周期が3の連分数展開とペル方程式の解

山形大学大学院 理工学研究科 理学専攻
杉本貴海 (Takami SUGIMOTO)

概 要

$\sqrt{d}$ の連分数展開の周期が 3 となる平方数でない自然数 d の形を決定する. また, 連分数展開からペル方程式 $x^2-dy^2=\pm1$ の基本解を求め, その上でペル方程式 $x^2-dy^2=\pm1$ の全ての自然数解を一般フィボナッチ数列と一般リュカ数列で表す. さらに, ペル方程式 $x^2-dy^2=\pm4$ の場合にも全ての自然数解を一般フィボナッチ数列と一般リュカ数列で表す.

1 導入

平方数でない自然数 d に対して,

$$x^2-dy^2=\pm1 \quad \text{または}, \quad x^2-dy^2=\pm4$$

の形の不定方程式をペル方程式という. 一般的にペル方程式には, 自然数解が無限に存在することが知られている.

Jones [5] は, $d=k^2\pm1$ および, $k^2\pm4$ の場合にペル方程式の自然数解について考察し, 自然数解が一般フィボナッチ数列と一般リュカ数列を用いて表現できることを示した. また, Keskin-Güney [6] はこれらの自然数 d に対して, $\sqrt{d}$ の連分数展開を具体的に明らかにし, Jones の結果の別証を与えた.

連分数展開の周期の長さに着目したとき, Jones の結果において $d=k^2+1$ の場合は $\sqrt{d}$ の連分数展開の周期の長さが 1 の場合と見ることができる. 本論文では, $\sqrt{d}$ の連分数展開の周期の長さが 3 となる場合についてペル方程式

$$x^2-dy^2=\pm1, \quad x^2-dy^2=\pm4$$

の全ての自然数解について考察する.

2 準備

2.1 ペル方程式と連分数展開

ここでは, 連分数展開の基本事項について説明する.

定義 2.1. 実数 α に対して,

$$\alpha=[a_0,a_1,a_2,\dots]=a_0+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\dots}} \quad (a_0\in\mathbb{Z},\ a_1,a_2,\dots\in\mathbb{N})$$

を α の連分数展開という. 定義から, $\lfloor\alpha\rfloor=a_0$ である. ただし, $\lfloor x\rfloor$ は x のガウス記号である.

補題 2.1. 平方数でない自然数 d について, $\sqrt{d}$ の連分数展開を,

$$\sqrt{d} = [a_0, a_1, \dots, a_n, \dots]$$

で表す. このとき, ある自然数 l が存在して,

$$\sqrt{d} = [a_0, a_1, \dots, a_l, a_1, \dots, a_l, a_1, \dots]$$

と表せる.

上記の場合において, 循環部分を,

$$\sqrt{d} = [a_0, \overline{a_1, \dots, a_l}]$$

のように上線で表す. このとき, $\sqrt{d}$ は周期 l で循環するといい, 周期の長さを, $l(\sqrt{d}) = l$ で表す.

補題 2.2.

(1) $\sqrt{d}$ の連分数展開は,

$$\sqrt{d} = [a_0, \overline{a_1, a_2, \dots, a_{l-1}, 2a_0}]$$

の形で表せる.

(2) $\sqrt{d}$ の連分数展開の循環節は回文的である. つまり,

$$[a_0, \overline{a_1, a_2, \dots, a_{l-1}, 2a_0}] = [a_0, \overline{a_{l-1}, a_{l-2}, \dots, a_1, 2a_0}]$$

となる.

Proof. 参考文献 [1] pp.41-43 を参照のこと. □

次に, ペル方程式の解を求める上で重要となる $\sqrt{d}$ の近似分数を定義する.

定義 2.2. $\sqrt{d} = [a_0, a_1, a_2, \dots]$ のとき,

$$\frac{p_n}{q_n} = [a_0, a_1, \dots, a_n] = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}}}$$

を $\sqrt{d}$ の n 次近似分数という.

ここで, 連分数展開を用いてペル方程式の解を求める方法について紹介する.

定義 2.3. 平方数でない自然数 d に対して,

$$x^2 - dy^2 = \pm 1 \quad \text{または,} \quad x^2 - dy^2 = \pm 4$$

の形の不定方程式をペル方程式という.

