超平面配置の二重被覆と整係数の局所系係数コホモロジー

北海道大学大学院 理学院 数学専攻
菅原 朔見 (Sakumi SUGAWARA)

概要

超平面配置のトポロジーにおいて,「様々な位相不変量が組み合わせ的に決まるか？」というのは中心的な問題であり，これまで多くの研究があった.「補集合の局所系係数ホモロジーや，Milnor ファイバーや被覆空間のトーションが組み合わせ的に決まるか？」というのは未解決問題である．本講演では，二重被覆の 2-トーションに対する公式が得られたので，それについて紹介する．また，超平面配置の整係数の局所系係数コホモロジーの最近の進展についても併せて紹介する．本講演の内容は石橋卓氏 (株式会社 ARISE analytics) と吉永正彦氏 (大阪大学) との研究に基づく.

1 導入 1 –超平面配置–

本節では，本研究の題材である超平面配置について必要事項を説明する．超平面配置の一般論については [12] を参照.

定義 1.1. ベクトル空間 $\mathbb{C}^\ell$ もしくは射影空間 $\mathbb{C}P^\ell$ 内の超平面の有限集合 $\mathcal{A} = \{H_1, \cdots, H_n\}$ を超平面配置という．その補集合を $M(\mathcal{A}) = \mathbb{C}^\ell \setminus \bigcup_{i=1}^n H_i$ (or $\mathbb{C}P^\ell \setminus \bigcup_{i=1}^n H_i$) と表す.

超平面配置からは，超平面たちの交わり方の組み合わせ的な情報が定まる.

定義 1.2. 超平面配置 $\mathcal{A}$ の交叉半順序集合 $L(\mathcal{A})$ を以下で定める.

$$L(\mathcal{A}) = \{\bigcap_{H\in\mathcal{B}} H \mid \mathcal{B} \subset \mathcal{A}, \bigcap_{H\in\mathcal{B}} H \neq \emptyset\}$$

ただし，$\mathcal{B} = \emptyset$ のときは $\mathbb{K}^\ell = \bigcap_{H\in\emptyset} H$ と約束し，半順序は $X \leq Y \Leftrightarrow X \supset Y$ と定める.

超平面配置のトポロジーにおいては，補集合 $M(\mathcal{A})$ や次節で定義を与える Milnor ファイバー $F_\mathcal{A}$ のトポロジーが交叉半順序集合 $L(\mathcal{A})$ の情報のみに記述されるか？すなわち，組み合わせ論的情報によりきまるか？というのが大きな問題意識である.

2 導入 2 –Milnor ファイブレーション–

本節では，本研究のモチベーションとなる超平面配置の Milnor ファイバーについて概要を説明する．$Q = Q(x_1, \cdots, x_{\ell+1}) \in \mathbb{C}[x_1, \cdots, x_{\ell+1}]$ を複素係数の $\ell + 1$ 変数の多項式とし，とくに Q が線

形な一次式 $\alpha_i(x_1, \cdots, x_n)$ の積で表されていると仮定する．

$$Q(x_1, \cdots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} \alpha_i(x_1, \cdots, x_n).$$

Q は多項式函数 $Q : \mathbb{C}^{\ell+1} \to \mathbb{C}$ を定める．簡単な計算により，Q の臨界値は $0 \in \mathbb{C}$ のみであることがわかる．超平面 $H_i = \alpha_i^{-1}(0)$ と定めると，Q が一次式 α_i たちの積で書かれていることから，臨界値 0 の逆像は

$$Q^{-1}(0) = \bigcup_{i=1}^{n} H_i$$

となり，$Q^{-1}(0)$ は超平面の和集合として表すことができる．従って，多項式 Q は $\mathbb{C}^{\ell+1}$ 内の超平面配置 $\mathcal{A} = \{H_1, \cdots, H_n\}$ を定めるといえる．

