

# ユークリッド空間の余接束における 概正則円盤の具体的記述について

千葉大学大学院 融合理工学府  
数学情報科学専攻 数学・情報数理学コース  
鈴木英正 (Hidemasa SUZUKI)

## 概要

シンプレクティック多様体におけるフレアーホモロジーや深谷圏を具体的に構成するにあたって、概正則円盤の数を欠かすことはできない。それが困難である1つの理由として具体的に構成されている概正則円盤の例が少ないことが挙げられる。本稿は勾配樹木と概正則円盤を定義し、 $T^*\mathbb{R}$  における直線に囲まれる概正則円盤について、その基本的な例を与える Schwarz-Christoffel 写像について解説したのちに、それを応用した概正則円盤の構成例について紹介する。

## 1 導入

深谷圏の具体的な構成やラグランジュ交差のフレアーホモロジーの具体的な計算は困難な場合が多い。それはフレアー鎖複体における境界準同型や深谷圏における射の高次の積を考える上で概正則円盤の数は必須であるが、具体的に構成されるラグランジュ部分多様体たちを境界にもつ概正則円盤の例は少ないことが1つの要因である。一般に、多様体  $M$  の余接束  $T^*M$  のラグランジュ切断は  $M$  上の関数の外微分のグラフとして記述できる。論文 [1] は与えられた複数の  $T^*M$  のラグランジュ切断が零切断に十分に近いとき、それらに囲まれる  $T^*M$  上の概正則円盤のモジュライ空間がラグランジュ切断に対応する  $M$  上の関数で構成される勾配樹木のモジュライ空間と多様体として微分同相であることを示した。本稿では  $M = \mathbb{R}$ , かつラグランジュ切断が全てアファインであるときについて、上述の勾配樹木と概正則円盤について議論する。まず、深谷圏の積構造に対応する、関数が3つの場合の勾配樹木を分類する。一方、単位円盤から複素平面内の多角形への双正則写像として Schwarz-Christoffel 写像が存在する。これにより、 $M = \mathbb{R}$  の場合、勾配樹木に対応する概正則円盤は3つの直線に囲まれる三角形への Schwarz-Christoffel 写像で記述できる。さらに、 $M = \mathbb{R}^2$  においても Schwarz-Christoffel 写像を応用した勾配樹木に対応する概正則円盤の具体的な構成例について紹介する。

## 2 準備

### 2.1 勾配樹木と概正則円盤

勾配樹木と概正則円盤を定義する前に次を定義する.

**定義 2.1.** ループを持たない 1 次元有限単体複体を **樹木** という. また, 樹木を  $T$  として  $T$  に含まれる 0 次元単体複体  $v$  と 1 次元単体複体  $e$  をそれぞれ  $T$  の **頂点**,  $T$  の **辺** という. 特に  $T$  の頂点  $v$  がただ 1 つの辺にのみ含まれるとき, その  $v$  を  $T$  の **端点** という.

この樹木を単位円に樹木の端点が円周上に写像するように埋め込むと, 単位円は有限個の領域に分割される (図 1). そこで次を定義する. 以下,  $D$  を複素平面上の原点中心の単位円とする.

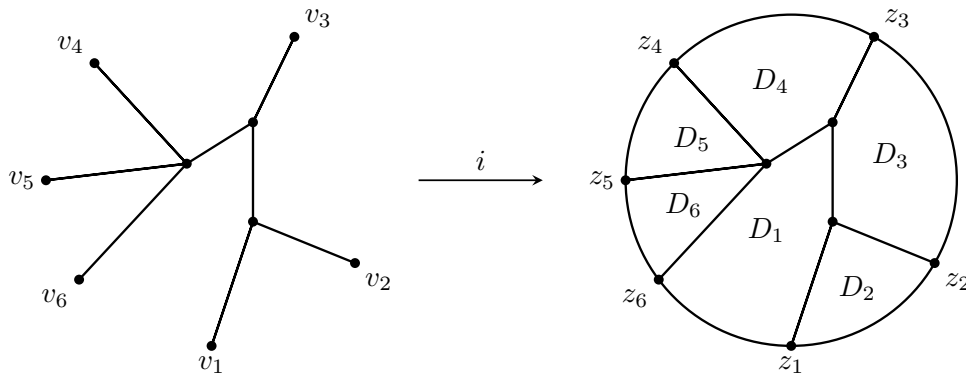


図 1 樹木による単位円の分割

**定義 2.2.**  $T$  を樹木とする.  $i : T \rightarrow D$  が任意の端点  $v \in T$  に対して  $i(v) \in \partial D$  が成り立ち,  $i(T) \cap \partial D$  が  $T$  の全ての端点からなるような埋め込みであるとき, 組  $(T, i)$  のことを **リボン樹木** という.