定義 2.4. 整数の組 (a, b) をペル方程式の解とする. ここで, a, b がともに正のとき, (a, b) をペル方程式の自然数解という. さらに, ペル方程式の自然数解の中で, $a + b\sqrt{d}$ が最小となるとき, (a, b) をペル方程式の基本解という.

まずは, $x^2 - dy^2 = \pm 1$ の基本解について見る.

補題 2.3. $l(\sqrt{d}) = l$ とする.

(1) l が偶数ならば基本解は以下で与えられる.

(1-i) $x^2 - dy^2 = 1$ の基本解は (p_{l-1}, q_{l-1}).

(1-ii) $x^2 - dy^2 = -1$ は解を持たない.

(2) l が奇数の時, 基本解は以下で与えられる.

(2-i) $x^2 - dy^2 = 1$ の基本解は (p_{2l-1}, q_{2l-1}).

(2-ii) $x^2 - dy^2 = -1$ の基本解は (p_{l-1}, q_{l-1}).

Proof. 参考文献 [1] pp.87-88 を参照のこと. □

次に, $x^2 - dy^2 = \pm 1$ と $x^2 - dy^2 = \pm 4$ の基本解の対応について見ていく.

補題 2.4. $d \equiv 2, 3 \pmod 4$ または, $d \equiv 1 \pmod 8$ とする. このとき, $x^2 - dy^2 = \pm 1$ と, $x^2 - dy^2 = \pm 4$ の自然数解は, $(a, b) \mapsto (2a, 2b)$ により 1 対 1 に対応する. この対応で $x^2 - dy^2 = \pm 1$ の基本解は $x^2 - dy^2 = \pm 4$ の基本解に対応する.

Proof. 参考文献 [1] pp.88-92 を参照のこと. □

補題 2.5. $d \equiv 5 \pmod 8$ とし, (a, b) は $x^2 - dy^2 = -4$ の基本解とする. このとき, a, b がともに偶数ならば, $\left(\dfrac{a}{2}, \dfrac{b}{2}\right)$ が $x^2 - dy^2 = -1$ の基本解となる.

Proof. 参考文献 [1] pp.85-87 を参照のこと. □

ペル方程式は基本解が与えられていれば, そこからすべての自然数解を導くことができる.

定理 2.1. (x_1, y_1) を $x^2 - dy^2 = 1$ の基本解とする．このとき，$x^2 - dy^2 = 1$ のすべての自然数解 (x_n, y_n) $(n = 1, 2, \dots)$ は，

$$x_n + y_n\sqrt{d} = (x_1 + y_1\sqrt{d})^n$$

で与えられる．

Proof. 参考文献 [2] p.123 の (V) を参照のこと． □

定理 2.2. (x_1, y_1) を $x^2 - dy^2 = -1$ の基本解とする．このとき，$x^2 - dy^2 = -1$ のすべての自然数解 (x_n, y_n) $(n = 1, 2, \dots)$ は，

$$x_n + y_n\sqrt{d} = (x_1 + y_1\sqrt{d})^{2n-1}$$

で与えられる．また，$x^2 - dy^2 = 1$ の基本解 (x_1', y_1') は，

$$x_1' + y_1'\sqrt{d} = \left(x_1 + y_1\sqrt{d}\right)^2$$

で与えられる．

Proof. 参考文献 [2] pp.123-124 の (VI) を参照のこと． □

次に，$x^2 - dy^2 = \pm 4$ の自然数解について見ていく．

定理 2.3. (x_1, y_1) を $x^2 - dy^2 = 4$ の基本解とする．このとき，$x^2 - dy^2 = 4$ のすべての自然数解 (x_n, y_n) $(n = 1, 2, \dots)$ は，

$$x_n + y_n\sqrt{d} = \frac{(x_1 + y_1\sqrt{d})^n}{2^{n-1}}$$

で与えられる．

Proof. 参考文献 [2] の定理 3.9 を参照のこと． □

定理 2.4. (x_1, y_1) を $x^2 - dy^2 = -4$ の基本解とする．このとき，$x^2 - dy^2 = -4$ のすべての自然数解 (x_n, y_n) $(n = 1, 2, \dots)$ は，

$$x_n + y_n\sqrt{d} = \frac{(x_1 + y_1\sqrt{d})^{2n-1}}{4^{n-1}}$$

で与えられる．また，$x^2 - dy^2 = 4$ の基本解 (x_1', y_1') は，

$$\frac{x_1' + y_1'\sqrt{d}}{2} = \left(\frac{x_1 + y_1\sqrt{d}}{2}\right)^2$$

で与えられる．

Proof. 参考文献 [2] の定理 3.9 を参照のこと． □

2.2　一般フィボナッチ数列と一般リュカ数列

次に, 一般フィボナッチ数列と一般リュカ数列の性質を確認していく.

