# Bonnet–Myers Type Theorems via $m$-Bakry–Émery Ricci Curvature with $\varepsilon$-range*

山口大学 理学部 数理科学科
只野 誉（Homare TADANO）†

**概要**

リーマン幾何学において最も重要な研究対象のひとつはリーマン多様体の曲率と位相の関係を明らかにすることである．本稿では完備リーマン多様体がコンパクトになるための古典的な十分条件を幾つか紹介し，筆者によるそれらの一般化を紹介する．本稿は第 18 回数学総合若手研究集会テクニカルレポートで筆者が述べた内容を拡張したものである．興味がある読者の方々はそちらもご覧戴ければ幸いである．

## 1 導入

本稿を通して $n \geqslant 2$ を自然数とし，$(M, g)$ を $n$ 次元の完備リーマン多様体とする．リーマン幾何学において最も自然かつ重要な問題のひとつはリーマン計量から定まる曲率が多様体に及ぼす幾何学的性質を解き明かすことである．リーマン計量から定まる曲率には主にリーマン曲率，リッチ曲率，スカラー曲率の 3 つがある．その中でリッチ曲率は曲面のガウス曲率を高次元に一般化した体積の膨張度を測るような曲率であり，リーマン幾何学の重要な定理の多くはリッチ曲率の言葉を用いて記述される．1982 年に S.-T. Yau は

3 次元以上の多様体はリッチ曲率が常に負となるようなリーマン計量を許容するか？

という問題を提案した．この問題は多くの数学者たちによって研究され，3 次元の場合は L.Z Gao と S.-T. Yau [6] によって肯定的に解決され，3 次元以上の場合は J. Lohkamp [9] によって肯定的に解決された． 対照的に S.B. Myers [11] は完備リーマン多様体のリッチ曲率が下から正の定数で抑えられるならば，そのような多様体はコンパクトになり，直径は上から抑えられることを証明した．

**定理 1** (S.B. Myers [11])**.** *If there exists some positive constant $\lambda > 0$ such that the Ricci curvature satisfies $\mathrm{Ric}_g \geqslant \lambda g$, then $(M, g)$ is compact and the diameter satisfies*

$$\mathrm{diam}(M, g) \leqslant \pi\sqrt{\frac{n-1}{\lambda}}.$$

* 第 19 回数学総合若手研究集会（2023 年 3 月・北海道大学）テクニカルレポート
† 本研究は科研費の助成を受けたものである（課題番号：18K13417・22K13915）

定理 1 の帰結として非コンパクトな完備リーマン多様体のリッチ曲率は下から正の定数で抑えられないことが導かれ, 下から正の定数で抑えられるようなリッチ曲率を持つ完備リーマン計量が存在するための位相的な障害を与える. リッチ曲率とリーマン多様体の位相の関係については多くの先行研究があるにも関わらず完全な理解には程遠い状況で, 現在でも活発に研究されている重要な話題である. 定理 1 はリッチ曲率が下から正の定数で抑えられているという条件を弱い条件に置き換えることで様々な方向へ一般化されてきた. ここではそのような一般化のうち幾つかを紹介する. W. Ambrose [1] は測地線に沿ったリッチ曲率の積分を考えることで 定理 1 の最初の一般化を与えた.

**定理 2** (W. Ambrose [1]). *If there exists some point $p \in M$ for which every geodesic $\gamma\colon [0,+\infty) \to M$ emanating from $p$ satisfies*

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{Ric}_g(\dot\gamma(t),\dot\gamma(t))dt = +\infty,$$

*then $(M,g)$ is compact.*

完備リーマン多様体 $(M,g)$ のリッチ曲率が正の定数 $\lambda > 0$ に対して $\mathrm{Ric}_g \geqslant \lambda g$ を満たせば, 定理 1 より $(M,g)$ はコンパクトであり, その直径は $\mathrm{diam}(M,g) \leqslant \pi\sqrt{\frac{n-1}{\lambda}}$ を満たす. このとき任意の単位速度の測地線 $\gamma = \gamma(t)$ に対して $\mathrm{Ric}_g(\dot\gamma(t),\dot\gamma(t)) \geqslant \lambda$ となり,

$$\max\{\lambda - \mathrm{Ric}_g(\dot\gamma(t),\dot\gamma(t)),0\} = 0 \tag{1.1}$$

が成り立つ. J.-G. Yun [23] は (1.1) を弱めることで 定理 1 の一般化を証明した.

