Lattice isometries and K3 surface automorphisms

北海道大学大学院 理学院 数学専攻
高田佑太 (Yuta TAKADA)

概要

講演者は「どのような多項式がユニモジュラー偶格子上の自己同型の固有多項式として実現されるか」という問題に関する Bayer-Fluckiger の定理を，自己同型の行列式が -1 である場合に拡張した．その応用として，20 次のすべての Salem 数の対数が（非射影的）K3 曲面の自己同型のエントロピーとして実現されることが証明できる．本講演ではこれらについて紹介する．

1 導入

「どのような多項式がユニモジュラー偶格子上の自己同型の固有多項式として実現されるか」という問題が 2002 年に Gross と McMullen により取り上げられた [4]．**格子**とは階数有限の自由 $\mathbb{Z}$ 加群 Λ とその上の内積 $b : \Lambda \times \Lambda \to \mathbb{Z}$ の組のことである．ここで**内積**とは非退化対称双線型形式のことである（正値性は仮定しない）．格子 (Λ, b) が**ユニモジュラー**であるとは Λ がその双対 $\Lambda^\vee := \{y \in \Lambda \otimes \mathbb{Q} \mid b(x, y) \in \mathbb{Z} \text{ for all } x \in \Lambda\}$ に一致すること，**偶**であるとはすべての $x \in \Lambda$ に対して $b(x, x) \in 2\mathbb{Z}$ が成り立つことである．格子 (Λ, b) 上の自己同型といえば，加群としての自己同型 $t : \Lambda \to \Lambda$ で内積を保存する，つまり任意の $x, y \in \Lambda$ に対して $b(t(x), t(y)) = b(x, y)$ をみたすものを指す．以下，格子 (Λ, b) を単に Λ とかくこともある．

上の問題は純粋に整数論的だが，あとで述べるように，K3 曲面とよばれる複素曲面の自己同型への応用がある．実際，彼らは [4] の中で K3 曲面への応用についても述べている．

上の問題について考える前に少し言葉を用意する．$F(X)$ を定数項 $F(0)$ が 0 でないモニック[*1]多項式とする．F が $*$**-対称**であるとは $F(X)$ が $F^*(X) := F(0)^{-1}X^{\deg F}F(X^{-1})$ に一致するときにいう．F が $*$-対称であるとき定数項 $F(0)$ は 1 または -1 である．これに応じて F は $+1$**-対称**または -1**-対称**であるという．一般に標数が 2 でない体上の内積空間の自己同型の固有多項式は $*$-対称であることがいえる．

さて，$F \in \mathbb{Z}[X]$ を符号数 (r, s) のユニモジュラー偶格子上の自己同型の固有多項式とする．このとき F は $*$-対称で，さらに $m(F)$ を絶対値が 1 より大きい F の根の重複も数えた個数として次の 2 条件 (Sg)，(Sq) をみたす：

$$r, s \geq m(F) \text{ かつ「} F(1)F(-1) \neq 0 \text{ ならば } r \equiv s \equiv m(F) \bmod 2\text{」}. \tag{Sg}$$

$$|F(1)|, |F(-1)|, (-1)^{(\deg F)/2}F(1)F(-1) \text{ はすべて平方数}. \tag{Sq}$$

[*1] 多項式が**モニック**であるとは最高次の係数が 1 であることである．

これらのことは F が分離的，すなわち重根をもたないという仮定の下で，Gross と McMullen[4] によって証明されている．実際には分離的であるという仮定は不要であることが Bayer-Fluckiger[3] により（別の方法で）で示されている[*2]．

Gross と McMullen は $+1$-対称なモニック多項式 F が**既約であれば**，条件 (Sg)，(Sq) が，符号数 (r,s) のあるユニモジュラー偶格子上の自己同型の固有多項式として F が実現されるための十分条件でもあると予想し，部分的に証明した．Bayer-Fluckiger と Taelman[1] はこの予想が正しいことを，局所-大域的な議論を用いることで証明した．一方でこの予想は，[4] の中でも指摘されているように，F が可約の場合には正しくない．Bayer-Fluckiger は [2, 3] の中で F が可約かつ $+1$-対称である場合にも議論を進め，F が符号数 (r,s) のあるユニモジュラー偶格子上の半単純な自己同型の固有多項式として実現されるための必要十分条件を与えた．講演者はこれを F が -1-対称である場合にも拡張した [9]．以下，これらのことを定式化する．

r,s を非負整数，$F\in\mathbb{R}[X]$ を条件 (Sg) をみたす $*$-対称なモニック多項式とする．また V を符号数 (r,s) の $\mathbb{R}$ 上の内積空間とする．固有多項式が F であるような V 上の半単純な自己同型 t が与えられたとき，V は

$$V=\bigoplus_{f:F\text{の既約因子}} V(f;t),\quad \text{ただし } V(f;t)=\{v\in V\mid f(t)v=0\}$$