定義 2.5. $f, g \in \mathbb{Z}$ $(f \neq 0, g \neq 0, f^2 + 4g > 0)$ とする. このとき, 一般フィボナッチ数列 $U_n(f,g)$ と一般リュカ数列 $V_n(f,g)$ を,

$$U_0(f,g) = 0,\ \ U_1(f,g) = 1,\ \ \ U_{n+1}(f,g) = fU_n(f,g) + gU_{n-1}(f,g),$$

$$V_0(f,g) = 2,\ \ V_1(f,g) = f,\ \ \ V_{n+1}(f,g) = fV_n(f,g) + gV_{n-1}(f,g)$$

で定義する.

補題 2.6. 定義 2.5 において,

$$\alpha = \frac{f + \sqrt{f^2 + 4g}}{2},\ \ \ \beta = \frac{f - \sqrt{f^2 + 4g}}{2}$$

とおく. このとき,

$$U_n(f,g) = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta},\ \ \ V_n(f,g) = \alpha^n + \beta^n$$

が成り立つ.

3　連分数展開に関する結果

3.1　周期 3 の連分数展開

ここでは, 周期が 3 になる連分数展開について決定する.

定理 3.1. $l(\sqrt{d}) = 3$ であることと,

$$a < k,\ \ \ d = k^2 + \frac{4ak + 1}{4a^2 + 1}$$

となる自然数 k, a が存在することは同値である. また, このとき $\sqrt{d} = [k, \overline{2a, 2a, 2k}]$ $(k \in \mathbb{N})$ となる.

Proof. $l(\sqrt{d}) = 3$ を仮定する. このとき, 補題 2.2 より, $\sqrt{d} = [k, \overline{2a, 2a, 2k}]$ と表すことができる. ここで,

$$\sqrt{d} = k + \cfrac{1}{2a + \cfrac{1}{2a + \cfrac{1}{2k + \sqrt{d} - k}}}.$$

この式から, $d = k^2 + \dfrac{4ak+1}{4a^2+1}$ が得られる．d は自然数より, $4ak+1 \geq 4a^2+1$. よって $k \geq a$. ここで, $k = a$ とすると, $l(\sqrt{d}) = 1$ となり矛盾する．従って, $k > a$ である．

逆に, $k > a$ で, $d = k^2 + \dfrac{4ak+1}{4a^2+1}$ となる自然数 k, a が存在すると仮定する．このとき, $k^2 + \dfrac{4ak+1}{4a^2+1}$ は自然数より $k \equiv a \pmod{4a^2+1}$ であるから, $k = (4a^2+1)n + a$ $(n \in \mathbb{N})$ とかける．$\lfloor \sqrt{d} \rfloor = k$ より,

$$\sqrt{d} = k + \cfrac{1}{\cfrac{\sqrt{d}+k}{d-k^2}} = k + \cfrac{1}{\cfrac{\sqrt{d}+k}{4an+1}} \tag{1}$$

と変形できる．分子の $\sqrt{d}+k$ について,

$$\lfloor \sqrt{d}+k \rfloor = 2k = 8a^2n + 2n + 2a = 2a(4an+1) + 2n$$

であり, $2n < 4an+1$ であるから,

$$\left\lfloor \frac{\sqrt{d}+k}{d-k^2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{\sqrt{d}+k}{4an+1} \right\rfloor = 2a$$

となる．次に,

$$\frac{\sqrt{d}+k}{d-k^2} = 2a + \left(\frac{\sqrt{d}+k}{4an+1} - 2a \right) = 2a + \cfrac{1}{\cfrac{4an+1}{\sqrt{d}-(4a^2n-n+a)}}$$

