特殊多項式の Schur 多項式への変換公式

杉本奨吾（Sugimoto Shogo）

早稲田大学大学院基幹理工学研究科数学応用数理専攻

Abstract

Schur 多項式は表現論では対称群や一般線型群の指標を表す特殊多項式であり, Schubert calculus においては, Grassmann 多様体のコホモロジー環の Schubert 類を表す特殊多項式である. 多項式の特徴としては, 整数係数対称多項式環の基底である. つまり任意の対称多項式は Schur 多項式の和であらわすことができる. Schubert calculus には Schur 多項式以外にも様々な特殊多項式が現れ, ここでは対称な特殊多項式たちの Schur 多項式への変換を考える.

この研究は早稲田大学の中山勇祐氏との共同研究である.

1 Introduction

Schur 多項式は一般線型群の既約な多項式表現の指標であり, さらに Schubert calculus においては Grassmann 多様体のコホモロジー環の Schubert 類をあらわす特殊多項式である.

Schur 多項式は partiton で添字づけられる多変数多項式である. ここで partition とは有限の正整数の広義単調減少列である. Schur 多項式の多項式としての特徴としては対称であり, 整数係数対称多項式環の基底になる. つまり任意の対称多項式は Schur 多項式の線型結合で表すことができる. Schubert calculus には Schur 多項式以外にも様々な対称な特殊多項式が現れる. Schubert calculus にあらわれる対称な特殊多項式の Schur 多項式での展開を考える.

2 Schur 多項式と Schubert calculus

Schur 多項式が Schubert calculus では Schubert class をあらわす特殊多項式になっている. このことについて簡単に説明する. 詳しくは池田岳先生の本 [8] をみられたい.

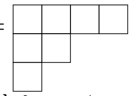
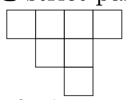
2.1 Schubert 多様体

定義 2.1. 正整数の有限広義単調減少列 $\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_\ell)$ を *partition* という. このとき ℓ を λ の *length* という. λ を *partition* とする. $\mathbb{D}(\lambda) := \{(i,j) \in \mathbb{Z}_{>0} \times \mathbb{Z}_{>0} | 1 \leq i \leq \ell, 1 \leq j \leq \lambda_i\}$ を λ の *Young diagram* という. $|\lambda|$ で $|\lambda| := \lambda_1 + \cdots + \lambda_\ell$ をあらわす.

- $\mathcal{P}$ *:the set of all partitions*
- $\mathcal{P}_m := \{\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_\ell) \in \mathcal{P} | \ell \leq m\}$
- $\mathcal{P}_m(n) := \{\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_\ell) \in \mathcal{P} | \ell \leq m, \lambda_1 \leq n\}$

定義 2.2. 正整数の狭義単調減少列 $\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_\ell)$ を *strict partition* という. ℓ を λ の *length* という. λ を *strict partittion* とする. $\mathbb{SD}(\lambda) := \{(i,j) \in \mathbb{Z}_{>0} \times \mathbb{Z}_{>0} | 1 \leq i \leq \ell, i \leq j \leq \lambda_i + i - 1\}$ を λ の *shifted Young diagram* という. *Partition* と同様に $|\lambda|$ で $|\lambda| := \lambda_1 + \cdots + \lambda_\ell$ をあらわす.

- $\mathcal{SP}$ *:the set of all strict partitions*
- $\mathcal{SP}_m := \{\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_\ell) \in \mathcal{P} | \ell \leq m\}$
- $\mathcal{SP}(m) := \{\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_\ell) \in \mathcal{P} | \lambda_1 \leq m\}$

λ を length ℓ の partition とする． この λ に対して 1 行目に λ_1 個の箱を横に並べ，2 行目に λ_2 個の箱を並べ,$\cdots$ ℓ 行目に λ_ℓ の箱を並べた箱の集まりを考える．$\mathbb{D}(\lambda)$ はこの箱の集まりと同一視する． つまり $\mathbb{D}(4,2,1) = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,1),(2,2),(3,1)\} =$  と同一視する．ここで $\mathbb{D}(\lambda)$ の元 (i,j) は箱の位置を表している．同様に $(4,2,1)$ を strict partition とみなすと $\mathbb{SD}(4,2,1) = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,2),(2,3),(3,3)\}$ であるから, 次の箱の集まり  と同一視する．

これ以降 partition とその Young diagram, strict partition とその shifted Young diagram は断りなく同一視する．