$(T, i)$  を  $\#\{i(T) \cap \partial D\} = k$  を満たすリボン樹木であるとする. この  $k$  個の点を反時計回りに  $z_1, z_2, \dots, z_k$  と番号づけをし, それぞれの逆像を  $v_i$  とする. そして  $v_i$  を端点に持つ辺を  $e_i$  とする. さらに  $i(T)$  によって分割された  $D$  の領域を次のように番号をつける. 辺  $i(e_i)$  を点  $z_i$  から  $D$  の内部に進む時に  $i(e_i)$  の左側に隣接する領域を  $D_i$ , 右側に隣接する領域を  $D_{i+1}$  とする ( $D_{n+1} = D_1$  であることに注意). このとき,  $T$  がループを持たないことから  $T$  を構成するすべての辺の  $i$  による像は必ずある 2 つの領域  $D_i, D_j$  に挟まれる. これらを踏まえて以下のように多様体  $M$  上の勾配樹木と余接束  $T^*M$  内の概正則円盤を定義する.

**定義 2.3.**  $M$  を多様体,  $g$  をその多様体をもつリーマン計量,  $f_1, \dots, f_k$  を任意の  $i$  に対して  $f_{i+1} - f_i (f_{k+1} = f_1)$  がモース関数となるような  $M$  上の実数値関数とする. また,  $(T, i)$  を  $\#\{i(T) \cap \partial D\} = k$  を満たすリボン樹木とし,  $\{v_1, \dots, v_k\}$  を  $T$  の端点全体の集合とする. このとき, 連続写像  $I : T \rightarrow M$  に対して

- $p_i$  を  $f_{i+1} - f_i$  の非退化な臨界点とすると  $I(v_i) = p_i$
- $e_i$  を  $(-\infty, 0]$  と同一視して

$$\frac{dI|_{e_i}}{dt} = -\text{grad}_g(f_{i+1} - f_i) \text{ (以下 } \text{grad}_g \text{ は勾配ベクトル場)}$$

- $e \neq e_i (i = 1, 2, \dots, k)$  のとき  $e$  を  $[0, l(e)]$  ( $l(e)$  は  $e$  の長さに相当) と同一視して, 更に  $D_{lef(e)}, D_{rig(e)}$  をそれぞれ  $i(e)$  の向きに対して左に隣接している領域と右に隣接している領域とすると

$$\frac{dI|_e}{dt} = -\text{grad}_g(f_{rig(e)} - f_{lef(e)})$$

が成り立つとき,  $I$  またはその像を  $M$  上の**勾配樹木**という.

本稿では上で定義した勾配樹木を構成した上でそれに対応した概正則円盤を具体的に構成する. 概正則円盤を定義する前にシンプレクティック多様体とそのラグランジュ部分多様体について定義する.

**定義 2.4.**  $M$  を  $2n$  次元実多様体とする.  $M$  が  $\omega^n \neq 0$  となる  $M$  上の閉 2 次形式  $\omega$  をもつとき,  $M$  を**シンプレクティック多様体**という.  $L$  を  $M$  の  $n$  次元部分多様体とし,  $\omega|_L = 0$  を満たすとき,  $L$  を  $M$  の**ラグランジュ部分多様体**という.

さらに, シンプレクティック多様体は偶数次元の実多様体だから, 概複素構造をもつ.

**定義 2.5.**  $J : M \rightarrow \text{hom}(TM, TM); p \mapsto J_p \in \text{hom}(T_p M, T_p M)$  が  $M$  の**概複素構造**であるとは,  $M$  の任意の点  $p$  に対して  $J_p^2 = -\text{id}_{T_p M}$  が成り立つものをいう.

以上を踏まえ, 複数個のラグランジュ部分多様体に囲まれるシンプレクティック多様体上の概正則円盤を定義する.