であり,

$$\frac{4an+1}{\sqrt{d}-(4a^2n-n+a)} = \frac{(4an+1)(\sqrt{d}+4a^2n-n+a)}{d-(4a^2n-n+a)^2} = \frac{\sqrt{d}+4a^2n-n+a}{4an+1} \tag{2}$$

となる．よって, 分子について,

$$\lfloor \sqrt{d}+4a^2n-n+a \rfloor = k + 4a^2n - n + a = 2a(4an+1)$$

であるから,

$$\left\lfloor \frac{4an+1}{\sqrt{d}-(4a^2n-n+a)} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{\sqrt{d}+4a^2n-n+a}{4an+1} \right\rfloor = 2a$$

となる．式 (2) より,

$$\frac{4an+1}{\sqrt{d}-(4a^2n-n+a)} = 2a + \left(\frac{\sqrt{d}+4a^2n-n+a}{4an+1} - 2a \right) = 2a + \cfrac{1}{\cfrac{4an+1}{\sqrt{d}-k}}.$$

さらに,

$$\frac{4an+1}{\sqrt{d}-k} = \cfrac{(4an+1)(\sqrt{d}+k)}{\cfrac{4ak+1}{4a^2+1}} = \sqrt{d}+k.$$

また, $\lfloor\sqrt{d}+k\rfloor = 2k$ より,

$$\sqrt{d}+k = 2k + (\sqrt{d}+k-2k) = 2k + \cfrac{1}{\cfrac{\sqrt{d}+k}{d-k^2}}.$$

これと式 (1) より, $\sqrt{d} = [k, \overline{2a, 2a, 2k}]$ と表すことができる. 仮定より, $a \neq k$ であるから $l(\sqrt{d}) = 3$ が判る. □

定理 3.1 に関して, 後のセクションで必要となる性質を紹介する.

補題 3.1. $l(\sqrt{d}) = 3$ ならば, $4 \nmid d$ となる.

Proof. 証明略. □

4　$l(\sqrt{d}) = 3$ におけるペル方程式の自然数解について

4.1　ペル方程式 $x^2 - dy^2 = \pm 1$ のケース

以降, $l(\sqrt{d}) = 3$ と仮定する. このとき,

$$a < k, \quad d = k^2 + \frac{4ak+1}{4a^2+1}$$

をみたす自然数 a, k が存在する. また, 周期が奇数より, $x^2 - dy^2 = 1$ と $x^2 - dy^2 = -1$ のどちらも解を持つことに注意する.

定理 4.1. $x^2 - dy^2 = -1$ の基本解 (x_1, y_1) は,

$$x_1 + y_1\sqrt{d} = (k(4a^2+1)+2a) + (4a^2+1)\sqrt{d}$$

で与えられる.

Proof. 補題 2.3 より判る. □

定理 4.2. $x^2 - dy^2 = 1$ の基本解 (x_1, y_1) は,

$$x_1 + y_1\sqrt{d} = ((k(4a^2+1)+2a) + (4a^2+1)\sqrt{d})^2$$

で与えられる.

Proof. 定理 2.2, 4.1 より判る. □

次に, $x^2-dy^2=\pm 1$ のすべての自然数解が一般フィボナッチ数列と一般リュカ数列で表せることを示す.

定理 4.3. $(f,g)=(2k(4a^2+1)+4a,1)$ とすると,

(i) $x^2-dy^2=1$ のすべての自然数解 (x_n,y_n) $(n=1,2,\dots)$ は,

$$(x_n,y_n)=\left(\frac{1}{2}V_{2n}(f,g),(4a^2+1)U_{2n}(f,g)\right)$$

で与えられる.

(ii) $x^2-dy^2=-1$ のすべての自然数解 (x_n,y_n) $(n=1,2,\dots)$ は,

$$(x_n,y_n)=\left(\frac{1}{2}V_{2n-1}(f,g),(4a^2+1)U_{2n-1}(f,g)\right)$$

で与えられる.