定義 2.3. *2 つの prtitions* $\lambda = (\lambda_1,\cdots,\lambda_\ell), \mu = (\mu_1,\cdots,\mu_{\ell'})$ *に対して* $\ell \le \ell'$ *かつ* $\lambda_i \le \mu_i, \forall i = 1,\cdots,\ell$ *のとき* $\lambda \subset \mu$ *とあらわす．*

定義 2.4. $Gr(m,\mathbb{C}^n) := \{V \subset \mathbb{C}^n | \dim V = m\}$ *を Grassmann 多様体という．* $\lambda \in \mathcal{P}_m(n-m) = \{\lambda = (\lambda_1,\cdots,\lambda_\ell) | \ell \le d, \lambda_1 \le n-d\}$ *と* $\mathbb{C}^n$ *の旗* $F^\bullet : \{0\} = F^n \subset F^{n-1} \subset \cdots \subset F^0 = \mathbb{C}^n, \dim F^i = n-i$ *に対して Schubert 多様体* $\Omega_\lambda(F^\bullet)$ *を*

$$\Omega_\lambda(F^\bullet) := \{V \in Gr(m,\mathbb{C}^n) | \dim(F^{\lambda_i+d-i} \cap V) \ge i, 1 \le i \le m\}$$

で定義する．

Schubert 多様体には次の特徴がある．

- $\Omega_\lambda(F^\bullet)$ は $Gr(m,\mathbb{C}^n)$ の irreducible closed subvariety になる．
- $\Omega_\lambda(F^\bullet)$ は $H^{2|\lambda|}(Gr(m,\mathbb{C}^n))$ の元 $[\Omega_\lambda(F^\bullet)]$ を定め, またこの class は選んだ旗に寄らない．
- $\sigma_\lambda := [\Omega_\lambda(F^\bullet)]$ を Schubert Class とよび，これらの class たち $\{\sigma_\lambda | \lambda \in \mathcal{P}_m(n-m)\}$ は，コホモロジー環 $H^*(Gr(m,\mathbb{C}^n))$ の $\mathbb{Z}$-基底になる．
- 整数 $c^\nu_{\lambda,\mu}$ を $\sigma_\lambda\sigma_\mu = \sum_\nu c^\nu_{\lambda,\mu}\sigma_\nu$ で定義する．お互いに十分一般の旗を選べば $\#(\Omega_\lambda(F^\bullet) \cap \Omega_\mu(F'^\bullet) \cap \Omega_{\nu^\vee}(F''^\bullet))$ は一定の有限の値をとり，この値は $c^\nu_{\lambda,\mu}$ に一致する．ここで $\nu^\vee$ は $\nu^\vee_i = n-m-\nu_{m+1-i}$ である partition である．$c^\nu_{\lambda,\mu}$ を Schubert 構造定数という．

2.2 Schur 多項式

定義 2.5. $\lambda = (\lambda_1,\cdots,\lambda_\ell) \in \mathcal{P}_m$ *を partition とする．Schur 多項式* $s_\lambda(x_1,\cdots,x_m)$ *を*

$$s_\lambda(x_1,\cdots,x_m) := \frac{\det(x_j^{\lambda_i+m-i})_{1\le i,j\le m}}{\det(x_j^{m-i})_{1\le i,j\le m}}$$

で定義する．

この多項式は対称多項式環 $\mathbb{Z}[x_1,\cdots,x_m]^{S_m}$ の $\mathbb{Z}$-基底になっている．次の定理は Schubert calculus において基本的な事実である．

定理 2.6. *次の写像* π_m *は全射な* $\mathbb{Z}$ *代数としての準同型である．*

$$\begin{array}{rcl}\pi_m : \mathbb{Z}[x_1,\cdots,x_m]^{S_m} & \longrightarrow & H^*(Gr(m,\mathbb{C}^n)) \\ s_\lambda(x_1,\cdots,x_m) & \mapsto & \begin{cases}\sigma_\lambda & \lambda \in \mathcal{P}_m(n-m) \\ 0 & \lambda \notin \mathcal{P}_m(n-m)\end{cases}\end{array}$$

この対応により構造定数を代数的な計算から求めることができる．

3　そのほかの特殊多項式

Schubert 多様体は Grassmann 多様体以外の多様体でも定義することができ, さらに Schubert class も K 理論的環でも (他にも同変版や量子版などでも) 定義できる.

定義 3.1. *(Lascoux–Schützenberger[4])*
$\lambda \in \mathcal{P}_m$ を *partition* とする. *Grothendieck* 多項式 $G_\lambda^{(\beta)}(x_1, \cdots, x_m)$ を

$$G_\lambda^{(\beta)}(x_1, \cdots, x_m) = \frac{\det(x_i^{\lambda_j+m-j}(1+\beta x_i)^{j-1})_{1\le i,j\le m}}{\det(x_j^{m-i})_{1\le i,j\le m}}$$

で定義する.