**定理 3** (J.-G. Yun [23]). *For any positive constants $\lambda > 0$ and $\kappa > 0$, there exists an explicit positive constant $\delta = \delta(n,\lambda,\kappa) > 0$ such that if there exists some point $p \in M$ for which every geodesic $\gamma\colon [0,+\infty) \to M$ emanating from $p$ satisfies*

$$\int_0^{+\infty} \max\{\lambda - \mathrm{Ric}_g(\dot\gamma(t),\dot\gamma(t)),0\}dt < \delta(n,\lambda,\kappa),$$

*then $(M,g)$ is compact and the diameter from $p$ satisfies $\mathrm{diam}_p(M,g) \leqslant \pi\sqrt{\frac{n-1}{\lambda}} + \kappa$.*

また, E. Calabi [3] はリッチ曲率が非負であるという仮定の下で, 完備リーマン多様体がコンパクトになるための十分条件を与えた.

**定理 4** (E. Calabi [3]). *Suppose that the Ricci curvature is non-negative. If there exists some point $p \in M$ for which every geodesic $\gamma : [0,+\infty) \to M$ emanating from $p$ satisfies*

$$\limsup_{s\to+\infty}\left\{\int_0^s \sqrt{\mathrm{Ric}_g(\dot\gamma(t),\dot\gamma(t))}dt - \frac{\sqrt{n-1}}{2}\ln s\right\} = +\infty,$$

*then $(M,g)$ is compact.*

さらに, J. Cheeger, M. Gromov, M. Taylor [5] はある領域の外側でリッチ曲率の 2 次の減衰を仮定して, 完備リーマン多様体がコンパクトになるための十分条件を与えた.

**定理 5** (J. Cheeger, M. Gromov, and M. Taylor [5]). *If there exist some point $p \in M$ and positive constants $r_0 > 0$ and $\nu > 0$ such that the Ricci curvature satisfies*

$$\mathrm{Ric}_g(x) \geqslant (n-1)\frac{(\frac{1}{4}+\nu^2)}{r^2(x)}g(x)$$

*for all $x \in M$ satisfying $r(x) \geqslant r_0$, where $r(x)$ denotes the distance between $p$ and $x$, then $(M, g)$ is compact. Moreover, the diameter from $p$ satisfies*

$$\mathrm{diam}_p(M, g) \leqslant r_0 \exp\left(\frac{\pi}{\nu}\right).$$

## 2 結果

ここからはリッチ曲率を拡張する曲率を導入し, 定理 1 やその一般化に対する対応物を紹介する. リーマン多様体 $(M, g)$ 上で定義された滑らかな関数 $f\colon M \to \mathbb{R}$ と定数 $m \in (-\infty, 1] \cup [n, +\infty]$ に対して ***m*-Bakry–Émery リッチ曲率** [2] を

$$\mathrm{Ric}_f^m := \begin{cases} \mathrm{Ric}_g & m = n, \\ \mathrm{Ric}_g + \mathrm{Hess}\, f - \dfrac{1}{m-n} df \otimes df & m \in (-\infty, 1] \cup (n, +\infty), \\ \mathrm{Ric}_g + \mathrm{Hess}\, f & m = +\infty \end{cases}$$

で定義する. ここで $\mathrm{Hess}\, f$ は関数 $f$ のヘッシアンを表す. $f : M \to \mathbb{R}$ を **ポテンシャル関数**という. 与えられた定数 $m \in (-\infty, 1] \cup [n, +\infty]$ に対して定数 $\varepsilon \in \mathbb{R}$ を次の範囲で考える.

$$(2.1) \quad \varepsilon = 0 \;\text{ for }\; m = 1, \quad |\varepsilon| < \sqrt{\frac{m-1}{m-n}} \;\text{ for }\; m \neq 1, n, \quad \text{and} \quad \varepsilon \in \mathbb{R} \;\text{ for }\; m = n$$

ただし $m = +\infty$ の場合は $\frac{m-1}{m-n} = 1$ と解釈する. また, 定数 $c = c(m, \varepsilon)$ を $m \neq 1$ のとき

$$c := \frac{1}{n-1}\left(1 - \varepsilon^2 \frac{m-n}{m-1}\right) > 0$$

と定義し, $m = 1$ のとき $c := \frac{1}{n-1}$ と定義する. $m$-Bakry–Émery リッチ曲率はリッチ曲率を用いて書き表される多くの重要な定理をポテンシャル関数に関する適切な仮定の下で自然に拡張することが知られており, 多くの数学者が定理 1 やその一般化を $m$-Bakry–Émery リッチ曲率を用いて拡張している [2,4,7,8,10,12–22]. Y. Lu, E. Minguzzi, S. Ohta [10] は定理 1 と Z. Qian [12], W. Wylie [22], 筆者 [20] による定理 1 の一般化を (2.1) の設定へ拡張して, 完備リーマン多様体がコンパクトになるための十分条件を与えた.