多項式函数 Q の超平面配置の補集合への制限 $Q : M(\mathcal{A}) \to \mathbb{C}^{\times}$ を考える．これはファイバー束になることが知られており [10]，Milnor ファイブレーションと呼ばれる．

定義 2.1. ファイバー束 $Q : M(\mathcal{A}) \to \mathbb{C}^{\times}$ のファイバーを $F_{\mathcal{A}} := Q^{-1}(1)$ とおく．これは超平面配置 $\mathcal{A}$ の Milnor ファイバーと呼ばれる．

また，Q は線形な一次式の積であり，とくに斉次多項式となる．したがって，Q は射影空間 $\mathbb{C}P^{\ell}$ 内の超平面配置 $\overline{\mathcal{A}} = \{\overline{H}_1, \cdots, \overline{H}_n\}$ を定める．ここで各 $\overline{H}_i$ は

$$\overline{H}_i = \{[x_1, \cdots, x_{\ell+1}] \in \mathbb{C}P^{\ell} \mid \alpha_i(x_1, \cdots, x_{\ell+1}) = 0\}$$

である．こうして得られる $\mathbb{C}P^{\ell}$ 内の超平面配置の補集合を $M(\overline{\mathcal{A}}) = \mathbb{C}P^{\ell} \setminus \bigcup_{i=1}^{n} \overline{H}_i$ と表す．

さて，前節のおわりに超平面配置の補集合や Milnor ファイバーのトポロジーが組み合わせ論的情報により決まるか？というのが大きな問題意識であると述べた．これについて，以下が成り立つことが知られている．

定理 2.2. (Orlik-Solomon [11]) 超平面配置の補集合 $M(\mathcal{A})$ の Betti 数 $b_k(M(\mathcal{A}))$ やコホモロジー環 $H^*(M(\mathcal{A}), \mathbb{Z})$ の構造は組み合わせ論的情報により記述される．同様のことが $M(\overline{\mathcal{A}})$ についても成り立つ．

そこで，Milnor ファイバー $F_{\mathcal{A}}$ に対しても同様のことが成り立つと考えるのは自然である．しかしながら，Milnor ファイバーについてこれは (1 次の Betti 数でさえも) 未解決である．(2022 年現在)

問題 2.3. 超平面配置の Milnor ファイバーの Betti 数 $b_k(F_{\mathcal{A}})$ やコホモロジー環 $H^*(M(\mathcal{A}), \mathbb{Z})$ は組み合わせ論的情報により記述されるか？特に 1 次 Betti 数 $b_1(F_{\mathcal{A}})$ はどうか？

これについて，関連する二つの問題が考えられていた．

(i) Papadima-Suciu により Milnor ファイバーの Betti 数 $b_k(F_{\mathcal{A}})$ を組み合わせ的に記述する公式が予想された．([14], Conjecture1.9)

(ii) Milnor ファイバーのホモロジー $H_1(F_{\mathcal{A}}, \mathbb{Z})$ はトーションを持つか？

本研究では，これらの間に密接な関係があることがわかった．詳細は次の節で述べる．

組み合わせ論的記述の観点からは，超平面配置の補集合に比べて，Milnor ファイバーを調べるのは難しいと言える．しかし Milnor ファイバーと補集合はモノドロミーについての基本的な考察をすることで，関連づけられる．

多項式 Q は斉次多項式で次数は n である．したがって，Milnor ファイバー $F_{\mathcal{A}}$ にはモノドロミーとして，巡回群 $\langle \lambda \in \mathbb{C}^{\times} \mid \lambda^n = 1 \rangle \cong \mathbb{Z}_n$ が作用する．具体的にはモノドロミー写像 $h : F \to F$ は $h(x) = \lambda \cdot x$ により与えられる．また, モノドロミー h はホモロジーの自己同型 $h_* : H_k(F) \to H_k(F)$ を誘導する．このとき，以下の命題が成り立つ．（証明や詳細な議論については例えば [3] の Section 1 などを参照）