Grothendieck 多項式には次の特徴がある.

- $G_\lambda^{(\beta)}(x_1, \cdots, x_m)$ は次数が $|\lambda|$ $(\deg(\beta) := -1)$ の斉次な対称多項式である.
- $\{G_\lambda^{(\beta)}(x_1, \cdots, x_m) | \lambda \in \mathcal{P}_m\}$ は $\mathbb{Z}[\beta][x_1, \cdots, x_m]^{S_m}$ の $\mathbb{Z}[\beta]$ 基底をなす.
- $G_\lambda^{(0)}(x_1, \cdots, x_m) = s_\lambda(x_1, \cdots, x_m)$
- Schubert calculus においては Grassmann 多様体の K 理論の Schubert class を表す特殊多項式である.

定義 3.2. *(Schur[6], Ikeda–Naruse[3])* $\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_\ell) \in \mathcal{SP}_n$ を *strict partition* とする.
Schur P, *Schur* Q 多項式, GP, GQ 多項式をそれぞれ次で定義する.

$$\begin{aligned}
P_\lambda(x_1, \cdots, x_n) &= \frac{1}{(n-\ell)!}\sum_{w\in S_n} w\left[x_1^{\lambda_1}x_2^{\lambda_2}\cdots x_\ell^{\lambda_\ell}\prod_{1\le i<j\le n, i\le \ell}\frac{x_i+x_j}{x_i-x_j}\right]\\
Q_\lambda(x_1, \cdots, x_n) &= \frac{1}{(n-\ell)!}\sum_{w\in S_n} w\left[x_1^{\lambda_1}x_2^{\lambda_2}\cdots x_\ell^{\lambda_\ell}\prod_{i=1}^{\ell}(2+\beta x_i)\prod_{1\le i<j\le n, i\le \ell}\frac{x_i+x_j}{x_i-x_j}\right]\\
GP_\lambda^{(\beta)}(x_1, \cdots, x_n) &= \frac{1}{(n-\ell)!}\sum_{w\in S_n} w\left[x_1^{\lambda_1}x_2^{\lambda_2}\cdots x_\ell^{\lambda_\ell}\prod_{1\le i<j\le n, i\le \ell}\frac{x_i\oplus x_j}{x_i\ominus x_j}\right]\\
GQ_\lambda^{(\beta)}(x_1, \cdots, x_n) &= \frac{1}{(n-\ell)!}\sum_{w\in S_n} w\left[x_1^{\lambda_1}x_2^{\lambda_2}\cdots x_\ell^{\lambda_\ell}\prod_{i=1}^{\ell}(2+\beta x_i)\prod_{1\le i<j\le n, i\le \ell}\frac{x_i\oplus x_j}{x_i\ominus x_j}\right].
\end{aligned}$$

ここで演算 $\oplus, \ominus$ はそれぞれ $x \oplus y := x + y + \beta xy, x \ominus y := \frac{x-y}{1+\beta y}$ で定義する. また S_n は n 次の対称群をあらわし 対称群の元 $w \in S_n$ は $x = (x_1, \cdots, x_n)$ の添字に自然に作用する.

Grothendieck 多項式とおなじようにこれらの多項式も Schubert class を表す特殊多項式である. 特にこれらの多項式は対称であるから, Schur 多項式で展開できるはずである. よってここで考えたい問題は「Grothendieck 多項式, Schur P, Schur Q, GP, GQ 多項式をそれぞれ Schur 多項式で展開」することである.

4　多項式たちの関係

Schur 多項式,Grothendieck 多項式, Schur P, Schur Q, GP, GQ 多項式を導入した. これらの多項式の関係を説明する. $\Lambda_{\mathbb{Z},m} := \mathbb{Z}[x_1, \cdots, x_m]^{S_m}$ を m 変数の対称多項式環という. $\rho_n : \Lambda_{\mathbb{Z},n+1} \longrightarrow \Lambda_{\mathbb{Z},n}$ $\quad f(x_1, \cdots, x_n, x_{n+1}) \mapsto f(x_1, \cdots, x_n, 0)$ で準同型が存在する. この準同型から環 $\Lambda_\mathbb{Z} := \varprojlim \Lambda_{\mathbb{Z},m}$ が定義できこの環を対称関数環という. さらに $s_\lambda(x_1, \cdots, x_n, 0) = s_\lambda(x_1, \cdots, x_n)$ が成立する. Schur 関数を $s_\lambda(x) := \varprojlim s_\lambda(x_1, \cdots, x_n)$ で定義する.