**定義 2.6.**  $D$  を  $\mathbb{C}$  における原点中心の半径 1 の開円盤,  $z_i (i = 1, \dots, n)$  を  $\partial D$  上の反時計回りに順序づけされた  $n$  個の点として,  $\partial_i D$  を  $z_{i-1}$  と  $z_i$  を端点にもちこの 2 点以外の点  $z_j$  を含まない円弧とする. また,  $M$  をシンプレクティック多様体,  $L_i (i = 1, \dots, n)$  を  $M$  のラグランジュ部分多様体とする. そして,  $M, \mathbb{C}$  がもつ概複素構造をそれぞれ  $J, j$  とする. このとき,  $w : D \rightarrow M$  が

$$dw \circ j = J \circ dw, w(\partial_i D) \subset L_i, w(z_i) \in L_i \cap L_{i+1} \ (i = 1, \dots, n, L_{n+1} = L_1)$$

を満たすとき, それを  $L_1, \dots, L_n$  に囲まれる**概正則円盤**という.

以上で定義した勾配樹木と概正則円盤は, 樹木の端点が 3 つ, かつ  $M = \mathbb{R}$  のとき, 図 2 のように対応している. 論文 [1] ではラグランジュ部分多様体が  $f_i$  を用いて  $\text{graph}(df_i)$  と記述できる場合で勾配樹木に対応する概正則円盤を求めた. ちなみに  $\text{graph}(df_i)$  の元は任意の点  $p \in M$  に対して  $(p, (df_i)_p)$  と書ける. また, 論文 [1] では任意の  $i$  に対して  $\text{graph}(df_i)$  が零切断に十分に近いならば  $f_i$  を generic にとると勾配樹木と概正則円盤それぞれに関するモジュライ空間は多様体として微分同相になることが示されている. 更に  $f_1, \dots, f_k$  で構成される勾配樹木と概正則円盤に関するモジュライ空間を定義する.

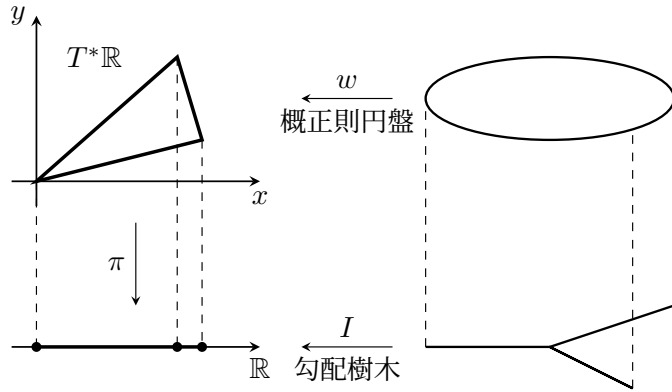


図2 勾配樹木と概正則円盤の対応

**定義 2.7.**  $M$  をリーマン計量  $g$  をもつ  $n$  次元実多様体,  $\vec{f} = (f_1, f_2, \dots, f_k)$  は定義 1.3 を満たす  $f_i$  の組,  $p_i$  を  $f_{i+1} - f_i$  の非退化な臨界点として  $\vec{p} = (p_1, p_2, \dots, p_k)$  とする. また,  $J$  を  $T^*M$  の概複素構造,  $\vec{L} = (L_1, L_2, \dots, L_k)$  を  $T^*M$  のラグランジュ部分多様体  $L_i$  の組,  $x_i \in L_i \cap L_{i+1}$  として  $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_k)$  とする. このとき,  $\mathcal{M}_g(M : \vec{f}, \vec{p})$  を  $I(v_i) = p_i$  を満たす勾配樹木  $I$  全体の集合,  $\mathcal{M}_J(T^*M : \vec{L}, \vec{x})$  を  $w(z_i) = x_i$  を満たす概正則円盤  $w$  全体の集合とすると, 前者を勾配樹木に関するモジュライ空間, 後者を概正則円盤に関するモジュライ空間という.

さらに, 勾配樹木に関するモジュライ空間と概正則円盤に関するモジュライ空間はジェネリックな  $f_i$  に対してどちらも

$$\sum_{i=1}^k \mu(p_i) - (k-1)n + (k-3)$$

の次元を持つ実多様体になる. [1] ここで,  $\mu(p_i)$  は点  $p_i$  における  $f_{i+1} - f_i$  の Morse 指数とする. この事実は勾配樹木を分類する際に用いる.

## 2.2 Schwarz-Christoffel 写像

以下は概正則円盤を具体的に構成するために必要な単位円から多角形への双正則写像である Schwarz-Christoffel 写像について解説する.