と分解される．F の $\mathbb{R}[X]$ 内での $*$-対称な既約因子全体の集合を $I(\mathbb{R})$ とおき，写像 $\mathrm{idx}_t: I(\mathbb{R})\to\mathbb{Z}$ を

$$\mathrm{idx}_t(f)=r_f-s_f,\quad \text{ただし } (r_f,s_f) \text{ は } V(f;t) \text{ の符号数}$$

で定める．さらにこのようにして得られる写像全体の集合を $\mathrm{Idx}_{r,s}(F)$ で表す：

$$\mathrm{Idx}_{r,s}(F)=\{\mathrm{idx}_t\mid t \text{ は固有多項式が } F \text{ であるような } V \text{ 上の半単純な自己同型 }\}.$$

$\iota\in\mathrm{Idx}_{r,s}(F)$ に対して $\mathrm{idx}_t=\iota$ となるような自己同型 $t:V\to V$ を短く (F,ι)**-自己同型**とよぶことにする．格子上の自己同型 t が (F,ι)-自己同型とは t の線型拡張 $\Lambda\otimes\mathbb{R}\to\Lambda\otimes\mathbb{R}$ が (F,ι)-自己同型であることである．

定理 1.1 r,s を $r\equiv s \mod 8$ をみたす非負整数[*3]，$F\in\mathbb{Z}[X]$ を (Sg), (Sq) をみたす $*$-対称なモニック多項式，$\iota\in\mathrm{Idx}_{r,s}(F)$ とする．このとき以下は同値である：

(i) 符号数 (r,s) のユニモジュラー偶格子で，半単純な (F,ι)-自己同型をもつものが存在する．

(ii) $\mathrm{ob}:\Omega\to\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ が零写像である．ここで Ω,ob はそれぞれ F と ι から決まる群と準同型である．

Ω,ob の定義を含め，§2 でより詳しくこの定理について述べる．完全な証明は [9] をみてほしい．

次に，上の結果の K3 曲面への応用について述べる．**K3 曲面**とはコンパクト複素曲面[*4]のひとつのクラスで，単連結かつ標準束が自明なコンパクト複素曲面として定義される．最近の話題として，

[*2] Bayer-Fluckiger の証明では自己同型が半単純であることを仮定しているが，その仮定も外すことができる．

[*3] 次のことが知られている：$r\equiv s \mod 8$ をみたす非負整数 r,s に対して符号数 (r,s) のユニモジュラー偶格子が存在する．逆に (r,s) がユニモジュラー偶格子の符号数ならば $r\equiv s \mod 8$ が成り立つ．

[*4] 複素曲面とは 2 次元の複素多様体で，実次元は 4 である．

K3 曲面上の自己同型の位相的エントロピーとして現れる数を決定する，というエントロピースペクトラムの問題がある．K3 曲面の自己同型のエントロピーは 0 でなければ高々 22 次の Salem 数の対数になることが知られている．ここで **Salem 数**とは，実の代数的整数 $\lambda > 1$ で，λ^{-1} と共役，かつ $\lambda^{\pm 1}$ 以外の共役が絶対値 1 であるような数のことである．また，どんな K3 曲面 X も中間コホモロジー群 $H^2(X, \mathbb{Z})$ が交叉形式によって符号数 $(3, 19)$ のユニモジュラー偶格子となる．このような格子上の自己同型は一定の条件の下で K3 曲面の自己同型と対応する．

これを利用して Bayer-Fluckiger と Taelman は 22 次の Salem 数 λ に対して，$\log \lambda$ が K3 曲面の自己同型のエントロピーであるためには，λ の最小多項式が (Sq) をみたすことが必要十分であることを示した [1]．さらに Bayer-Fluckiger は次数が $4, 6, 8, 12, 14, 16$ の任意の Salem 数 λ に対して，$\log \lambda$ が（非射影的）K3 曲面の自己同型でエントロピーとして実現されることを示している [3]．講演者はこの流れに続いて，定理 1.1 を用いて次のことを証明した [9]．

定理 1.2　λ を 20 次の任意の Salem 数とする．このとき非射影的 K3 曲面とその上の自己同型でエントロピーが $\log \lambda$ であるようなものが存在する．