同様に $G_\lambda(x), P_\lambda(x), GP_\lambda(x), Q_\lambda(x), GQ_\lambda(x)$ も定義する.

4.1 GP 関数と GQ 関数

命題 4.1. $\lambda \in \mathcal{SP}_n$ を長さ ℓ の *strict partition* とする．このとき次の等式が成立する．

$$P_\lambda(x) = 2^{-\ell} Q_\lambda(x).$$

上の等式を Schur P 関数の定義とすることもある．

定義 4.2. *2* つの *strict partitions* $\lambda \supset \mu$ に対して *skew diagram* $\mathbb{SD}(\lambda/\mu) := \mathbb{SD}(\lambda) \setminus \mathbb{SD}(\mu)$ の各行が *2* 個以上の箱を持たないときこの *diagram* を *shape* λ/μ の *vartical strip* という．また $|\lambda/\mu|$ で $|\lambda| - |\mu|$ をあらわす．

命題 4.3. *(Chiu–Marberg[2])* $\mu \in \mathcal{SP}_n$ を長さ ℓ の *strict partition* とする．

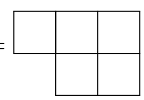
$$GQ_\mu^{(\beta)}(x) = 2^\ell \sum_\lambda (-1)^{cols(\lambda/\mu)} \left(\frac{-\beta}{2}\right)^{|\lambda/\mu|} GP_\lambda^{(\beta)}(x)$$

ただし右辺の *partition* λ は $\lambda \supset \mu, \ell(\lambda) = \ell$ かつ $|\lambda/\mu|$ は *vertical strip* をみたすように動く．また $cols(\lambda/\mu)$ は λ/μ の列の個数である．

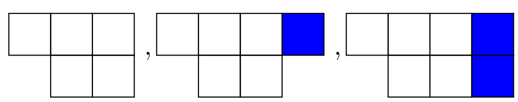
この等式は $\beta = 0$ を代入すると上の Schur P, Schur Q の関係が得られる．

例 1.

$$GQ_{(3,2)}^{(\beta)}(x) = 4GP_{(3,2)}^{(\beta)}(x) + 2\beta GP_{(4,2)}^{(\beta)}(x) - \beta^2 GP_{(4,3)}^{(\beta)}(x)$$

$\mathbb{SD}(\mu) =$ 

であるから，右辺の λ は

$\mathbb{SD}(\lambda) =$ 

をみたす *strict partition* $(3,2),(4,2),(4,3)$ である．

4.2 Schur 多項式と Grtohendieck 多項式

定義 4.4. *2* つの *partitions* $\lambda \supset \mu$ に対して *skew diagram* $\mathbb{D}(\lambda/\mu)$ を $\mathbb{D}(\lambda) \setminus \mathbb{D}(\mu)$ で定義する．また $|\lambda/\mu|$ で $|\lambda| - |\mu|$ をあらわす．

定義 4.5. *2* つの *partitions* $\lambda, \mu \in \mathcal{P}$ が $\lambda \supset \mu$ を満たすとする．T を *skew Young diagram* $\mathbb{D}(\lambda/\mu)$ の各 *box* に次の条件で正の整数を入れたものとする．これを *shape* μ/λ の *strict tableau* という．

(1) $T(i,j) < T(i,j+1)$,

(2) $T(i,j) < T(i+1,j)$.

命題 4.6. *(Lenart[5]) Grothendieck* 多項式は *Schur* 多項式の線型結合として次のように表せる．

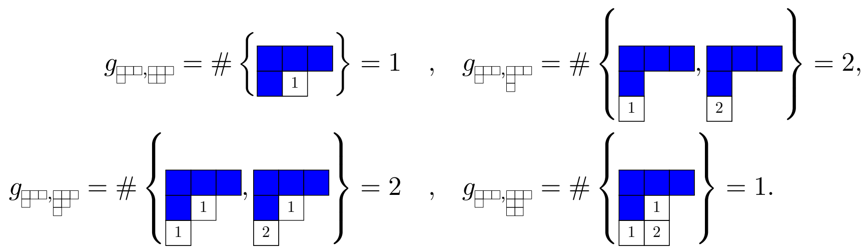
$$G_\lambda^{(\beta)}(x_1, \cdots, x_m) = \sum_{\lambda \subset \mu \subset \hat{\lambda}} \beta^{|\mu/\lambda|} g_{\lambda,\mu} s_\mu(x_1, \cdots, x_m)$$