**定理 2.8** ([2]).  $P$  を  $z_1, \dots, z_n$  を頂点に持ち, 点  $z_i$  における内角が  $\pi - \pi\mu_i$  である多角形の内部とする. 上半平面から  $P$  への等角写像は必ずある  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$  と  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$  を使って

$$f(z) = \alpha \int_0^z \frac{dz}{(z-a_1)^{\mu_1} \dots (z-a_n)^{\mu_n}} + \beta$$

と表され,  $f(a_i) = z_i$  が成り立つ.

*Proof.*  $\Gamma$  を  $P$  の境界とする. また,  $\mu_i > 0$  のときこれは  $w_i$  における外角に相当し,  $\mu_i < 0$  のとき  $P$  は  $w_i$  で凹んでいることがわかる. これにより  $\sum_{i=1}^n \mu_i = 2$  である.  $a_i \in \mathbb{R}$  を  $z_i$  に対応させる点とし,  $n$  個の点によって実軸を分割する. ここで鏡像原理を実軸に対して適用すると, 今考えている関数は下半平面にまで解析接続され, その像は  $P$  を  $\Gamma$  のいずれかの辺に対して対称移動したもの  $D'$

になる。もう一度鏡像原理を実軸に対して使うと再び上半平面へ解析接続され、その像は  $D'$  の境界のいずれかの辺に対して対称移動したもの  $D''$  になる。すると、 $D''$  は  $D$  を回転移動または平行移動したものになる。これにより、上半平面から  $D, D''$  にそれぞれに写像する関数をそれぞれ  $f, f_1$  とすると、 $A, B \in \mathbb{C}$  を使って  $f_1(z) = Af(z) + B$  と書ける。これにより

$$\frac{f_1''(z)}{f_1'(z)} = \frac{f''(z)}{f'(z)}$$

が成り立つ。この等式の右辺を  $g(z)$  とすると、 $g$  は単価関数であり、 $a_1, \dots, a_n$  を特異点を持つ。次に  $a_i$  の近傍で

$$h(z) = [f(z) - f(a_i)]^{\frac{1}{\alpha_i}}$$

を考える。これは

$$f(z) = f(a_i) + [h(z)]^{1-\mu_i}$$

とも書ける。 $h(z)$  は  $a_i$  の近傍では特異点ではないことと、 $h(a_i) = 0$  より、 $h_1(a_i) \neq 0$  となる  $a_i$  を特異点に持たない  $h_1$  を用いて

$$f(z) = f(a_i) + (z - a_i)^{1-\mu_i} [h_1(z)]^{1-\mu_i}$$

と表される。これより、 $a_i$  を特異点に持たない  $k(z)$  を使って

$$\frac{f''(z)}{f'(z)} = -\frac{\mu_i}{z - a_i} + k(z)$$

が成り立つ。よって  $g(z) + \frac{\mu_i}{z - a_i}$  は  $a_i$  を特異点に持たない。以上の操作を  $i = 1, \dots, n$  に対して行うと、

$$g_1(z) := g(z) + \sum_{i=1}^n \frac{\mu_i}{z - a_i}$$

は  $a_1, \dots, a_n$  を特異点に持たない。リウヴィルの定理より  $g_1$  は定数であり、0 になる。ゆえに

$$\frac{f''(z)}{f'(z)} = -\sum_{i=1}^n \frac{\mu_i}{z - a_i}$$

が成り立つ。これを積分することによって定理が得られる。□

この定理で登場する写像を上半平面における Schwarz-Christoffel 写像という。さらに上半平面と単位円はメビウス変換によってそれぞれの点を 1 対 1 に対応させることができるので、変数変換を行うことで単位円における Schwarz-Christoffel 写像を考えることも可能である。

### 3 研究結果

本章では  $T^*\mathbb{R}$  内の概正則円盤を具体的に構成する。特にそれぞれの 3 つのアフィンラグランジュ切断を境界にもつ概正則円盤で、かつただ一つに定まる勾配樹木対応するものについて考察する。また、ラグランジュ切断は局所的に必ずある  $\mathbb{R}$  上の関数  $f$  を用いて  $graph(df)$  と書くことがで