§3 で K3 曲面の自己同型と格子の自己同型の関係をより詳しく述べ，上の定理の概略を与える．

2　定理 1.1 の証明の概略

r, s を $r \equiv s \mod 8$ をみたす非負整数，$F \in \mathbb{Z}[X]$ を (Sg), (Sq) をみたす $*$-対称なモニック多項式，$\iota \in \mathrm{Idx}_{r,s}(F)$ とする．定理 1.1 では (ii)⇒(i) の証明が本質的なのでその概略を述べる．まず，固有多項式が F の半単純な線型変換 α をもつ $\mathbb{Q}$ ベクトル空間 M を定義する．その後に，以下の条件をみたす符号数 (r, s) の内積 $b : M \times M \to \mathbb{Q}$ が存在するための条件を考える：

$$\begin{aligned} &\alpha : M \to M \text{ は内積 } b \text{ を保つ自己同型で } \mathrm{idx}_\alpha = \iota \text{ をみたし，さらに} \\ &\alpha\text{-不変なユニモジュラー偶格子が } (M, b) \text{ 内に存在する．} \end{aligned} \tag{1}$$

ここで一般に内積空間 (M, b) 内の格子 Λ といえば，M のある基底が $\mathbb{Z}$ 上生成する自由 $\mathbb{Z}$ 加群 Λ で，b の Λ への制限によって Λ が格子となるものを指す．上のような内積 b が M に定義できるための必要十分条件が (ii) であり，それが局所-大域的な議論によって示されるのである．ここでいう局所-大域的な議論とは，$\mathbb{Q}$ 上の問題をその“局所化”である p 進数体や実数体 $\mathbb{R}$ 上で考えたり，そうして局所的に考えた問題ともとの“大域的な”問題（いまの場合は $\mathbb{Q}$ 上の問題）との関係を議論したりすることを指す．§2.1 で局所-大域的な議論のための準備をし，§2.2 で証明の概略を 4 つの段階に分けてより詳しく述べる．なお，証明のアイデアの大枠は Bayer-Fluckiger[3] によるものである．定理 1.1 の完全な証明は [9] をみてほしい．

2.1　準備

まず, 内積空間の不変量について考える．(V, b) を一般の体 K 上の内積空間とし $e_1, \ldots, e_d$ を V の基底とする．次元 d は明らかに (V, b) の不変量である．$d \times d$ 行列 $(b(e_i, e_j))_{ij}$ の行列式は $K^\times / K^{\times 2}$ の元とみて基底に依らずに決まるから，これも (V, b) の不変量である．ここで $K^\times := K \setminus \{0\}$，$K^{\times 2} := \{x^2 \mid x \in K^\times\}$ である．$\det(b(e_i, e_j))_{ij} \in K^\times / K^{\times 2}$ を (V, b) の**行列式**といい $\det b$ で表す．

K が p 進数体 $\mathbb{Q}_p$（p は素数）のときは，これらに加えて **Hasse-Witt 不変量**とよばれる，$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{0, 1\}$ に値をとる不変量が重要である．$\mathbb{Q}_p$ 上の内積空間 (V, b) に対し，その Hasse-Witt 不変量を $\epsilon_p(b)$ で表す．本稿では Hasse-Witt 不変量の定義は割愛する[*5]が，例えば以下の事実が Hasse-Witt 不変量の重要性を端的に表している．

事実 2.1（[8, §4, Theorem 7]） p を素数とする．$\mathbb{Q}_p$ 上のふたつの内積空間は，同じ次元，同じ行列式，同じ Hasse-Witt 不変量をもつとき，かつそのときに限り同型である．

つまり，次元，行列式，Hasse-Witt 不変量が $\mathbb{Q}_p$ 上の内積空間の完全不変量である．なお，実数体 $\mathbb{R}$ 上の内積空間は符号数が完全不変量だが，Hasse-Witt 不変量を定義することができる．$\mathbb{R}$ 上の内積空間にも Hasse-Witt 不変量を考えることで，局所-大域的な議論が可能となる．

以下では $\mathbb{Q}$ の素点[*6]全体を $\mathcal{V}$ で表し，無限素点 ∞ に対して $\mathbb{Q}_\infty$ は実数体 $\mathbb{R}$ を表すとする．また，$\mathbb{Q}$ 上の内積空間 (V, b) と素点 $v \in \mathcal{V}$ に対して，b の $\mathbb{Q}_v$ ベクトル空間 $V \otimes \mathbb{Q}_v$ への線型拡張を $b \otimes \mathbb{Q}_v$ で表し，$\epsilon_v(b) := \epsilon_v(b \otimes \mathbb{Q}_v)$ とする．次の事実は $\mathbb{Q}_\infty = \mathbb{R}$ 上の内積空間にも Hasse-Witt 不変量を考えるひとつ理由としてみることができる．

事実 2.2（[8, §4.3]） (V, b) を $\mathbb{Q}$ 上の内積空間とする．このときほとんどすべての素点 v で（i.e., 有限個の素点を除いて）$\epsilon_v(b) = 0$ で，かつ $\sum_{v \in \mathcal{V}} \epsilon_v(b) = 0$ が成り立つ．