$\hat{\lambda}$ は $\lambda + (0,1,2,\cdots,m-1)$ を表し，μ は λ を含み $\hat{\lambda}$ に含まれる *partition* である．$g_{\lambda,\mu}$ は各 i 行の *entry* を $1,2,\cdots,i-1$ に制限した *shape* μ/λ の *strict tableaux* の個数である．ここで i 行とは λ, μ の i 行と一致するようにとる．また $g_{\lambda,\lambda} := 1$ とおく．

例 2.

$$G^{(\beta)}_{(3,1)}(x_1,x_2,x_3) = s_{(3,1)}(x_1,x_2,x_3) + \beta s_{(3,2)}(x_1,x_2,x_3) + 2\beta s_{(3,1,1)}(x_1,x_2,x_3) + 2\beta^2 s_{(3,2,1)}(x_1,x_2,x_2) + \beta^3 s_{(3,2,2)}(x_1,x_2,x_2)$$

である．$\lambda = (3,1)$ のとき，$\hat{\lambda} = (3,1) + (0,1,2) = (3,2,2)$ は *partition* であるから右辺の *partition* は $(3,1)$ と $(3,2,2)$ の間を動き，各係数は次で求める．



定義 4.7. *2* つの *partitions* $\lambda, \mu \in \mathcal{P}$ が $\lambda \subset \mu$ を満たすとする．T を *skew Young diagram* $\mathbb{D}(\mu/\lambda)$ の各 *box* に次の条件で番号を入れたものとする．これを *shape* μ/λ の *strict tableau* という．

(1) $T(i,j) \leq T(i,j+1)$,

(2) $T(i,j) < T(i+1,j)$.

命題 4.8. *(Lenart[5]) Schur* 多項式は *Grothendieck* 多項式の線型結合で次のように表せる．

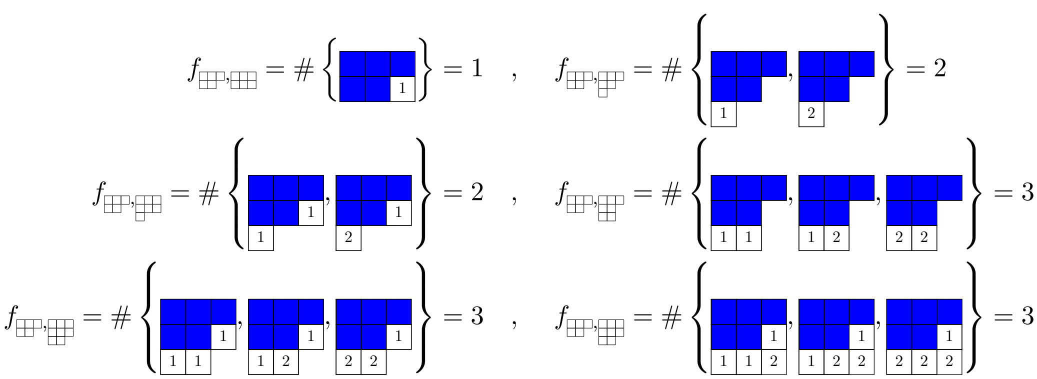
$$s_\lambda(x_1,\cdots,x_m) = \sum_{\lambda\subset\mu,\ell(\mu)\leq m,\mu_1=\lambda_1} (-\beta)^{|\mu/\lambda|} f_{\lambda,\mu} G^{(\beta)}_\mu(x_1,\cdots,x_m)$$

$f_{\lambda,\mu}$ は *shape* μ/λ の *semistandard tableau* で各 i 行が $1,\cdots,i-1$ であるものの個数．ここで i 行とは λ,μ の i 行と一致するようにとる．また $f_{\lambda,\lambda} := 1$ とおく．

例 3.

$$\begin{aligned} s_{(3,2)}(x_1,x_2,x_3) &= G^{(\beta)}_{(3,2)}(x_1,x_2,x_3) - \beta(G^{(\beta)}_{(3,3)}(x_1,x_2,x_3) + 2G^{(\beta)}_{(3,2,1)}(x_1,x_2,x_3)) \\ &\quad + \beta^2(2G^{(\beta)}_{(3,3,1)}(x_1,x_2,x_3) + 3G^{(\beta)}_{(3,2,2)}(x_1,x_2,x_3)) - 3\beta^3 G^{(\beta)}_{(3,3,2)}(x_1,x_2,x_3) + 3\beta^4 G^{(\beta)}_{(3,3,3)}(x_1,x_2,x_3) \end{aligned}$$

である．実際，$\lambda = (3,2)$ のとき，右辺の *pratition* μ は $\mu_1 = \lambda_1, \ell(\mu) \leq 3, \lambda \subset \mu$ を満たすものであるから $(3,2) \subset \mu \subset (3,3,3)$ を動き，各係数は次で求める．



4.3 Schur P 関数と Schur 多項式

Schur P 関数の Schur 多項式への展開公式は Stembridge[7] によって与えられたが, ここでは Assaf[1] の方法を紹介する.