きる。さらに、アファインラグランジュ切断を用いるので、用いるべき関数  $f$  は少なくとも  $\mathbb{R}$  上の 2 次多項式でなければならない。これをもとに次の 3 つの関数を用意する。

$$\begin{cases} f_1 = 0 \\ f_2 = a_2x^2 + b_2x + c_2 \\ f_3 = a_3x^2 + b_3x + c_3 \end{cases}$$

この 3 つの関数が  $f_{i+1} - f_i$  がモース関数になり、勾配樹木のモジュライ空間の多様体としての次元が 0 であるように係数を定めなければならない。

**補題 3.1.**  $i = 1, 2, 3$  に対して  $f_{i+1} - f_i$  がモース関数になり、勾配樹木のモジュライ空間の多様体としての次元が 0 であるための必要十分条件は

$$\begin{cases} a_3 < a_2 < 0 \\ a_2 < 0 < a_3 \\ 0 < a_3 < a_2 \end{cases}$$

のいずれかを満たすことである。

*Proof.* まず勾配樹木のモジュライ空間の多様体としての次元が 0 であると仮定すると  $p_i$  を  $f_{i+1} - f_i$  の非退化な臨界点、 $\mu(p_i)$  をその点における  $f_{i+1} - f_i$  の Morse 指数として

$$\sum_{i=1}^3 \mu(p_i) - (3-1) + (3-3) = \sum_{i=1}^3 \mu(p_i) - 2 = 0$$

が成り立つ。これを満たす指数の組み合わせ  $(\mu(p_1), \mu(p_2), \mu(p_3))$  は

$$(1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1)$$

である。次に指数の組み合わせが実現するための必要十分条件を求める。そのためには  $f_{i+1} - f_i$  のヘッセ行列を求め、その負の固有値の個数について考察すれば良い。すると、

$$d(f_2 - f_1) = a_2, d(f_3 - f_2) = a_3 - a_2, d(f_1 - f_3) = -a_2$$

であるため、

$$\begin{cases} (\mu(p_1), \mu(p_2), \mu(p_3)) = (1, 1, 0) \iff a_3 < a_2 < 0 \\ (\mu(p_1), \mu(p_2), \mu(p_3)) = (1, 0, 1) \iff a_2 < 0 < a_3 \\ (\mu(p_1), \mu(p_2), \mu(p_3)) = (0, 1, 1) \iff 0 < a_3 < a_2 \end{cases}$$

が成り立つ。これにより命題が示された。 □

以下  $a_2, a_3$  を補題 3.1 にある大小関係のいずれかを満たすことを仮定する。勾配樹木を考察するために、臨界点の指数が 0, 1 である場合で勾配曲線がどのように変化するかについて述べる。

**補題 3.2.** 関数  $f_{i+1} - f_i = ax^2 + bx + c$  の非退化な臨界点  $p_i$  を通る勾配曲線は以下の通りである。

$$x(t) = \begin{cases} -\frac{b}{2a} & (a > 0) \\ x(0)e^{-2at} - \frac{b}{2a} & (a < 0) \end{cases}$$

*Proof.*  $a \neq 0$  とすると関数  $f(x) = ax^2 + bx + c$  ( $a \neq 0$ ) は非退化な臨界点  $x = -\frac{b}{2a}$  をもつ。この点における関数  $f$  の指数は  $a > 0$  のとき  $0$ ,  $a < 0$  のとき  $1$  である。臨界点から出る勾配曲線は

$$\frac{d\left(x + \frac{b}{2a}\right)}{dt} = -2a\left(x + \frac{b}{2a}\right), \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} x(t) = -\frac{b}{2a}$$

で求めることができる。この解は  $x = Ae^{-2at} - \frac{b}{2a}$  ( $A$  は実定数) である。ここで  $a < 0$  の時  $e^{-2at}$  は  $t \rightarrow -\infty$  で  $0$  に収束するので、 $A = x(0)$  とすれば良い。また、 $a > 0$  の時  $e^{-2at}$  は  $t \rightarrow -\infty$  で発散してしまうので  $A = 0$  となる。□

この補題を踏まえ勾配樹木を構成する。 $f_{i+1} - f_i$  の非退化な臨界点  $p_i$  を求めると

$$p_1 = -\frac{b_2}{2a_2}, p_2 = -\frac{b_3 - b_2}{2(a_3 - a_2)}, p_3 = -\frac{b_3}{2a_3}$$

