不可逆的に時間発展する変分不等式の適切性について

東北大学大学院理学研究科数学専攻
佐藤光汰朗 (Kotaro SATO)

1 導入

本稿で考える問題は次の非線形発展方程式である.

$$
\begin{cases}
\partial I_{(-\infty,0]}(\partial_t z) - \Delta z + \lambda z + \sigma\gamma(z) \ni f & \text{in } \Omega\times(0,T),\\
z = 0 & \text{on } \partial_D\Omega\times(0,T),\\
\partial_\nu z = 0 & \text{on } \partial_N\Omega\times(0,T),\\
z(x,0) = z_0(x) & \text{for } x\in\Omega.
\end{cases} \tag{1.1}
$$

ここで $I_{(-\infty,0]}$ は $(-\infty,0]$ 上に台を持つ指示関数とし, $\partial I_{(-\infty,0]}$ はその劣微分作用素とする. 劣微分作用素は一般に多価であるため, 第 1 式は等式ではなく集合の包含関係によって記述されている. 方程式 (1.1) は, 次の偏微分方程式系にその出自を持つ.

$$
\begin{cases}
-\operatorname{div}\left\{(z(x,t)^2+\rho_\varepsilon)\nabla u(x,t)\right\} = f(x,t) & \text{in } \Omega\times(0,T),\\
\partial I_{(-\infty,0]}(\partial_t z(x,t)) - \varepsilon\Delta z(x,t) + \dfrac{1}{\varepsilon}(z(x,t)-1) + z(x,t)\left|\nabla u(x,t)\right|^2 \ni 0 & \text{in } \Omega\times(0,T).
\end{cases} \tag{1.2}
$$

ただし初期条件および境界条件は

$$
\begin{cases}
z(x,t) = u(x,t) = 0 & \text{on } \partial_D\Omega\times(0,T),\\
\partial_\nu z(x,t) = 0, \quad \partial_\nu u(x,t) = g(x,t) & \text{on } \partial_N\Omega\times(0,T),\\
z(x,0) = z_0(x), \quad u(x,0) = u_0(x) & \text{in } \Omega
\end{cases}
$$

で与えられるものとする. ここで $\Omega\subset\mathbb{R}^N$ は有界領域で, 滑らかな境界 $\partial\Omega$ を持つとする. また, $\partial_D\Omega, \partial_N\Omega\subset\partial\Omega$ は $\partial_D\Omega\cap\partial_N\Omega=\emptyset$, $\mathcal{H}^{N-1}(\partial\Omega\setminus(\partial_D\Omega\cup\partial_N\Omega))=0$ を満たすとする. ただし $\mathcal{H}^d$ は d 次元 Hausdorff 測度を表す. また, ν で $\partial\Omega$ における外向き単位法線ベクトルを表す. さらに, 時間微分項にかかる作用素 $\partial I_{(-\infty,0]}$ は, 指示関数 $I_{(-\infty,0]}$ の劣微分作用素として定まる多価関数である (定義は次節で述べる). 方程式系 (1.2) は, Ambrosio-Tortorelli 汎関数

$$
AT_\varepsilon(u,z) = \int_\Omega \left(z^2+\rho_\varepsilon\right)\left|\nabla u\right|^2 \mathrm{d}x + \frac{\varepsilon}{2}\int_\Omega \left|\nabla z\right|^2 \mathrm{d}x + \frac{1}{2\varepsilon}\int_\Omega (1-z)^2\,\mathrm{d}x, \quad u,z\in H^1(\Omega)
$$

(ただし $\varepsilon>0$, $\varepsilon\gg\rho_\varepsilon>0$ は定数, 以下 AT 汎関数と略記) の形式的な Euler-Lagrange 方程式として導かれる (cf. [3,4]). 一方, 方程式系 (1.2) の可解性に関して直ちに適用可能な一般論はないため,

簡単のためモデルケースとして空間 1 次元の場合を考えると, (1.2) は次のように表現できる.