**定理 6** (Y. Lu, E. Minguzzi, and S. Ohta [10]). *Let $m \in (-\infty, 1] \cup [n, +\infty]$ and $\varepsilon$ be in the range (2.1). If there exist some positive constants $\lambda > 0$ and $b > 0$ such that*

$$\mathrm{Ric}_f^m \geqslant \lambda e^{-\frac{4(1-\varepsilon)}{n-1}f} g$$

*and $e^{\frac{2(1-\varepsilon)}{n-1}f} \leqslant b$, then $(M, g)$ is compact and the diameter satisfies* $\mathrm{diam}(M, g) \leqslant \frac{b\pi}{\sqrt{c\lambda}}$.

定理 1 が様々な方向へ一般化されるように, 我々は定理 6 の様々な一般化を得ることができる. 実際, 定理 2 と M.P. Cavalcante, J.Q. Oliveira, M.S. Santos [4] および筆者 [19] による定理 2 の一般化の (2.1) の設定への拡張が既に K. Kuwae と Y. Sakurai [8] によって得られている. 次の定理は定理 3 と M.S. Santos [14] および筆者 [18] による定理 3 の一般化を (2.1) の設定へ拡張するものである.

**定理 7** ([21])**.** *Let $m \in (-\infty, 1] \cup [n, +\infty]$ and $\varepsilon$ be in the range* (2.1)*. Suppose that there exists some positive constant $b > 0$ such that $v := e^{\frac{1-\varepsilon}{n-1}f} \leqslant b$. For any positive constants $\lambda > 0$ and $\kappa > 0$, there exists an explicit positive constant $\delta = \delta(c, b, \lambda, \kappa) > 0$ such that if there exists some point $p \in M$ for which every geodesic $\gamma\colon [0, +\infty) \to M$ emanating from $p$ satisfies*

$$\int_0^{+\infty} \max\left\{\lambda - v^2(\gamma(t))\mathrm{Ric}_f^m(\dot\gamma(t), \dot\gamma(t)), 0\right\} dt < \delta(c, b, \lambda, \kappa),$$

*then $(M, g)$ is compact and the diameter from $p$ satisfies $\mathrm{diam}_p(M, g) \leqslant \frac{b\pi}{\sqrt{c\lambda}} + \kappa$.*

また, 次の定理は定理 4 と M. Rimoldi [13] および筆者 [19] による定理 4 の一般化を (2.1) の設定へ拡張するものである.

**定理 8** ([21])**.** *Let $m \in (-\infty, 1] \cup [n, +\infty]$ and $\varepsilon$ be in the range* (2.1)*. Suppose that there exists some positive constant $b > 0$ such that $v := e^{\frac{1-\varepsilon}{n-1}f} \leqslant b$. If the $m$-Bakry–Émery Ricci curvature is non-negative and there exist some point $p \in M$ and positive constant $t_0 > 0$ for which every geodesic $\gamma : [0, +\infty) \to M$ emanating from $p$ satisfies*

$$\limsup_{s \to +\infty} \left\{ \int_{t_0}^{s} \sqrt{v^2(\gamma(t))\, \mathrm{Ric}_f^m(\dot\gamma(t), \dot\gamma(t))}dt - \frac{b}{2\sqrt{c}} \ln s \right\} = +\infty,$$

*then $(M, g)$ is compact.*

とくに, 定理 8 から定理 5 と筆者 [17, 19] による定理 5 の一般化を (2.1) の設定へ拡張する次の系を得ることができる.

**系** ([21])**.** *Let $m \in (-\infty, 1] \cup [n, +\infty]$ and $\varepsilon$ be in the range* (2.1)*. Suppose that there exists some positive constant $b > 0$ such that $v := e^{\frac{1-\varepsilon}{n-1}f} \leqslant b$. If there exist some point $p \in M$ and positive constants $r_0 > 0$ and $\nu > 0$ such that*

$$v^2(x)\, \mathrm{Ric}_f^m(x) \geqslant \frac{b^2}{c} \frac{\left(\frac{1}{4} + \nu^2\right)}{r^2(x)} g(x)$$

*for all $x \in M$ satisfying $r(x) \geqslant r_0$, where $r(x)$ denotes the distance between $p$ and $x$, then $(M, g)$ is compact.*

紙面の都合上, 指摘すべき多くの文献を割愛した. $m$-Bakry–Émery リッチ曲率を用いた定理 1 とその一般化の拡張については解説論文 [15, 16] も参考にして戴きたい.