定義 4.9. n を正の整数, とする. 部分集合 $D \subset \{1, 2, \cdots, n-1\}$ に対して関数 $F_{D,n}$ を

$$F_{D,n} := \sum_{\substack{i_1 \leq \cdots \leq i_n \\ j \in D \Rightarrow i_j < i_{j+1}}} x_{i_1} \cdots x_{i_n}$$

で定める. この関数を *slide* 関数という.

この関数は対称ではないが任意の対称関数はこれらの線型結合で表せることが知られている.

命題 4.10. *(Assaf, Gessel)* $\lambda \in \mathcal{P}, \mu \in \mathcal{SP}$ とする.

$$\begin{aligned}
s_\lambda(x) &= \sum_{T \in \mathcal{T}(\lambda, |\lambda|)} F_{Des(T), |\lambda|} \\
P_\mu(x) &= \sum_{T \in \mathcal{T}'(\mu, |\mu|)} F_{Des(T), |\mu|} \\
Q_\mu(x) &= \sum_{T \in \mathcal{T}''(\mu, |\mu|)} F_{Des(T), |\mu|}
\end{aligned}$$

($\mathcal{T}(\lambda, |\lambda|), Des(T)$ の定義は次の章で与える) この関係を使い Assaf は Schur P 関数の Schur 多項式への展開を次の方法で与えた.

- $\mathcal{T}'(\mu, |\mu|)$ にある involutions $\{\psi_i\}_{1 < i < |\mu|}$ を入れる.
- この involutions は自然に $\mathcal{T}'(\mu, |\mu|)$ に同値関係を定義する.
- 任意の同値類 $\forall [T] \in \mathcal{T}'(\mu, |\mu|)/\sim$ に対して, $\sum_{U \in [T]} F_{Des(U), |\mu|} = s_\lambda$ となる λ が存在する.

5 GP, GQ 関数と Grothendieck 多項式

5.1 Tableaux と words

定義 5.1. $\lambda \in \mathcal{P}$, s を 0 以上の整数とする. T を *Young diagram* $\mathbb{D}(\lambda)$ の各 *box* (箱) に次の条件で整数 $1, 2, \cdots, |\lambda| + s$ を入れたものとする. このとき T を *standard tableau* という.

(1) $T(i, j) < T(i, j+1)$ ($(i, j+1) \in \mathbb{D}(\lambda)$ である全ての $(i, j) \in \mathbb{D}(\lambda)$ で),

(2) $T(i, j) < T(i+1, j)$ ($(i+1, j) \in \mathbb{D}(\lambda)$ である全ての $(i, j) \in \mathbb{D}(\lambda)$ で).

(3) T は各整数 $i = 1, 2, \cdots, |\lambda| + s$ をちょうど *1* 回使う.

- $\mathcal{T}(\lambda, |\lambda| + s)$ を *shape* λ の *standard tableaux* からなる集合を表す.

例 4.

$$\mathcal{T}\left(\tiny\yng(2,1), 4\right) = \left\{ \begin{array}{|c|c|}\hline 12 & 4 \\ \hline 3 \\ \cline{1-1}\end{array}, \begin{array}{|c|c|}\hline 12 & 3 \\ \hline 4 \\ \cline{1-1}\end{array}, \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 4 \\ \hline 23 \\ \cline{1-1}\end{array}, \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 3 \\ \hline 24 \\ \cline{1-1}\end{array}, \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 34 \\ \cline{1-1}\end{array}, \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 24 \\ \hline 3 \\ \cline{1-1}\end{array}, \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 23 \\ \hline 4 \\ \cline{1-1}\end{array}, \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 34 \\ \hline 2 \\ \cline{1-1}\end{array} \right\}$$

また $\ell(\lambda) > m$ のとき $\mathcal{T}(\lambda, m) = \emptyset$ である.