命題 2.4. モノドロミーの作用による商空間 $F_{\mathcal{A}}/\mathbb{Z}_n$ は $M(\overline{\mathcal{A}})$ と同相になる．とくに，F は $M(\overline{\mathcal{A}})$ 上の n 次巡回被覆となる．

また，Milnor ファイバーの $\mathbb{C}$-係数のホモロジーについて，以下が成り立つ．

$$\begin{aligned} H_k(F_{\mathcal{A}}, \mathbb{C}) &\cong \bigoplus_{\lambda^n=1} H_k(F_{\mathcal{A}}, \mathbb{C})_{\lambda} \\ &\cong \bigoplus_{\lambda^n=1} H_k(M(\mathcal{A}), \mathcal{L}_{\lambda}). \end{aligned}$$

ここで，$H_k(F_{\mathcal{A}}, \mathbb{C})_{\lambda}$ はモノドロミー h_* に関する λ-固有空間，$H_k(M(\overline{\mathcal{A}}), \mathcal{L}_{\lambda})$ は各 λ に対応する $M(\overline{\mathcal{A}})$ 上の階数 1 の複素係数の局所系 $\mathcal{L}_{\lambda}$ の局所系係数ホモロジーである．

この命題から，超平面配置の補集合上の被覆空間や，局所系係数ホモロジーを研究することは Milnor ファイバーを調べる上で重要であるといえる．そこで本研究では，超平面配置の補集合の二重被覆空間や，これまで研究がほとんどなかった整係数の局所系係数ホモロジーについて研究を行った．

3 二重被覆

本節では，Papadima-Suciu により予想された公式の精密化とも言える，二重被覆空間の 2-トーションの個数に関して得られた結果を述べる．本節を通して，X を CW 複体の構造をもつ連結な位相空間とする．0 でない元 $\omega \in H^1(X, \mathbb{Z}_2)$ を一つ固定する．このとき，同型 $H^1(X, \mathbb{Z}_2) \cong \mathrm{Hom}(H_1(X, \mathbb{Z}), \mathbb{Z}_2) \cong \mathrm{Hom}(\pi_1(X), \mathbb{Z}_2)$ があるので, ω は群準同型 $\pi_1(X) \to \mathbb{Z}_2 \cong \{\pm 1\}$ を定める．$\omega \neq 0$ よりこれは全射である．この群準同型の核 $\mathrm{Ker}(\pi_1(X) \to \{\pm 1\})$ は $\pi_1(X)$ の指数 2 の部分群である．従って，ω は二重被覆 $p_{\omega} : X^{\omega} \to X$ を定める．また，$\pi_1(X) \to \{\pm 1\} \cong \mathbb{Z}^{\times} = \mathrm{Aut}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z})$ は階数 1 の $\mathbb{Z}$ 係数の局所系 $\mathcal{L}_{\omega}$ を定める．

定義 3.1. 局所系 $\mathcal{L}_{\omega}$ の k 次元の局所系係数ホモロジーの階数を $\rho_k(\omega)$ と表す．すなわち

$$\rho_k(\omega) = \mathrm{rank}_{\mathbb{Z}} H_k(X, \mathcal{L}_{\omega}) = \dim_{\mathbb{C}} H_k(X, \mathcal{L}_{\omega} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C})$$

とする．

命題 3.2. 二重被覆空間のホモロジーのモノドロミー固有分解は以下のようになる*:*

$$H_k(X^{\omega}, \mathbb{C}) \cong H_k(X, \mathbb{C}) \oplus H_k(X, \mathcal{L}_{\omega} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}).$$