2.2 定理 1.1 の証明の概略

r, s を $r \equiv s \mod 8$ をみたす非負整数，$F \in \mathbb{Z}[X]$ を (Sg), (Sq) をみたす $*$-対称なモニック多項式，$\iota \in \mathrm{Idx}_{r,s}(F)$ とする．以下，定理 1.1 の (ii)⇒(i) の証明の概略を 4 つの段階に分けて述べる．

Step 1. 固有多項式が F の半単純な線型変換をもつ $\mathbb{Q}$ ベクトル空間を定義． F の $\mathbb{Q}[X]$ 内での既約因子 f に対して，n_f を F における f の重複度とし $M^f := [\mathbb{Q}[X]/(f)]^{n_f}$ とおく．そして M^f たちを直和して得られる $\mathbb{Q}$ ベクトル空間を M とする：$M := \bigoplus_{f:F\text{の既約因子}} M^f$．このとき $\mathbb{Q}[X] \twoheadrightarrow M$ における X の像を α とすると，（M を $\mathbb{Q}$ 代数 $\prod_f M^f$ とみたときの）α 倍写像 $M \to M$ は F を固有多項式とする半単純な線型変換である．

Step 2. 局所化． 仮に条件 (1) をみたす M の内積 b が存在するならば，各素点 v に対して $b_v = b \otimes \mathbb{Q}_v$ として，明らかに次の (P1)，(P2) が成り立つ．

$$\alpha : M_v \to M_v \text{ は内積 } b_v \text{ を保つ自己同型である．} \tag{P1}$$

$$\begin{array}{l} v \text{ が素数 } p \text{ ならば } \alpha\text{-不変な } \mathbb{Z}_p\text{-ユニモジュラー偶格子が } (M_p, b_p) \text{ 内に存在する．} \\ \text{また } v = \infty \text{ ならば } \mathrm{idx}_\alpha = \iota. \end{array} \tag{P2}$$

[*5] Hasse-Witt 不変量の定義は，例えば [8, §4.2] をみるとよい．ただし，本稿では値を $\{0, 1\}$ にとるものとしている（加法的）が，[8] では値を $\{1, -1\}$ にとるものとしている（乗法的）．流儀の違いであって本質的な違いではない．

[*6] 本稿では素点の定義は割愛するが，もし知らなければ，ここでは素数または無限素点とよばれる記号 ∞ と思えばよい．

ここで $\mathbb{Z}_p$ は p 進整数環で，$\mathbb{Z}_p$**-格子**とは §1 で述べた格子の定義の $\mathbb{Z}$ を $\mathbb{Z}_p$ で置き換えたものである．また，非自明だが $F(\pm 1)=0$ の場合は次の (P3) も各素点 v に対して成り立つ．

$$\det(b_v|_{M^{X\mp 1}}) = \begin{cases} (-1)^{s_\pm}|G(\pm 1)| & \text{if } n_- \text{ is even} \\ (-1)^{s_\pm}2|G(\pm 1)| & \text{if } n_- \text{ is odd} \end{cases} \quad \text{in } \mathbb{Q}_v^\times/\mathbb{Q}_v^{\times 2}. \tag{P3}$$

ただし $G(X)=F(X)/((X-1)^{n_{X-1}}(X+1)^{n_{X+1}})$, $s_\pm = (n_{X\mp 1} - \iota(X\mp 1))/2$ である．

そこで M_v 上の内積 b_v の族 $\{b_v\}_{v\in\mathcal{V}}$ であって，各 b_v に対して (P1)–(P3) が成り立ち，かつ

$$\#\{(v,f)\in\mathcal{V}\times I \mid \epsilon_v(b_v|_{M^f})=1\}<\infty \tag{2}$$

をみたすもの全体を $\mathcal{B}$ とおく：

$$\mathcal{B}=\{\{b_v\}_{v\in\mathcal{V}} \mid \text{各 } b_v \text{ は (P1)–(P3) をみたし，かつ (2) が成り立つ}\}.$$

ただし，I は多項式 F の $\mathbb{Q}[X]$ 内での $*$-対称な既約因子全体の集合である．$\mathcal{B}$ は空でないことが証明できる．

Step 3. **局所-大域原理．** $\{b_v\}_v\in\mathcal{B}$ が

$$\sum_{v\in\mathcal{V}}\epsilon_v(b_v|_{M^f})=0 \quad \text{for all } f\in I \tag{3}$$