となる。なお、 $p_i$  から出る勾配曲線を  $I_i$  とする。例えば  $(\mu(p_1), \mu(p_2), \mu(p_3)) = (0, 1, 1)$  のとき、この指数を実現させるための必要十分条件は  $0 < a_3 < a_2$  であるから勾配樹木は

$$I_1(t) = -\frac{b_2}{2a_2}, I_2(t) = -\frac{b_2}{2a_2}e^{-2(a_3 - a_2)t} - \frac{b_3 - b_2}{2(a_3 - a_2)}, I_3(t) = -\frac{b_2}{2a_2}e^{-2a_3t} - \frac{b_3}{2a_3 - a_2}$$

となる。他の指数の組み合わせの時も同様に構成することができる。

次に、この勾配樹木に対応する概正則円盤を構成する。その結果は以下の通りである。

**定理 3.3.**  $a_2, a_3$  が補題 4.1 に挙げた 3 つの条件のいずれかを満たすとき、 $\mathbb{R}$  上の関数  $f_i$  から得られる勾配樹木に対応する  $T^*\mathbb{R}$  上の概正則円盤の一つは Schwarz-Christoffel 写像であり、その像は直線に囲まれる三角形になる。

*Proof.*  $df_i$  のグラフは  $T^*\mathbb{R} \cong \mathbb{R}^2$  上で以下の通りである。

$$y = 0, y = 2a_2x + b_2, y = 2a_3x + b_3 \quad (x, y \text{ は } \mathbb{R}^2 \text{ 上の座標})$$

また、 $\text{graph}(df_i)$  と  $\text{graph}(df_{i+1})$  の交点  $x_i$  を求めると以下の通りである。

$$x_1 = \begin{pmatrix} -\frac{b_2}{2a_2} \\ 0 \end{pmatrix}, x_2 = \begin{pmatrix} -\frac{b_3 - b_2}{2(a_3 - a_2)} \\ -\frac{a_2b_3 + a_3b_2}{a_3 - a_2} \end{pmatrix}, x_3 = \begin{pmatrix} -\frac{b_3}{2a_3} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$a_2, a_3$  が補題 3.1 に挙げられる 3 つの条件のいずれかを満たすとき

$$a_2a_3(a_3 - a_2) < 0$$

となるので、

$$\begin{aligned} \left(-\frac{b_2}{2a_2} + \frac{b_3}{2b_3}\right) \cdot \frac{-a_2b_3 + a_3b_2}{a_3 - a_2} &= \frac{-a_3b_2 + a_2b_3}{2a_2a_3} \cdot \frac{-a_2b_3 + a_3b_2}{a_3 - a_2} \\ &= -\frac{(-a_2b_3 + a_3b_2)^2}{2a_2a_3(a_3 - a_2)} > 0 \end{aligned}$$

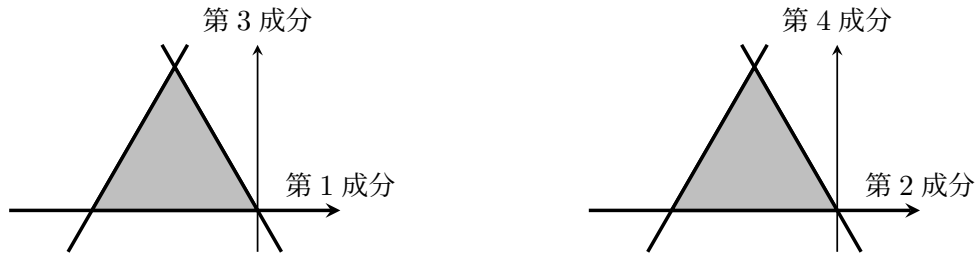


図3  $graph(df_i)$  を2成分ごとに射影

が成り立つ。これにより、

$$\begin{cases} -\frac{b_2}{2a_2} < -\frac{b_3}{2b_3}, & \frac{-a_2b_3 + a_3b_2}{a_3 - a_2} < 0 \\ -\frac{b_2}{2a_2} > -\frac{b_3}{2b_3}, & \frac{-a_2b_3 + a_3b_2}{a_3 - a_2} > 0 \end{cases}$$

のどちらかを満たすので、 $x_i$  を通る円を描くと円周上には反時計回りに  $x_i$  が並ぶ。このことと概正則円盤が満たすべき方程式は単位円上のコーシーリーマン方程式と同値であることから、今から求める概正則円盤の1つとして単位円から  $x_i$  を頂点とする三角形への等角写像を考えることができる。その等角写像は Schwarz-Christoffel 写像である。□