## 参考文献


[1] W. Ambrose, *A theorem of Myers*, Duke Math. J. **24** (1957), 345–348.

[2] D. Bakry and M. Émery, *Diffusions hypercontractives*, in: Séminaire de Probabilités, XIX, 1983/84, in: Lecture Notes in Math., vol. 1123, Springer, Berlin, 1985, pp. 177–206.

[3] E. Calabi, *On Ricci curvature and geodesics*, Duke Math. J. **34** (1967), 667–676.

[4] M.P. Cavalcante, J.Q. Oliveira, and M.S. Santos, *Compactness in weighted manifolds and applications*, Results Math. **68** (2015), 143–156.

[5] J. Cheeger, M. Gromov, and M. Taylor, *Finite propagation speed, kernel estimates for functions of the Laplace operator, and the geometry of complete Riemannian manifolds*, J. Differential Geom. **17** (1982), 15–53.

[6] L.Z. Gao and S.-T. Yau, *The existence of negatively Ricci curved metrics on three-manifolds*, Invent. Math. **85** (1986), 637–652.

[7] K. Kuwae and X.-D. Li, *New Laplacian comparison theorem and its applications to diffusion processes on Riemannian manifolds*, Bull. Lond. Math. Soc. **54** (2022), 404–427.

[8] K. Kuwae and Y. Sakurai, *Rigidity phenomena on lower $N$-weighted Ricci curvature bounds with $\varepsilon$-range for nonsymmetric Laplacian*, Illinois J. Math. **65** (2021), 847–868.

[9] J. Lohkamp, *Metrics of negative Ricci curvature*, Ann. of Math. (2) **140** (1994), 655–683.

[10] Y. Lu, E. Minguzzi, and S. Ohta, *Comparison theorems on weighted Finsler manifolds and spacetimes with $\epsilon$-range*, Anal. Geom. Metr. Spaces **10** (2022), 1–30.

[11] S.B. Myers, *Riemannian manifolds with positive mean curvature*, Duke Math. J. **8** (1941), 401–404.

[12] Z. Qian, *Estimates for weighted volumes and applications*, Quart. J. Math. Oxford Ser. (2) **48** (1997), 235–242.

[13] M. Rimoldi, *Rigidity results for Lichnerowicz Bakry–Emery Ricci tensors*, Ph.D. thesis, Università degli Studi di Milano, 2011.

[14] M.S. Santos, *Compactness theorems for the Bakry-Emery Ricci tensor on semi-Riemannian manifolds*, Comment. Math. Univ. Carolin. **58** (2017), 79–86.

[15] H. Tadano, *Some Myers type theorems and Hitchin–Thorpe inequalities for shrinking Ricci solitons*, Rend. Semin. Mat. Univ. Politec. Torino **73** (2015), 183–199.

[16] ______, *Some Myers type theorems and Hitchin–Thorpe inequalities for shrinking Ricci solitons, II*, Rend. Semin. Mat. Univ. Politec. Torino **77** (2019), 83–111.

[17] ______, *Some Cheeger–Gromov–Taylor type compactness theorems via $m$-Bakry–Émery and $m$-modified Ricci curvatures*, Nonlinear Anal. **199** (2020), 112045.

[18] ______, *$m$-Bakry–Émery Ricci curvatures, Riccati inequalities, and bounded diameters*, Differential Geom. Appl. **80** (2022), 101832.

[19] ______, *Ambrose and Calabi type theorems via $m$-Bakry–Émery and $m$-modified Bakry–Émery Ricci curvatures*, Preprint, 2020.

[20] ______, *Diameter estimates under integral radial $m$-Bakry–Émery Ricci curvature bounds*, Preprint, 2021.

[21] ______, *Bonnet–Myers type theorems via $m$-Bakry–Émery Ricci curvature with $\varepsilon$-range*, Preprint, 2021.

[22] W. Wylie, *Sectional curvature for Riemannian manifolds with density*, Geom. Dedicata **178** (2015), 151–169.

[23] J.-G. Yun, *A note on the generalized Myers theorem*, Bull. Korean Math. Soc. **46** (2009), 61–66.