をみたすならば，$\alpha : M\to M$ によって保存される M の内積 b で，すべての $v\in\mathcal{V}$ で $b\otimes\mathbb{Q}_v\cong b_v$ が成り立つものが存在する．標語的に言えば「(3) をみたす局所的な内積の族は同型を除いて大域的な内積に持ち上がる」．定理 1.1 の主張に現れる Ω や ob は，(3) をみたす $\{b_v\}_v\in\mathcal{B}$ が存在するための必要十分条件を記述するのに用いられる．これについては §2.3 で改めて述べる．以下，(3) をみたす $\{b_v\}_v\in\mathcal{B}$ が存在すると仮定し，それをひとつ固定する．また b を上のような M の内積とする．

Step 4. **仕上げ．** 各素数 p に対して $(M_p, b\otimes\mathbb{Q}_p)$ 内の α-不変な $\mathbb{Z}_p$-ユニモジュラー偶格子 Λ_p を適当に選ぶと

$$\Lambda := \{x\in M \mid \text{すべての素数 } p \text{ 対して } (x \text{ の } M\to M_p \text{ における像})\in\Lambda_p\}$$

が (M,b) 内の α-不変なユニモジュラー偶格子となる．また，$b\otimes\mathbb{Q}_\infty\cong b_\infty$ は (P2) をみたすので M の（したがって Λ の）符号数は (r,s) で $\mathrm{idx}_\alpha=\iota$ が成り立っている．こうして，(F,ι)-自己同型をもつ符号数 (r,s) のユニモジュラー偶格子の存在が示される．

2.3 局所-大域障害

ここでは (3) をみたす $\{b_v\}_v\in\mathcal{B}$ が存在するための必要十分条件を記述する．記号は §2.2 の通りとし，$C(I):=\{\gamma : I\to\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\}=(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\oplus I}$ とおく．また，$\eta:\mathcal{B}\to C(I)$ を $\beta=\{b_v\}_v\in\mathcal{B}$ に対して

$$\eta(\beta)=(f\mapsto\sum_{v\in\mathcal{V}}\epsilon_v(b_v|_{M^f}))$$

で定義する．$\beta\in\mathcal{B}$ に対して，(3) は $\eta(\beta)=\mathbf{0}$ と書き換えることができて，さらに

$$\eta(\beta)\cdot c=0 \quad \text{for all } c\in C(I) \tag{4}$$

と同値である．ただし $\gamma, c \in C(I)$ に対して $\gamma \cdot c = \sum_{f \in I} \gamma(f)c(f)$ である．この言い換えは明らかだが重要である．

次に η の像 $\eta(\mathcal{B}) \subset C(I)$ がどのような集合か考える．簡単のため n_{X-1}, n_{X+1} はともに 1 でも 2 でもないと仮定する．このとき $f, g \in I$ に対して素数の集合 $\Pi_{f,g}$ を次をみたす素数 p 全体の集合として定義する：

f, g それぞれの $\mathbb{Z}_p[X]$ 内での $*$-対称な既約因子 $\widehat{f}, \widehat{g}$ で，$\mathbb{F}_p[X]$ 内で
$\widehat{f} \bmod p$ と $\widehat{g} \bmod p$ が共通の $*$-対称な既約因子をもつものが存在する．

ただし $\mathbb{F}_p$ は位数 p の有限体である．さらに $C(I)$ に同値関係 $\sim$ を次の 2 項関係 R で生成されるものとして定義する：

$$R(\gamma, \gamma') \iff \gamma' = \gamma + \mathbf{1}_{\{f,g\}} \quad \text{for some } f, g \text{ with } \Pi_{f,g} \neq \emptyset$$

ただし $H \subset I$ に対して $\mathbf{1}_H \in C(I)$ は特性関数である．以上の準備の下で次が成り立つ．

定理 2.3 $\eta(\beta) \subset C(I)$ は $\sim$ に関するひとつの同値類である．

この定理を用いてさらに条件 (3) を言い換える．$C_\sim(I) := \{c \in C(I) \mid c(f) = c(g) \text{ if } \Pi_{f,g} \neq \emptyset\}$ とおく．$\gamma, \gamma' \in C(I)$ に対して $\gamma \sim \gamma'$ ならば任意の $c \in C_\sim(I)$ に対して $\gamma \cdot c = \gamma' \cdot c$ が成り立つ．したがって $- \cdot - : C(I) \times C(I) \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ は $C(I)/\sim \times C_\sim(I) \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ を誘導する．とくに定理 2.3 より

$$C_\sim(I) \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z};\ c \mapsto \eta(\beta) \cdot c \quad \text{for some } \beta \in \mathcal{B} \tag{5}$$

が well-defined である．さらに実は $\beta \in \mathcal{B}$ に対して $\eta(\beta) \cdot \mathbf{1}_I = 0$ がいえる．そこで $\Omega := C_\sim(I)/\{\mathbf{0}, \mathbf{1}_I\}$ とおくと (5) から $\Omega \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ が誘導される．この準同型を ob で表す[*7]．このとき ob が零写像であることが (4) と同値であり，したがって (3) とも同値である．