定義 5.2. λ を *strict partition,* s を 0 以上の整数とする．$\mathbb{SD}(\lambda)$ の各 *box* に順序付き *alphabet* $1' < 1 < 2' < 2 \cdots < (|\lambda|+s)' < |\lambda|+s$ の空でない部分集合を次の条件 *(1)*$, \cdots,$ *(4)* をみたすように入れた *tableau* T を *shifted standard tableau* という．

(1) $\max T(i,j) < \min T(i,j+1)$

(2) $\max T(i,j) < \min T(i+1,j)$

(3) $T(i,i) \subset \{1,2,\cdots,|\lambda|+s\}$

(4) 各 $t = 1,\cdots,|\lambda|+s$ に対して T のなかに t, t' はちょうど一度現れる．

- $\mathcal{T}'(\lambda,|\lambda|+s)$ を *shape* λ の *shifted semistandard tableaux* からなる集合を表す．
- $\mathcal{T}''(\lambda,|\lambda|+s)$ を (4) の条件を外した *shape* λ の *shifted semistandard tableaux* からなる集合を表す．

例 5. $\mathcal{T}'(\begin{array}{|c|c|}\hline \; & \; \\ \hline \multicolumn{1}{c|}{} & \; \\ \cline{2-2}\end{array}, 4)$ は次の *tableaux* で構成される．

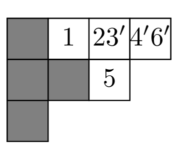
$$\begin{array}{|c|c|}\hline 12 & 3 \\ \hline \multicolumn{1}{c|}{} & 4 \\ \cline{2-2}\end{array},\begin{array}{|c|c|}\hline 12 & 3' \\ \hline \multicolumn{1}{c|}{} & 4 \\ \cline{2-2}\end{array},\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 23 \\ \hline \multicolumn{1}{c|}{} & 4 \\ \cline{2-2}\end{array},\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2'3 \\ \hline \multicolumn{1}{c|}{} & 4 \\ \cline{2-2}\end{array},\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 23' \\ \hline \multicolumn{1}{c|}{} & 4 \\ \cline{2-2}\end{array},\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2'3' \\ \hline \multicolumn{1}{c|}{} & 4 \\ \cline{2-2}\end{array},\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline \multicolumn{1}{c|}{} & 34 \\ \cline{2-2}\end{array},\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2' \\ \hline \multicolumn{1}{c|}{} & 34 \\ \cline{2-2}\end{array}$$

Standard tableaux と shifted standard tableaux に対しての word のよみかたを例を用いて説明する．
最初に standard tableaux の word について説明する．次の standard tableau T

$$\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1,2 & 4 & 8 & 12 \\ \hline 3 & 5,9 & 11,13 & \multicolumn{1}{|c}{} \\ \cline{1-3} 6,7,10 & \multicolumn{1}{|c}{} & & \\ \cline{1-1}\end{array}$$

を例に考える．この tableau の word $w(T)$ は $10,7,6,3,9,5,13,11,2,1,4,8,12$ である．これは次のように得られる．
一番下の行から上に, 各行左から右によむ．つまり次の番号の box からよむ．

$$\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 5 & 6 & 7 & 8 \\ \hline 2 & 3 & 4 & \multicolumn{1}{|c}{} \\ \cline{1-3} 1 & \multicolumn{1}{|c}{} & & \\ \cline{1-1}\end{array}$$

このとき同じ box に入っている整数は大きい方からよむ． これより $w(T) = 10,7,6,3,9,5,13,11,2,1,4,8,12$ がわかる．Word $w = w_1,\cdots,w_n$ に対して descent $Des(w)$ を $Des(w) := \{i | i$ は $i+1$ の右にある $\}$ で定義する．$T \in \mathcal{T}(\lambda,|\lambda|+s)$ に対する word を $w(T)$ とする．Tableau T の descent $Des(T)$ を $Des(T) := Des(w(T))$ で定義する．T が上の tableau のとき $Des(T) = \{1,2,4,5,6,8,9,12\}$ である．次に shifted standard tableau T の word を与える．$T = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 23' & 4'6' \\ \hline \multicolumn{1}{c|}{} & 5 & \multicolumn{1}{|c}{} \\ \cline{2-2}\end{array}$ とする．この tableau の shape は $\begin{array}{|c|c|c|}\hline \; & \; & \; \\ \hline \multicolumn{1}{c|}{} & \; & \multicolumn{1}{|c}{} \\ \cline{2-2}\end{array}$ である．この図形の転置した図形 $\begin{array}{|c|c|}\hline \; & \multicolumn{1}{|c}{} \\ \hline \; & \; \\ \hline \; & \multicolumn{1}{|c}{} \\ \cline{1-1}\end{array}$ を T にくっつける．このときこの tableau は 

となる．最後にこの tableau の prime 付きの整数を prime

をのぞいて対応する転置した位置に移す．このときこの tableau は $\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline & 1 & 2 & \\ \hline 3 & & 5 \\ \cline{1-3} 46 \\ \cline{1-1}\end{array}$ となる．T をこの tableau と同一視する．$w(T), Des(T)$ をこの tableau の word で standard tableau の word と同じように定義する．今の例では $w(T) = 6, 4, 3, 5, 1, 2, Des(T) = \{2, 3, 5\}$ である．