特に，Betti 数について

$$b_k(X^\omega) = b_k(X) + \rho_k(\omega)$$

が成り立つ．

以後，はじめに固定した $\omega \in H^1(X, \mathbb{Z}_2)$ が $\omega \wedge \omega = 0$ を満たすと仮定する．このとき，ω をかけるという写像

$$\omega \wedge - : H^k(X, \mathbb{Z}_2) \to H^{k+1}(X, \mathbb{Z}_2)$$

はコチェイン複体 $(H^\bullet(X, \mathbb{Z}_2), \omega \wedge -)$ を誘導する．このコチェイン複体は mod 2 青本複体と呼ばれる．

定義 3.3. mod 2 青本複体の k 次のコホモロジーを $\alpha_k(\omega)$ と表す．すなわち，

$$\alpha_k(\omega) = \operatorname{rank}_{\mathbb{Z}_2} H^k(H^\bullet(X, \mathbb{Z}_2), \omega \wedge -) \text{ と定める．}$$

注意 3.4. 特に $X = M(\mathcal{A})$ が超平面配置の補集合の場合を考える．$\alpha_k(\omega)$ はコホモロジーの環構造のみを用いて定義されるので，定理 2.2 より $\alpha_k(\omega)$ は組み合わせ論的情報により記述される数であることがわかる．

Papadima-Suciu により次の不等式が示されている．

定理 3.5. (Papadima-Suciu [13])

$$\rho_k(\omega) \leq \alpha_k(\omega).$$

彼らは $X = M(\mathcal{A})$ が超平面配置の補集合であり，被覆 $F \to M(\mathcal{A})$ が超平面配置 $\mathcal{A}$（のコーニング）の Milnor ファイバーである場合には，等式 $\rho_k(\omega) = \alpha_k(\omega)$ が成り立つと予想した [14]．これが前節で述べた Papadima-Suciu により予想された公式 (の一部) である．

最近，吉永によりこの等式に対する反例が発見された [17]．$\mathcal{A}_{\mathcal{ID}} = \{H_1 \cdots, H_{15}\}$ を図 1 のような $\mathbb{C}^2$ 内の直線配置（二十・十二面体配置と呼ばれる）とする．$e_1, \cdots, e_{15} \in H^1(M(\mathcal{A}_{\mathcal{ID}}), \mathbb{Z}_2)$ を各直線のメリディアンにより定まる $H_1(M(\mathcal{A}_{\mathcal{ID}}), \mathbb{Z}_2)$ の双対基底とする．$\omega = \sum_{i=1}^{15} e_i$ とする．このとき $\rho_1(\omega) = 0$，$\alpha_1(\omega) = 1$ となる（計算の詳細は [17] の Theorem 4.3 の証明を参照)．これにより不等式

$$\rho_1(\omega) < \alpha_1(\omega)$$

が得られる．

一方で，対応する二重被覆のホモロジー $H_1(M(\mathcal{A}_{\mathcal{ID}})^\omega, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^{15} \oplus \mathbb{Z}_2$ となり，2-トーションを持つことが知られている．さらに，$\mathcal{A}_{\mathcal{ID}}$ をコーニングして得られる $\mathbb{C}^3$ 内の平面配置 $c\mathcal{A}_{\mathcal{ID}}$ の Milnor ファイバーについても $H_1(F_{c\mathcal{A}_{\mathcal{ID}}}, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^{15} \oplus \mathbb{Z}_2$ となることがわかっている．これは Milnor ファイバーのホモロジーにトーションがあらわれる初めての例である．

本研究では，上記の不等式のギャップがホモロジーの 2-トーションに由来するものであるとわかった．そのことについて述べていく．

定義 3.6. 二重被覆空間 X^ω の 2-トーション部分を

$$H_k(X^\omega, \mathbb{Z})[2] = \{a \in H_k(X^\omega, \mathbb{Z}) \mid 2a = 0\}$$