つまり，$\mathrm{ob} : \Omega \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ が零写像ならば，§2.2 で述べたように，(F, ι)-自己同型をもつ符号数 (r, s) のユニモジュラー偶格子が存在する．以上が定理 1.1 の (ii)⇒(i) の証明の概略である．

以下，定理 1.1 の簡単な適用例に触れておく．

例 2.4 Ω が自明群ならば $\mathrm{ob} : \Omega \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ は零写像であるしかない．例えば F が既約であれば Ω は自明群である．つまり定理 1.1 から，「F が既約ならば（任意の ι に対して）符号数 (r, s) のユニモジュラー偶格子で，半単純な (F, ι)-自己同型をもつものが存在する」ということがいえる．これは Bayer-Fluckiger と Taelman による結果 [1] に他ならない．

より具体的な例として次のようなこともいえる．

例 2.5 $F(X) = (X^4 - X^2 + 1)(X - 1)^4$ とする．F は $+1$-対称で $(r, s) = (8, 0)$ と $(4, 4)$ の両方に対して条件 (Sg) が成り立つ．また，条件 (Sq) も成り立つ．いまの場合，$\Pi_{X^4 - X^2 + 1, X-1}$ は空集合で $\Omega \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ である．とくに ob は必ずしも零とは限らない．実際，$(r, s) = (8, 0)$ の場合は ob が消

[*7] ob は「障害（obstruction）」に因んでいる．この障害が消えるとき，かつそのときに限り局所的な内積の族 $\{b_v\}_v$ で大域的な内積に持ち上がるものが存在するのである．

えない．これは F が符号数 $(8,0)$ のユニモジュラー偶格子，つまり E_8 型格子の自己同型の固有多項式ではあり得ないことを意味する．

一方で F は符号数 $(4,4)$ のユニモジュラー偶格子の自己同型の固有多項式としては実現できる．実際，X^4-X^2+1 と $(X-1)^4$ はそれぞれ $+1$-対称で条件 (Sq) をみたす．さらに $(r,s)=(2,2)$ に対して条件 (Sg) が成り立つから，X^4-X^2+1 と $(X-1)^4$ はそれぞれ符号数 $(2,2)$ のユニモジュラー偶格子の自己同型の固有多項式として実現できる．あとはそれらを直和すればよい．

3　K3 曲面への応用

K3 曲面とは，Enriques-Kodaira の分類とよばれる，コンパクト複素曲面の分類によるひとつのクラスで，単連結かつ標準束が自明なコンパクト複素曲面として定義される．標準束が自明なことは至るところ消えない正則 2-形式が存在することを意味する．K3 曲面の具体例としては，複素射影空間 $\mathbb{P}^3$ 内の非特異 4 次曲面，とくに $\{[x:y:z:w]\in\mathbb{P}^3 \mid x^4+y^4+z^4+w^4=0\}$ などが挙げられるが，本稿では具体的な K3 曲面というよりは曲面のクラスとしての性質が中心になる．この節では，K3 曲面の自己同型とユニモジュラー偶格子の自己同型の関係を述べ，定理 1.2 の証明の概略を与える．

3.1　自己同型のリフト

まず，どんな K3 曲面も微分同相であることが知られており，とくに（特異）コホモロジー群はどんな K3 曲面に対しても共通に次のようになっている：K3 曲面 $\mathcal{X}$*8に対して

$$H^0(\mathcal{X},\mathbb{Z})\cong H^4(\mathcal{X},\mathbb{Z})\cong\mathbb{Z},\quad H^1(\mathcal{X},\mathbb{Z})=H^3(\mathcal{X},\mathbb{Z})=0,\quad H^2(\mathcal{X},\mathbb{Z})\cong\mathbb{Z}^{22}.$$

さらに 2 次コホモロジー群 $H^2(\mathcal{X},\mathbb{Z})$ は交叉形式（カップ積）によって符号数 $(3,19)$ のユニモジュラー偶格子となる．符号数 $(3,19)$ のユニモジュラー偶格子を **K3 格子**とよぶ．一般に不定値のユニモジュラー偶格子は同型を除いて一意的であることが知られており，とくに K3 格子も一意的である．

次に，K3 曲面の 2 次コホモロジー群に Hodge 構造と Kähler 錐とよばれる複素構造を反映した 2 つの構造が存在することを述べる．$\mathcal{X}$ を K3 曲面とし，$\mathcal{X}$ 上の消えない正則 2-形式を $\omega_{\mathcal{X}}$ で表す．このとき $H^2(\mathcal{X},\mathbb{C})=H^2(\mathcal{X},\mathbb{Z})\otimes\mathbb{C}$ の次の直和分解を $\mathcal{X}$ の **Hodge 構造**という：

$$H^2(\mathcal{X},\mathbb{C})=H^{2,0}(\mathcal{X})\oplus H^{1,1}(\mathcal{X})\oplus H^{0,2}(\mathcal{X}).$$