5.2 Slide 関数への展開

次の結果は Assaf, Gessel の結果を拡張である．

定理 5.3. *(Nakayama–Sugimoto)* $\lambda \in \mathcal{P}, \mu \in \mathcal{SP}$ とする．

$$\begin{aligned} G_\lambda^{(\beta)}(x) &= \sum_{s\geq 0} \beta^s \left(\sum_{T\in\mathcal{T}(\lambda,|\lambda|+s)} F_{Des(T),|\lambda|+s} \right) \\ GP_\mu^{(\beta)}(x) &= \sum_{s\geq 0} \beta^s \left(\sum_{T\in\mathcal{T}'(\mu,|\mu|+s)} F_{Des(T),|\mu|+s} \right) \\ GQ_\mu^{(\beta)}(x) &= \sum_{s\geq 0} \beta^s \left(\sum_{T\in\mathcal{T}''(\mu,|\mu|+s)} F_{Des(T),|\mu|+s} \right) \end{aligned}$$

この公式から $\mu = (k)$ という特別な場合の GP, GQ 関数の Grothendieck 多項式への展開公式が得られる．

系 1.

$$GP_{(k)}^{(\beta)}(x) = \sum_{i=0}^{k-1} G_{(k-i,1^i)}^{(\beta)}(x) + \beta \sum_{k=1}^{k-1} GP_{(k+1-i,1^i)}^{(\beta)}(x)$$

例 6.

$$\begin{aligned} GP^{(\beta)}_{\ydiagram{1}}(x) &= G^{(\beta)}_{\ydiagram{1}}(x) \\ GP^{(\beta)}_{\ydiagram{2}}(x) &= G^{(\beta)}_{\ydiagram{2}}(x) + G^{(\beta)}_{\ydiagram{1,1}}(x) + \beta G^{(\beta)}_{\ydiagram{2,1}}(x) \\ GP^{(\beta)}_{\ydiagram{3}}(x) &= G^{(\beta)}_{\ydiagram{3}}(x) + G^{(\beta)}_{\ydiagram{2,1}}(x) + G^{(\beta)}_{\ydiagram{1,1,1}}(x) + \beta\Big(G^{(\beta)}_{\ydiagram{3,1}}(x) + G^{(\beta)}_{\ydiagram{2,1,1}}(x)\Big) \\ GP^{(\beta)}_{\ydiagram{4}}(x) &= G^{(\beta)}_{\ydiagram{4}}(x) + G^{(\beta)}_{\ydiagram{3,1}}(x) + G^{(\beta)}_{\ydiagram{2,1,1}}(x) + G^{(\beta)}_{\ydiagram{1,1,1,1}}(x) + \beta\Big(G^{(\beta)}_{\ydiagram{4,1}}(x) + G^{(\beta)}_{\ydiagram{3,1,1}}(x) + G_{\ydiagram{2,1,1,1}}(x)\Big) \end{aligned}$$

わかりやすくするために *Grothendieck* 多項式の添字は *partiton* でなくその *Young diagram* で表している．

命題 4.6 と系 1 を合わせることで length が 1 の場合の GP 多項式を Schur 多項式で書き換えることができる．

References

[1] S. Assaf, Shifted dual equivalence and Schur P-positivity, J. Comb. 9 (2018), no. 2, 279-308.

[2] Yu-Cheng Chiu and Eric Marberg, Expanding K-theoretic Schur Q-functions, arXiv:2111.08993 .

[3] Takeshi Ikeda and Hiroshi Naruse, K-theoretic analogues of factorial Schur P-and Q-functions, Advances in Mathematics 243 (2013) 22-66.

[4] A. Lascoux and M.P. Schützenberger, Symmetry and flag manifolds. In Invariant theory, pp. 118- 144. Springer, 1983.

[5] C. Lenart, Combinatorial Aspects of the K-Theory of Grassmannians, Annals of Combinatorics, 4(1): 67-82, 2000.

[6] I. Schur,Über die Darstellung der symmetrischen und der alternierenden Gruppe durch gebrochene lineare Substitutionen, J. Reine Angew. Math. 139 (1911), 155-250.

[7] J.R. Stembridge, Shifted tableaux and the projective representations of symmetric groups, Adv. Math., 74(1):87-134, 1989.

[8] 池田　岳 , 数え上げ幾何学講義シューベルト・カルキュラス入門, 東京大学出版会, 2018.