$$
\begin{cases}
-\partial_x\left((z^2+\rho_\varepsilon)u_x\right)=f & \text{in } \ I\times(0,T), \\
\partial I_{(-\infty,0]}\left(\partial_t z\right)-\varepsilon z_{xx}+\varepsilon^{-1}(z-1)+z\left|u_x\right|^2\ni 0 & \text{in } \ I\times(0,T), \\
z(x,t)=h(x,t), \quad u_x(x,t)=g(x,t) & \text{on } \ \{0,1\}\times(0,T), \\
z(x,0)=z_0(x), \quad u(x,0)=u_0(x) & \text{in } \ I.
\end{cases}
\tag{1.3}
$$

ここで I は $\mathbb{R}$ 上の有界開区間とする. また z と u には, 簡単のため Dirichlet 境界条件および Neumann 境界条件をそれぞれ課す. このとき, 系 (1.3) は次のようにして, 形式的に u を消去して z に関する単独方程式に帰着させることができる. 第 1 式を $(0,x)$ で積分すると

$$
\begin{aligned}
\int_0^x f(y,t)\,\mathrm{d}y &= -\left(z(x,t)^2+\rho_\varepsilon\right)u_x(x,t)+\left(z(0,t)^2+\rho_\varepsilon\right)u_x(0,t) \\
&= -\left(z(x,t)^2+\rho_\varepsilon\right)u_x(x,t)+\left(h(t)^2+\rho_\varepsilon\right)g(0,t)
\end{aligned}
$$

を得る. これによって, u_x を z および与えられたデータを用いて

$$
|u_x(x,t)|^2=\frac{1}{(z(x,t)^2+\rho_\varepsilon)}\left\{\left(h(0,t)^2+\rho_\varepsilon\right)g(0,t)-\int_0^x f(y,t)\,\mathrm{d}y\right\}^2, \quad (x,t)\in I\times(0,T)
$$

と表すことができる. これを系 (1.3) の第 2 式に代入することで次式を得る.

$$
\partial I_{(-\infty,0]}\left(\partial_t z\right)-\varepsilon z_{xx}+\frac{1}{\varepsilon}(z-1)+\frac{z}{(z(x,t)^2+\rho_\varepsilon)}\left\{\left(h(0,t)^2+\rho_\varepsilon\right)g(0,t)-\int_0^x f(y,t)\,\mathrm{d}y\right\}^2\ni 0.
$$

ここで, $\lambda:=\varepsilon^{-2}$ として,

$$
\begin{aligned}
\sigma(x,t) &:= \left\{\left(h(0,t)^2+\rho_\varepsilon\right)g(0,t)-\int_0^x f(y,t)\,\mathrm{d}y\right\}^2 && \text{for } \ (x,t)\in I\times(0,T), \\
\gamma(s) &:= \frac{s}{\varepsilon\left(s^2+\rho_\varepsilon\right)^2} && \text{for } \ s\in\mathbb{R}, \\
f(x,t) &:= \lambda && \text{for } \ (x,t)\in I\times(0,T)
\end{aligned}
$$

とおくと

$$
\partial I_{(-\infty,0]}\left(\partial_t z\right)-z_{xx}+\lambda z+\sigma\gamma\left(z\right)\ni f \quad \text{in } \ I\times(0,T)
\tag{1.4}
$$

が導かれる. 本稿で扱う方程式 (1.1) はいわば (1.4) の N 次元版であり, さらに非線形関数 γ を一般化したものである.

方程式 (1.1) は, 大まかには二重非線形方程式に分類される. このような二重非線形型の方程式を扱った研究は数多く存在するが (cf. [5, 6, 8, 10]), 方程式 (1.1) を直接的に包含するような一般論は存在しない. 実際, 方程式 (1.1) に含まれる劣微分作用素 $\partial I_{(-\infty,0]}$ は, $s\in(-\infty,0)$ に対して 0 を含む一点集合を, $s=0$ に対して 0 以上の全ての実数を含む集合を対応させる. このように作用素 $\partial I_{(-\infty,0]}$ が $(-\infty,0)$ で退化していることは本方程式の大きな特徴であり, それによって解のアプリオリ評価を得ることが困難となるという難点を内包している. そこで本稿では, (1.1) の解の構成およびアプリオリ評価の導出に焦点を当て, その詳細を述べる (cf. Thoerem 3.2). 一方, 見方を変えれば, 方程式 (1.1) は非常に弱い放物性を持つ, すなわちある意味で楕円型方程式に近い性質を持つと考えられ, 特にある種の H^1 エネルギーが保存されるなど, 一般的には楕円型方程式において顕著な性質が成り立つことが確認できる (cf. Theorem 3.3).