Proof. 定理 2.1, 2.2, 4.1, 4.2 より $x^2-dy^2=\pm 1$ のすべての自然数解 (x_n,y_n) $(n=1,2,\dots)$ は,

$$x_n+y_n\sqrt{d}=((k(4a^2+1)+2a)+(4a^2+1)\sqrt{d})^n$$

で与えられる. さらに, n が偶数のときは, $x^2-dy^2=1$ の解, 奇数のときは $x^2-dy^2=-1$ の解となることに注意する. ここで,

$$\alpha=(k(4a^2+1)+2a)+(4a^2+1)\sqrt{d},$$

$$\beta=(k(4a^2+1)+2a)-(4a^2+1)\sqrt{d}$$

とおくと, $\alpha^n=x_n+y_n\sqrt{d},\ \ \beta^n=x_n-y_n\sqrt{d}$ となる. さらに,

$$x_n=\frac{\alpha^n+\beta^n}{2},\quad y_n=\frac{\alpha^n-\beta^n}{2\sqrt{d}}$$

が判る. ここで, 一般フィボナッチ数列と一般リュカ数列における f,g を,

$$(f,g)=(2k(4a^2+1)+4a,1)$$

とすると,

$$x_n=\frac{\alpha^n+\beta^n}{2}=\frac{1}{2}V_n(f,g),$$

$$y_n=(4a^2+1)\frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}=(4a^2+1)U_n(f,g)$$

を得る. □

4.2　ペル方程式 $x^2 - dy^2 = \pm 4$ のケース

周期が奇数より, $x^2 - dy^2 = 4$ と $x^2 - dy^2 = -4$ のどちらも解を持つことに注意する.

補題 4.1. $l(\sqrt{d}) = 3$, $d \equiv 5 \pmod 8$ ならば, $x^2 - dy^2 = -4$ の基本解 (x, y) に関して, x, y はどちらも偶数になる.

Proof. 証明略. □

定理 4.4. $x^2 - dy^2 = -4$ の基本解 (x_1, y_1) は,

$$x_1 + y_1\sqrt{d} = 2(k(4a^2 + 1) + 2a) + 2(4a^2 + 1)\sqrt{d}$$

で与えられる.

Proof. 定理 4.1, 補題 2.4, 2.5, 3.1, 4.1 より判る. □

定理 4.5. $x^2 - dy^2 = 4$ の基本解 (x_1, y_1) は,

$$x_1 + y_1\sqrt{d} = 2((k(4a^2 + 1) + 2a) + (4a^2 + 1)\sqrt{d})^2$$

で与えられる.

Proof. 定理 2.4, 4.4 より従う. □

最後に, $l(\sqrt{d}) = 3$ のとき, $x^2 - dy^2 = \pm 4$ の自然数解を一般フィボナッチ数列と一般リュカ数列で表す.

定理 4.6. $(f, g) = (2k(4a^2 + 1) + 4a, 1)$ とすると,

(i) $x^2 - dy^2 = 4$ のすべての自然数解 (x_n, y_n) $(n = 1, 2, \dots)$ は,

$$(x_n, y_n) = (V_{2n}(f, g), 2(4a^2 + 1)U_{2n}(f, g))$$

で与えられる.

(ii) $x^2 - dy^2 = -4$ のすべての自然数解 (x_n, y_n) $(n = 1, 2, \dots)$ は,

$$(x_n, y_n) = (V_{2n-1}(f, g), 2(4a^2 + 1)U_{2n-1}(f, g))$$

で与えられる.

Proof. 定理 2.3, 2.4, 4.4, 4.5 より, 定理 4.3 の証明と同様に示せる. □

参考文献

[1] 有澤健治, 『平方根の連分数とペル方程式』, http://ar.nyx.link/cf/pell.pdf.

[2] 河田敬義, 『数論 I』, 岩波書店, 1978.

[3] ジョセフ · H · シルヴァーマン, 『はじめての数論』, 丸善出版, 2014.

[4] 高倉亘, 『$\sqrt{n}$ の連分数展開に関する考察』, http://izumi-math.jp/W_Takakura/renbun/renbun.pdf.

[5] J.P.Jones, Representation of Solutions of Pell Equations Using Lucas Sequences, Acta Acad. Paedagog. Agriensis Sect. Mat. (N.S.). **30**, (2003), 75-86.

[6] R.Keskin, M.Güney, Positive Integer Solution of Some Pell Equations, Palest. J. Math. **8**, (2019), No. 2, 213-226.