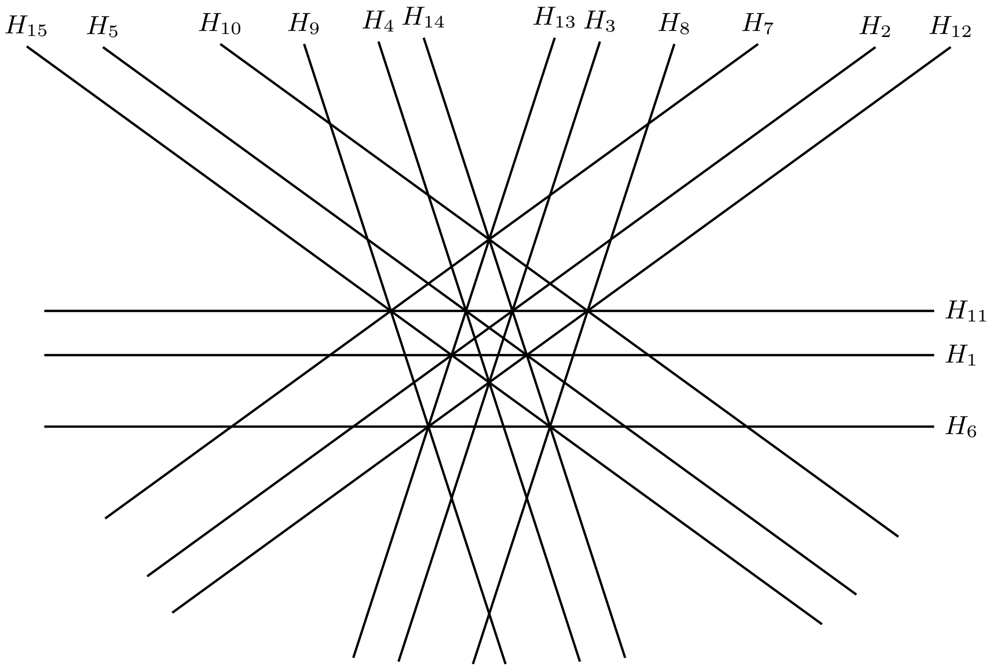

図 1　（デコーニングされた）二十・十二面体配置 $\mathcal{A}_{\mathcal{ID}} = \{H_1, \ldots, H_{15}\}$

と表す．これは $\mathbb{Z}_2$ 上のベクトル空間とみなすことができ，その階数を

$$\tau_k(X^\omega) = \mathrm{rank}_{\mathbb{Z}_2} H_k(X^\omega, \mathbb{Z})[2]$$

と表す．$\tau_k(X^\omega)$ は $H_k(X^\omega, \mathbb{Z})$ を巡回群の直和で表した際の偶数位数の直和成分の個数に他ならない．

定理 3.7. (石橋-菅原-吉永 [6]) X を連結な CW 複体とし，$\omega \in H^1(X^\omega, \mathbb{Z}_2)$ が $\omega \wedge \omega = 0$ を満たすとする．このとき，以下が成り立つ：

$$\alpha_k(\omega) = \rho_k(\omega) + \tau_k(X^\omega) + \tau_{k-1}(X^\omega).$$

特に，$\alpha_k(\omega) = \rho_k(\omega)$ が成り立つことと，$H_k(X^\omega, \mathbb{Z})$ と $H_{k-1}(X^\omega, \mathbb{Z})$ がともに 2-トーションを持たないことが同値である．

Proof. 証明は $\mathrm{rank}_{\mathbb{Z}_2} H^k(X^\omega, \mathbb{Z}_2)$ を二通りの方法で計算することで得られる．初めに，普遍係数定理を用いると以下の同型が得られる;

$$H^k(X^\omega, \mathbb{Z}_2) \cong \mathrm{Hom}(H_k(X^\omega, \mathbb{Z}).\mathbb{Z}_2) \oplus \mathrm{Ext}(H_{k-1}(X^\omega, \mathbb{Z}), \mathbb{Z}_2).$$