2　準備

2.1　指示関数

有界もしくは非有界な区間 $K \subset \mathbb{R}$ に対して, K 上の**指示関数** (*indicator function*) $I_K : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ を次で定義する.

$$I_K(x) := \begin{cases} 0 & \text{if } \ x \in K, \\ +\infty & \text{otherwise.} \end{cases}$$

劣微分作用素について復習する. 劣微分は Fréchet 微分の一般化として位置付けられる多価関数である. 具体的には, 実 Hilbert 空間 H 上定義される汎関数 $\varphi : H \to (-\infty, +\infty]$ に対し, その**劣微分作用素** (*subdifferential operator*) $\partial\varphi : H \to 2^H$ を

$$\partial\varphi(u) = \{\, \xi \in H \colon \varphi(v) - \varphi(u) \geq (\xi, v - u)_H \ \text{ for } \ v \in D(\varphi) \,\}$$

で定義される集合値関数とする. なお, $D(\varphi) = \{\, x \in H \colon \varphi(x) \neq +\infty \,\}$ は φ の有効領域とし, $\partial\varphi$ の定義域を

$$D(\partial\varphi) = \{\, u \in D(\varphi) \colon \partial\varphi(u) \neq \emptyset \,\}$$

で定める. 適正凸下半連続汎関数 φ の劣微分 $\partial\varphi$ が極大単調作用素となることはよく知られている.

2.2　楕円型正則性

本稿では, 混合境界条件を考慮に入れる. その際, いわゆる楕円型正則性条件の取り扱いが繊細となることに注意する (cf. [9]). 具体的には, まず境界 $\partial\Omega$ に対して, 部分集合 $\partial_D\Omega, \partial_N\Omega \subset \partial\Omega$ を $\partial_D\Omega \cap \partial_N\Omega = \emptyset$, $\mathcal{H}^{N-1}(\partial\Omega \setminus (\partial_D\Omega \cup \partial_N\Omega)) = 0$ を満たすものとする. また, 部分空間 $V \subset H^1(\Omega)$ を $V := \{\, v \in H^1(\Omega) \colon v = 0 \ \ \mathcal{H}^{N-1}\text{-a.e. on } \ \partial_D\Omega \,\}$ で定める. 作用素 $B : V \to V^*$ を

$$\langle Bu, v \rangle_V := \int_\Omega (\nabla u \cdot \nabla v + uv)\, \mathrm{d}x \qquad \text{for} \ \ u, v \in V$$

で定めると, B は V から V^* への全単射となり, したがって逆写像 $B^{-1} : V^* \to V$ が定義できる.

本稿を通して, 特に断りのない限り常に

$$B^{-1}\varphi \in H^2(\Omega) \qquad \text{for} \ \ \varphi \in L^2(\Omega) \tag{2.1}$$

を仮定する. 条件 (2.1) はしばしば楕円型正則性と呼ばれる. これは十分滑らかな境界を持つ領域において, Dirichlet 境界条件を課す場合 ($\partial_N\Omega = \emptyset$) または Neumann 境界条件を課す場合 ($\partial_D\Omega = \emptyset$) に成り立つことがよく知られているが, 両条件が混在した問題を考える場合は状況がやや複雑である. 本稿では, 問題 (1.1) の物理的応用を視野に入れて混合境界条件を考慮に入れるため, 楕円型正則性条件 (2.1) をあらかじめ仮定しておく.