さらに、 $M = \mathbb{R}^2, k = 3$  で概正則円盤を具体的に構成できる場合が存在する。最後に概正則円盤を構成できる例を1つ挙げる。まず、 $M = \mathbb{R}$  の場合と同様に  $\mathbb{R}^2$  上の2次多項式を用意する。ここでは  $f_i$  を

$$\begin{cases} f_1 = 0 \\ f_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2}x^2 - \frac{\sqrt{3}}{2}y^2 \\ f_3 = \frac{\sqrt{3}}{2}x^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}y^2 + 2\sqrt{3}x + 2\sqrt{3}y \end{cases}$$

とする。勾配樹木のモジュライ空間の次元を0にするための必要十分条件は、 $\sum_{i=1}^3 \mu(p_i) = 4$  であるが、この場合  $\mu(p_1) = 2, \mu(p_2) = 0, \mu(p_3) = 2$  となるのでモジュライ空間の次元は0であり、実際に勾配樹木は一意に得られる。次にこの勾配樹木に対応する概正則円盤を具体的に構成する。 $graph(df_i)$  はそれぞれ

$$\begin{aligned} graph(df_1) &= \{(x, y, 0, 0) | x, y \in \mathbb{R}\} \\ graph(df_2) &= \left\{ \left( x, y, -\sqrt{3}x, -\sqrt{3}y \right) \middle| x, y \in \mathbb{R} \right\} \\ graph(df_3) &= \left\{ \left( x, y, \sqrt{3}x + 2\sqrt{3}, \sqrt{3}y + 2\sqrt{3} \right) \middle| x, y \in \mathbb{R} \right\} \end{aligned}$$

となる。そこで、3つのアフィンラグランジュ切断をそれぞれ  $T^*\mathbb{R}^2$  を第1成分と第3成分のみ、第2成分と第4成分のみ射影したものを考えると図3を得る。なお、太線が  $graph(df_i)$  を射影したものである。すると、図3で得られる直線に囲まれる2つの三角形の頂点は反時計回りにたどるべきであることが  $p_i$  の情報から明らかであるので、Schwarz-Christoffel 写像を用いることができる。ここで単位円から図3のそれぞれの三角形に写す Schwarz-Christoffel 写像をそれぞれ  $w_1, w_2$  として単位円から  $T^*\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}^2$  への写像  $w$  を  $w(z) = (w_1(z), w_2(z))$  とすると、これは  $graph(df_i)$  に囲ま



れる概正則円盤の1つになる. 実際に  $w_1, w_2$  は同じ写像であるため任意の単位円周上の点で同じ値を取るのて, 単位円周上の点  $z$  に対して  $w(z)$  は  $graph(df_i)$  上の点になる.

さらに  $f_i$  を

$$\begin{cases} g_1 = 0 \\ g_2 = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\epsilon_2\right)x^2 + \epsilon_2xy + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\epsilon_2\right)y^2 \\ g_3 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\epsilon_3\right)x^2 + \epsilon_3xy + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\epsilon_3\right)y^2 + 2\sqrt{3}x + 2\sqrt{3}y \end{cases}$$

と変形させると  $graph(dg_i)$  の交点は前の具体例で得られるものと一致するが,  $\epsilon_2, \epsilon_3$  を  $\mu(p_1) = 2, \mu(p_2) = 0, \mu(p_3) = 2$  が成り立つようにとると  $g_i$  によって構成される勾配樹木は前の例と一致する. また, その勾配樹木に対応するような  $graph(dg_i)$  に囲まれる概正則円盤の1つは, 前の例と同様の考察をすることによって前の例で構成した概正則円盤であることが確かめられる.

## 参考文献

- [1] K. Fukaya, Y.-G. Oh. Zero loop open strings in the cotangent bundle and Morse homotopy. *Asian J. Math*, **1**(1), 96–180(1997)
- [2] Z. Nehari, *Conformal Mapping*, Dover Publications, Inc.(1952)
- [3] 佐藤全, 平面上の勾配樹木の分類について, 令和2年度 千葉大学大学院融合理工学府 修士論文
- [4] 鈴木英正, ユークリッド空間の余接束における概正則円盤の具体的記述について, 令和4年度 千葉大学大学院融合理工学府 修士論文 (執筆中)