この右辺の階数を計算することで,

$$\mathrm{rank}_{\mathbb{Z}_2} H^k(X^\omega, \mathbb{Z}_2) = b_k(X) + \rho_k(\omega) + \tau_k(X^\omega) + \tau_{k-1}(X^\omega)$$

となることがわかる．一方，吉永 ([17]) により transfer 完全系列を用いることで以下の公式が得られている:

$$\mathrm{rank}_{\mathbb{Z}_2} H^k(X^\omega, \mathbb{Z}_2) = b_k(X) + \alpha_k(\omega).$$

これらを比較することにより，定理の等式が得られる． □

特に $k=1$ の場合には次が得られる．

系 3.8.

$$\alpha_1(\omega)=\rho_1(\omega)+\tau_1(X^\omega)$$

であり，$\alpha_1(\omega)>\rho_1(\omega)$ であることと，$H_1(X^\omega,\mathbb{Z})$ が非自明な 2-トーションを持つことは同値である．

Proof. $H_0(X^\omega,\mathbb{Z})\cong\mathbb{Z}$ であるから，常に $\tau_0(X^\omega)=0$ となることより従う． □

注意 3.9. 再び $X=M(\mathcal{A})$ が超平面配置の補集合である場合を考える．上記の系から二重被覆の Betti 数 $b_1(M(\mathcal{A})^\omega)=b_1(M(\mathcal{A}))+\alpha_1(\omega)-\tau_1(M(\mathcal{A})^\omega)$ となる．$b_1(M(\mathcal{A}))$ や $\alpha_1(\omega)$ は組み合わせ論的情報により記述されることがわかっているので，「二重被覆の Betti 数 $b_1(M(\mathcal{A})^\omega)$ が組み合わせ的に記述できるか？」という問題については，二重被覆のホモロジーの 2-トーションの個数 $\tau_1(M(\mathcal{A})^\omega)$ の組み合わせ的な記述が関わってくる．

4 整係数の局所系係数コホモロジー

本節では，最近研究が盛んになっている整係数の局所系係数コホモロジーについて述べる．局所系や局所系係数コホモロジーの一般論については，例えば [5] の第 6 章などを参照されたい．また，本節では $M=M(\mathcal{A})$ を $\mathbb{C}^\ell$ 内の超平面配置の補集合とし，整係数，複素係数のことをそれぞれ $\mathbb{Z}$-係数，$\mathbb{C}$-係数と書くことにする．

係数となる代数 $R=\mathbb{Z}$ or $\mathbb{C}$ とする．M 上の階数 1 の R-係数の局所系 $\mathcal{L}$ は特性準同型

$$\rho:\pi_1(M)\to \mathrm{Aut}_R(R)\cong R^\times$$

を定めることにより得られる．ここで $R^\times$ は単元からなる群である．$R=\mathbb{Z}$ の場合は $R^\times=\{\pm1\}$ であり，$R=\mathbb{C}$ の場合は $R^\times=\mathbb{C}^\times$ である．

超平面配置の補集合の $\mathbb{C}$-係数の局所系係数コホモロジーは，超幾何積分の文脈で盛んに研究されてきた．その中でも代表的なもの結果として，generic な局所系に対する「消滅定理」と呼ばれるものがいくつかある（[1][9][2] など）．Cohen，Dimca，Orlik により示された消滅定理は以下の通りである．

定理 4.1. (Cohen-Dimca-Orlik [2]) $\mathbb{C}^\ell$ 内の超平面配置の補集合 M 上の $\mathbb{C}$-係数の階数 1 の局所系 $\mathcal{L}$ が「CDO 条件」を満たすと仮定する．このとき，以下が成り立つ．

$$H^k(M,\mathcal{L})\cong\begin{cases}\mathbb{C}^{|\chi(M(\mathcal{A}))|} & (k=\ell),\\ 0 & (k\neq\ell).\end{cases}$$

