_\beta$ となる．よって再度 $\tau_\beta^{-1}(P_\beta) \subset P_\beta$ により $\boldsymbol{\ell} - \mathbb{k}_1 \in P_\beta$ を得る.

step 3: 主張の証明.

Proof of step 3: Remark 3.3 より次を示せばよい.

$$V := \{-\sum_{n=1}^{r} \varepsilon_n \tau_\beta^{n-1}(0, \cdots, 0, 1) \mid r \in \mathbb{N},\ \{\varepsilon_n\}_{n=1}^r \text{ は非負整数列 }\} \subset F_\beta$$

そこで $R_n \subset \mathbb{Z}^{d-1}$ を $R_0 := R$,

$$R_n := \left\{ \boldsymbol{\ell} \in V \setminus \bigcup_{k=0}^{n-1} R_k \;\middle|\; \boldsymbol{\ell} = \boldsymbol{\ell}' - \tau_\beta^{j-1}(0, \cdots, 0, 1),\ \boldsymbol{\ell}' \in R_{n-1},\ j \in \mathbb{N} \right\}$$

で定義する．このとき $\cup_{n \geq 0} R_n = V$ が成り立つ．よって $R_n \subset F_\beta$ を帰納法で示せばよい．そこで $R_{n-1} \subset F_\beta$ とし, さらに $\boldsymbol{\ell} \in R_n \setminus F_\beta$ が存在したと仮定する．このとき $\boldsymbol{\ell} = \boldsymbol{\ell}' - \tau_\beta^{j-1}(0, \cdots, 0, 1)$, $\boldsymbol{\ell}' \in R_{n-1}$ と表せるため, step 1 から $\tau_\beta^N(\boldsymbol{\ell}) \in Q_\beta$ を満たす $N \in \mathbb{N}$ が存在し, step 2 から $\tau_\beta^N(\boldsymbol{\ell}) \in P_\beta$ となる．したがって $\tau_\beta^{-1}(P_\beta) \subset P_\beta$ により $\boldsymbol{\ell} \in P_\beta$ を得る．特に $\boldsymbol{\ell} \in V$ より, δ の定義から $\boldsymbol{\ell} \in R_0$ となる．これは $R_n \cap R_0 = \emptyset$ に矛盾する.

□

3.3 Proof of Theorem 3.1

以下, $\beta > 1$ の最小多項式は $x^3 - 4x^2 + 4x - 2$ とする. Theorem 3.1 の証明の前に準備を行う.

Remark 3.4 $-Q_\beta \subset Q_\beta$.

Proof. $\boldsymbol{\ell} \in -Q_\beta$ とすると,

$$^\exists\{\boldsymbol{\ell}_n\}_{n=1}^N \text{ s.t. } \boldsymbol{\ell}_1 = (0,-1),\ \boldsymbol{\ell}_N = \boldsymbol{\ell},\ \boldsymbol{\ell}_{n+1} \in \{\tau_\beta(\boldsymbol{\ell}_n), \tau_\beta^*(\boldsymbol{\ell})\}$$

が成り立つ. 今, τ による $(0,1)$ の軌道を調べると,

$$(0,1) \stackrel{\tau_\beta}{\to} (1,2) \stackrel{\tau_\beta}{\to} (2,2) \stackrel{\tau_\beta}{\to} (2,1) \stackrel{\tau_\beta}{\to} (1,0) \stackrel{\tau_\beta}{\to} (0,0).$$

であるから $\boldsymbol{\ell}_1 = (0,-1) = \tau_\beta^*(1,0) \in Q_\beta$. よって $\boldsymbol{\ell}_n \in Q_\beta$ $(n \in [\![1,N]\!])$ より $\boldsymbol{\ell} = \boldsymbol{\ell}_N \in Q_\beta$. □

また定理の証明では次の Remark を認めるものとする.

Remark 3.5 β について次が成り立つ.

(1) $P_\beta = \{(1,1)\}$. *(2)* $2\beta^{-1} < 1$.

Proof of Theorem 3.1. 今, Remark 3.4 より β は Theorem 3.4 の条件 (i) は満たしている. 次に条件 (ii) を満たすことを示す. $\tau_\beta(\zeta,1) = (1,1)$ $(\zeta \in \mathbb{Z})$ とすると $\lfloor(2\zeta-4)\beta^{-1} + 2\beta^{-2}\rfloor = -1$ より,

$$\begin{cases} -1 \le (2\zeta-4)\beta^{-1} + 2\beta^{-2} & \cdots(1) \\ (2\zeta-4)\beta^{-1} + 2\beta^{-2} < 0 & \cdots(2) \end{cases}$$