ここで $H^{2,0}(\mathcal{X})=\mathbb{C}\omega_{\mathcal{X}}, H^{0,2}(\mathcal{X})=\mathbb{C}\overline{\omega_{\mathcal{X}}}$ で $H^{1,1}(\mathcal{X})$ は交叉形式に関する $H^{2,0}(\mathcal{X})\oplus H^{0,2}(\mathcal{X})$ の直交補空間，また $\bar{\cdot}$ は複素共役である．なお，$H^{2,0}(\mathcal{X})\oplus H^{0,2}(\mathcal{X})$ の符号数は $(2,0)$，したがって $H^{1,1}(\mathcal{X})$ の符号数は $(1,19)$ である．さらに，$\mathcal{X}$ の Kähler 類*9全体 $\mathcal{K}_{\mathcal{X}}$ は $H^{1,1}(\mathcal{X})$ の実部 $H^{1,1}_{\mathbb{R}}(\mathcal{X})=\{x\in H^{1,1}(\mathcal{X})\mid \overline{x}=x\}$ 内の錐をなす．これを $\mathcal{X}$ の **Kähler 錐**という．

---

*8 ここでは K3 曲面を表すのに（多項式の不定元 X との重複を避けて）筆記体の $\mathcal{X}$ を用いているが，一般にこのような慣習があるわけではない．

*9 Kähler 類の定義は割愛するが，Kähler 計量とよばれる“よい”軽量から定まる実 $(1,1)$-形式が代表するコホモロジー類のことである．

逆に，K3 格子に形式的に Hodge 構造と Kähler 錐を定義することができる．(Λ, b) を K3 格子とする．$\Lambda_{\mathbb{C}} := \Lambda \otimes \mathbb{C}$ 内のベクトル ω で $\mathbb{C}\omega \oplus \mathbb{C}\overline{\omega}$ が正定値となるようなものは，$\Lambda_{\mathbb{C}}$ の分解

$$\Lambda_{\mathbb{C}} = H^{2,0} \oplus H^{1,1} \oplus H^{0,2}$$

を定める．ただし $H^{2,0} = \mathbb{C}\omega, H^{0,2} = \mathbb{C}\overline{\omega}$ で $H^{1,1}$ は $H^{2,0} \oplus H^{0,2}$ の直交補空間である．以下ではこの分解の代わりに単に上のようなベクトル $\omega \in \Lambda_{\mathbb{C}}$ を Λ の **Hodge 構造**という．さらに，$H^{1,1}$ の実部に，ルート系 $\Delta = \{r \in \Lambda \cap H^{1,1} \mid b(r, r) = -2\}$ のひとつの Weyl の部屋として錐 $\mathcal{K}$ が得られる．このような錐 $\mathcal{K}$ を Λ の **Kähler 錐**という．Λ の Hodge 構造と Kähler 錐の組を **K3 構造**とよぶことにする．

K3 格子上の K3 構造を保つ自己同型は次の意味で K3 曲面上の自己同型に“持ち上がる”．例えば [6, §6] をみるとよい．

事実 3.1 Λ を K3 格子とし，$t : \Lambda \to \Lambda$ をある K3 構造 $(\omega, \mathcal{K})$ を保つ自己同型とする．このとき以下をみたす K3 曲面 $\mathcal{X}$ の自己同型 φ と格子としての同型写像 $\tau : H^2(\mathcal{X}, \mathbb{Z}) \to \Lambda$ が存在する：$\tau(\omega_{\mathcal{X}}) \in \mathbb{C}\omega, \tau(\mathcal{K}_{\mathcal{X}}) = \mathcal{K}$ かつ図式

$$\begin{array}{ccc} H^2(\mathcal{X}, \mathbb{Z}) & \xrightarrow{\varphi^*} & H^2(\mathcal{X}, \mathbb{Z}) \\ \downarrow{\scriptstyle \tau} & & \downarrow{\scriptstyle \tau} \\ \Lambda & \xrightarrow{t} & \Lambda \end{array}$$

が可換.