ここで $\chi(M)$ は M の Euler 数である．

CDO 条件の定義はここでは紹介しないが，ある generic な条件である．([16] の Definition 2.1 を参照) また，超平面配置の補集合 M の Euler 数が組み合わせ的に記述できることを踏まえると，次が成り立つことがわかる．

系 4.2. M 上の $\mathbb{C}$-係数の階数 1 の局所系が CDO 条件を満たすとき，局所系係数コホモロジー $H^*(M,\mathcal{L})$ は組み合わせ的に記述することができる．

本稿で紹介するのは，CDO 条件の下での $\mathbb{Z}$-係数の局所系係数コホモロジーのふるまいである．これについて，次が成り立つことが示された．

定理 4.3. (菅原 [16]，Liu-Maxim-Wang [8]) $\mathbb{C}^\ell$ 内の超平面配置の補集合 M 上の $\mathbb{Z}$-係数の階数 1 の局所系 $\mathcal{L}$ が CDO 条件を満たすと仮定する．このとき，以下が成り立つ．

$$H^k(M(\mathcal{A}),\mathcal{L}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}^{\beta_\ell} \oplus \mathbb{Z}_2^{\beta_{\ell-1}} & (k=\ell), \\ \mathbb{Z}_2^{\beta_{k-1}} & (1 \le k \le \ell-1), \\ 0 & (\text{それ以外}). \end{cases}$$

ここで $\beta_k = |\sum_{i=0}^{k}(-1)^i \cdot b_i(M)|$ である．

この定理は初めに菅原 [16] により複素化された実超平面配置の場合に示された．[16] の方法は実構造を用いたコホモロジーの計算方法を用いることで定理を示している．後に，Liu-Maxim-Wang[8] により一般の複素超平面配置の補集合に対してこの定理が成り立つことが示された．彼らは偏屈層の理論を用いてコホモロジーを計算している．

$\beta_\ell = |\sum_{i=0}^{\ell}(-1)^i \cdot b_i(M)| = \chi(M)$ であるから，$\mathbb{C}$ をテンソルすることで，$\mathbb{C}$-係数に対する元の CDO 定理を復元することがわかる．また，超平面配置の補集合 M の Betti 数が組み合わせ的に記述できることを踏まえると，次が成り立つことがわかる．

系 4.4. M 上の $\mathbb{Z}$-係数の階数 1 の局所系が CDO 条件を満たすとき，局所系係数コホモロジー $H^*(M,\mathcal{L})$ は組み合わせ的に記述することができる．

前の節では，$\omega \in H^1(M,\mathbb{Z}_2)$ を一つ固定することで，$\mathbb{Z}$-係数の階数 1 の局所系 $\mathcal{L}_\omega$ と二重被覆 $p_\omega : M^\omega \to M$ が与えられることを見た．そこで，対応する局所系係数ホモロジー $H_k(M,\mathcal{L}_\omega)$ と二重被覆空間のホモロジー $H_k(M^\omega,\mathbb{Z})$ に関係があると推測するのは自然な発想である．これらの間に密接な関係があることが Liu-Liu により示された．特に $k=1$ の場合については以下が成り立つ．

定理 4.5. (Liu-Liu [7]) M を $\mathbb{C}^\ell$ 内の超平面配置の補集合とする．このとき，二重被覆のホモロジーと対応する局所系係数ホモロジーについて

$$H_1(M^\omega,\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^{b_1(M)+r} \oplus \mathbb{Z}_{d_1} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{d_k}$$

が成り立つことと

$$H_1(M,\mathcal{L}_\omega) \cong \mathbb{Z}^r \oplus \mathbb{Z}_{2d_1} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{2d_k} \oplus (\mathbb{Z}_2)^{b_1(M)-r-k-1}$$