ここで $1 = 4\beta^{-1} - 4\beta^{-2} + 2\beta^{-3}$ と (1) より,

$$0 \le 2\zeta\beta^{-1} - 2\beta^{-2} + 2\beta^{-3}$$

となる. よって $\beta^{-1} < 1$ より,

$$0 \le 2\zeta\beta^{-1} - 2\beta^{-2} + 2\beta^{-3} = 2\zeta\beta^{-1} - 2(1-\beta^{-1})\beta^{-2} < 2\zeta\beta^{-1},$$

すなわち $\zeta \ge 1$ を得る. 他方, (2) と Remark 3.5-(2) より,

$$0 > (2\zeta-4)\beta^{-1} + 2\beta^{-2} > (2\zeta-4)\beta^{-1},$$

すなわち, $\zeta < 2$ を得る. したがって $\zeta = 1$. これより $\tau_\beta^{-1}(\{(1,1)\}) = \{(1,1)\}$. 最後に (iii) を満たすことを確認する. そこで,

$$\begin{aligned} K_0 &:= \{\boldsymbol{\ell} \in [\![-1,1]\!]^2 \mid \boldsymbol{\ell} = -\tau_\beta^{n-1}(0,1),\ n \in \mathbb{N}\} \\ K_n &:= \{\boldsymbol{\ell} \in [\![-1,1]\!]^2 \mid \boldsymbol{\ell} = \boldsymbol{\ell}_1 + \boldsymbol{\ell}_2,\ \boldsymbol{\ell}_1, \boldsymbol{\ell}_2 \in K_{n-1}\} \end{aligned}$$

とおく. このとき, $K_n \subset K_{n+1}$ かつ十分大きな n に対し $R \subset K_n$ が成り立つ. 今, K_n を調べると

$$K_1 = \{(-1,-1), (0,-1), (-1,0), (0,0)\}$$

及び $n \geq 1$ に対し $R \subset K_n$ となることが確認できる．さらに

$$\begin{aligned}
&(-1,0) \stackrel{\tau_\beta}{\to} (0,1) \stackrel{\tau_\beta}{\to} (1,2) \stackrel{\tau_\beta}{\to} (2,2) \stackrel{\tau_\beta}{\to} (2,1) \stackrel{\tau_\beta}{\to} (1,0) \stackrel{\tau_\beta}{\to} (0,0)\\
&(-1,-1) \stackrel{\tau_\beta}{\to} (-1,0) \stackrel{\tau_\beta}{\to} \cdots \stackrel{\tau_\beta}{\to} (0,0)\\
&(0,-1) \stackrel{\tau_\beta}{\to} (-1,-1) \stackrel{\tau_\beta}{\to} \cdots \stackrel{\tau_\beta}{\to} (0,0)
\end{aligned}$$

より $K_1 \subset F_\beta$ も確認できる．以上から Theorem 3.4 により β は (F_1) を満たす． $\square$

参考文献

[1] S. Akiyama, Pisot numbers and greedy algorithm, Number Theory, Diophantine, Computatinal and Algebraic Aspects, Edited by K. Györy, A. Pethö and V.T Sós, 9-21, de Gruyter 1998.

[2] S. Akiyama, Cubic Pisot units with finite beta expansions, ‘Algebraic Number Theory and Diophantine Analysys’, ed. by Halter-Koch and R.F. Tichy, de Gruyter (2000), 11-26.

[3] S. Akiyama, T. Borbély, H. Brounotte, A. Pethö and J. M. Thuswaldner, Generalized radix representations and dynamical systems I, Acta Math. Hungar., **108** (2005), 207-238.

[4] S. Akiyama, H. Brounotte, A. Pethö and J. M. Thuswaldner, Generalized radix representations and dynamical systems II, Acta Arith **121** (2006) no. 1, 21-61.

[5] S. Akiyama, Positive Finiteness of Number Systems, Number Theory, 1-10. Dev. Math., 15 Springer, New York, 2006.

[6] C. Frougny and B. Solomyak, Finite beta-expansions, Ergodic Theory and Dynamical Systems, **12** (1992), no. 4, 713-723.

[7] M. Hollander, Linear numeration systems, finite beta expansions, and discrete spectrum of substitution dynamical systemms, Ph. D. thesis, University of Washington, 1996.

[8] Sh. Ito and Y. Takahashi, Markov subshifts and realization of β-expansions, J. Math. Soc. Japan, 26(1974), 33-55.

[9] F. Takamizo and M. Yoshida, Some class of cubic Pisot numbers with finiteness property, Tsukuba J. MATH., **46** (2022), no. 1, 67-119.

[10] W. Parry, On the β-expansion of real numbers, Acta Math. Acad. Sci. Hungar, **11** (1960), 401-416.

[11] M. Yoshida and F. Takamizo, Finite β-spansion and odometers, Tsukuba J. MATH., **45** (2021), no. 2,135-162.