3.2 エントロピー

コンパクト位相空間上の自己写像には，**位相的エントロピー**（以下，単にエントロピーという）とよばれる力学系的な[*10]量が定義される．エントロピーは非負の実数で，自己写像のある種の複雑さを定量化したものである．エントロピーが大きいほど写像は複雑であると考えることができて，例えば位数有限の写像のエントロピーは 0 である．本稿ではエントロピーの定義は割愛するが，次の事実によって K3 曲面上の自己同型のエントロピーを求めることができる．

事実 3.2 $\varphi : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ を K3 曲面 $\mathcal{X}$ 上の自己同型とする．このとき φ のエントロピーは誘導準同型 $\varphi^* : H^2(\mathcal{X}, \mathbb{C}) \to H^2(\mathcal{X}, \mathbb{C})$ のスペクトル半径 $\max\{|\lambda| \mid \lambda$ は φ の固有値 $\}$ の対数に等しい．

これは Gromov や Yomdin による定理の特別な場合である．さらにこの事実から，K3 曲面の自己同型のエントロピーは 0 でなければ高々 22 次の Salem 数の対数になることがいえる．詳しくは [5, §3] をみるとよい．ここで次のようなエントロピースペクトラムの問題が生じる．

問題 3.3 どのような Salem 数の対数が K3 曲面の自己同型のエントロピーとして実現されるか？

事実 3.1，3.2 によって，この問題は「どのような Salem 数が，K3 格子のある K3 構造を保つ自己同型のスペクトル半径として実現されるか？」という，ユニモジュラー偶格子の自己同型の問題に帰

[*10] ここで力学系とは自己写像の反復合成を指す．

着する．現在までに知られている K3 曲面のエントロピースペクトラムの問題に対する結果は，ほとんどがこのような格子理論からのアプローチによって得られたものである（と思う）．

最後に定理 1.2 の証明の概略を述べる．まず，λ を 20 次の Salem 数とし $S(X)$ をその最小多項式とする．このとき，定理 1.1 を用いると実は以下の条件をみたすような K3 格子 Λ 上の自己同型 t の存在がいえる：

- t の固有多項式は $F(X) := (X-1)(X+1)S(X)$ である．
- $S(X)$ の根 δ で，δ に対応する t の固有ベクトルを $\omega \in \Lambda \otimes \mathbb{C}$ とすると $\mathbb{C}\omega \oplus \mathbb{C}\overline{\omega}$ が正定値であるものが存在する．

上のような t を固定する．t のスペクトル半径は λ で，ω は t で保たれる Λ の Hodge 構造である．いま Λ の Kähler 錐 $\mathcal{K}$ を好きに固定する．一般には t は $\mathcal{K}$ を保たないが，スペクトル半径を変えない変形で $\mathcal{K}$ を保つようにできる．つまり次をみたす Λ 上の自己同型 $\widetilde{t}$ が存在する：

$$\widetilde{t} \text{ は K3 構造 } (\omega, \mathcal{K}) \text{ を保ち，かつ，そのスペクトル半径は } \lambda \text{ に等しい．}$$

したがって事実 3.1，3.2 より $\log\lambda$ は K3 曲面の自己同型のエントロピーとして実現される．

なお，上の証明では対応する K3 曲面は必ず非射影的になる．ここで複素多様体が**射影的**であるとは（ある次元の）複素射影空間への埋め込みが存在することである．上の方法で，与えられたエントロピーをもつ射影的な K3 曲面の自己同型の存在を示そうとすると，K3 格子の自己同型が Kähler 錐を保つ条件を考えたときにより難しい問題が生じる（例えば [7] をみるとよい）．これが理由で，射影的な K3 曲面のエントロピースペクトラムの問題に対して，非射影的な場合のような結果はまだ得られていない．射影的な場合は今後の課題である．

参考文献

[1] Bayer-Fluckiger, E., Taelman, L.: Automorphisms of even unimodular lattices and equivariant Witt groups. J. Eur. Math. Soc. **22** (2020), 3467–3490.

[2] Bayer-Fluckiger, E.: Isometries of lattices and Hasse principles. arXiv:2001.07094v3.

[3] Bayer-Fluckiger, E.: Isometries of lattices and automorphisms of K3 surfaces. arXiv: 2107.07583v1.

[4] Gross, B.H., McMullen, C.T.: Automorphisms of even unimodular lattices and unramified Salem numbers. J. Algebra **257** (2002), no. 2, 265–290.

[5] McMullen, C.T.: Dynamics on K3 surfaces: Salem numbers and Siegel disks. J. Reine Angew. Math. **545** (2002), 201–233.

[6] McMullen, C.T.: K3 surfaces, entropy and glue. J. Reine Angew. Math. **658** (2011), 1–25.

[7] McMullen, C.T.: Automorphisms of projective K3 surfaces with minimum entropy. Invent. Math. **203** (2016), no. 1, 179–215.

[8] Serre, J.P.: A Course in Arithmetic. Springer Sience+Business Media New York, 1973.

[9] Takada, Y.: Lattice isometries and K3 surface automorphisms: Salem numbers of degree 20. arXiv:2210.12946v1.