が成り立つことは同値である．ここで $d_1,\cdots,d_k$ は $1 < d_1 \mid \cdots \mid d_k$ をみたす整数である．

注意 4.6. 彼らは二重被覆空間のセル複体に対する Laurent 多項式環の作用を調べることで公式を得ている．また，上記の定理は超平面配置の補集合に限らず，一般の極小 CW 複体 (= k セルの個数が k 次 Betti 数と等しくなる CW 複体) に対して成り立つことが知られている．超平面配置の補集合が極小 CW 複体とホモトピー同値になることは，Papadima-Dimca [4]，Randell [15] 等により知られている．

定理 4.3，4.5 を踏まえると次が成り立つことが直ちにわかる．

系 4.7. 超平面配置の補集合 M 上の階数 1 の $\mathbb{Z}$-局所系が CDO 条件を満たすとする．このとき，二重被覆 M^ω のホモロジーについて

$$H_1(M^\omega,\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^{b_1(M)}$$

が成り立つ．特に，$H_1(M^\omega,\mathbb{Z})$ は組み合わせ論的情報から記述することができる．

参考文献

[1] K. Aomoto, On vanishing of cohomology attached to certain many valued meromorphic functions, *J. Math. Soc. Japan*, **27** (1975), 248-255.

[2] D. Cohen, A. Dimca, P. Orlik, Nonresonance conditions for arrangements. *Ann. Inst. Fourier* **53** (2003), 1883–1896.

[3] D. C. Cohen, A. Suciu, On Milnor fibrations of arrangements. *J. London. Math. Soc.* **51** (1995), no. 2, 105-119.

[4] A. Dimca, S. Papadima, Hypersurface complements, Milnor fibers, and higher homotopy groups of arrangements. *Ann. of Math. (2)* **158** (2003), no. 2, 473–507.

[5] 服部晶夫，位相幾何学，岩波基礎数学選書

[6] S. Ishibashi, S. Sugawara, M. Yoshinaga, Betti numbers and torsions in homology groups of double coverings, Preprint, arXiv:2209.02237

[7] Y. Liu, Y. Liu, Integral homology groups of double coverings and rank one $\mathbb{Z}$-local system for minimal CW complex, preprint, arXiv:2209.14535.

[8] Y. Liu, L. Maxim, B. Wang, Chomology of $\mathbb{Z}$-local systems on complex hyperplane arrangements, preprint, arXiv:2209.13193.

[9] T. Kohno, Homology of a local system on the complement of hyperplanes, *Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.* **62** (1986), no. 4, 144-147.

[10] J. W. Milnor, Singular points in complex hypersurfaces, *Ann. of Math. Studies* **61**, Princeton University Press, 1968.

[11] P. Orlik, L. Solomon, Combinatorics and topology of complements of hyperplanes, *Invent. Math.*, **56**(2), 167-189, 1980.

[12] P. Orlik, H. Terao, Arrangements of Hyperplanes. Grundlehren Math. Wiss. **300**, Springer-Verlag, New York, 1992.

[13] S. Papadima, A. Suciu, The spectral sequence of an equivariant chain complex and homology with local coefficients. *Trans. A. M. S.*, **362** (2010), no. 5, 2685-2721.

[14] S. Papadima, A. Suciu, The Milnor fibration of a hyperplane arrangement: from modular resonance to algebraic monodromy, *Proc. London Math. Soc* **114** (2017), no. 6, 961-1004.

[15] R. Randell, Morse theory, Milnor fibers, and minimality of hyperplane arrangements. *Proc. Amer. Math. Soc.* **130** (2002), no. 9, 2737–2743.

[16] S. Sugawara, $\mathbb{Z}$-local system cohomology of hyperplane arrangements and a Cohen-Dimca-Orlik type theorem, Preprint, arXiv:2209.02237

[17] M. Yoshinaga, Double coverings of arrangement complements and 2-torsion in Milnor fiber homology, *Eur. J. Math.* **6** (2020), no. 3, 1097-1109.