3　主定理

有界領域 $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ とその境界の部分集合 $\partial_D\Omega$, $\partial_N\Omega \subset \partial\Omega$ は第 2 節で述べたものとする．L^2-空間の部分空間 V, X を以下で定める．

$$V := \{ u \in H^1(\Omega) \colon u = 0 \ \ \mathcal{H}^{N-1}\text{-a.e. on } \partial_D\Omega \},$$
$$X := \{ u \in H^2(\Omega) \colon \partial_\nu u = 0 \ \ \mathcal{H}^{N-1}\text{-a.e. on } \partial_N\Omega \}.$$

ここで ν は $\partial\Omega$ の外向き単位法線ベクトルを表し, ∂_ν は勾配の ν 方向成分を表すとする (V と X は正確にはトレース作用素を用いて定式化される)．各空間において H^1 ノルムおよび H^2 ノルムをそれぞれ $\|\cdot\|_V$, $\|\cdot\|_X$ とも書く．さらに, $f, g \in V^*$ に対し

$$\langle f, v \rangle_V \le \langle g, v \rangle_V \quad \text{for any} \ \ v \in V \ \ \text{s.t.} \ v \ge 0 \ \ \text{a.e. in} \ \ \Omega$$

が成り立つとき, $f \le g$ in V^* と書く．また, 本稿では, $\Omega \times (0,T)$ 上定義された関数に対してしばしば $z(t) := z(\cdot, t) : \Omega \to \mathbb{R}$, $t \in (0,T)$ などと書く．

以下, λ は正定数とし, $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は Lipschitz 連続な関数とする．また, $f, \sigma : \Omega \times (0,T) \to \mathbb{R}$, $z_0 : \Omega \to \mathbb{R}$ はそれぞれ与えられたデータとする．本稿の主結果は, 十分な正則性を持つ空間における (1.1) の強解の存在に関するもの (Theorem 3.2) とその強解の定性的性質 (Theorem 3.3) である．主結果の主張を述べる前に, (1.1) の強解の意味を明らかにする．実数 p, q に対して $q \in \partial I_{(-\infty,0]}(p)$ が成り立つことと $p \le 0$, $q \ge 0$ および $pq = 0$ が同時に成り立つことは同値であることに注意して, (1.1) の強解の意味を次で定める．

Definition 3.1. 関数 $z \in C([0,T]; L^2(\Omega))$ が (1.1) の**強解** (*strong solution*) であるとは, 以下の (i)–(iv) が成り立つことをいう．

(i) $z \in W^{1,2}(0,T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T; X \cap V)$;
(ii) $\partial_t z \le 0$, $-\Delta z + \lambda z + \sigma\gamma(z) \le f$ 　a.e. in $\Omega \times (0,T)$;
(iii) $\partial_t z \, (-\Delta z + \lambda z + \sigma\gamma(z) - f) = 0$ 　a.e. in $\Omega \times (0,T)$;
(iv) $z(x,0) = z_0(x)$ 　for a.e. $x \in \Omega$.

以下に問題 (1.1) の解の存在に関する主定理を述べる．なお, 特に断りがない限り, 楕円型正則性条件 (2.1) の成立を常に仮定するものとする．

Theorem 3.2. 正定数 $\lambda > 0$, 与えられた関数 $z_0 \in X \cap V$, $f \in L^2(0,T; L^2(\Omega)) \cap W^{1,2}(0,T; V^*)$, $\sigma \in L^\infty(\Omega \times (0,T)) \cap W^{1,2}(0,T; L^{N/2}(\Omega))$ および $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は以下を満たすとする．

(i) ある関数 $\tilde{f} \in L^2(\Omega)$ が存在し, $f \ge \tilde{f}$ a.e. in $\Omega \times (0,T)$ を満たす．
(ii) 定数 $L \ge 0$ が存在し, 関数 $s \mapsto \gamma(s) + Ls$ は単調増加かつ $L\|\sigma\|_{L^\infty(\Omega\times(0,T))} < \lambda$ が成り立つ．
(iii) 定数 $C \ge 0$ が存在し, 任意の $s \in \mathbb{R}$ に対して $|\gamma(s)| \le C(|s| + 1)$ が成り立つ．
(iv) $-\Delta z_0 + \lambda z_0 + \sigma(\cdot,0)\gamma(z_0) \le f(\cdot,0)$ in V^* が成り立つ．

このとき, (1.1) の強解 $z = z(x,t) \in W^{1,2}(0,T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T; X \cap V)$ で, さらに $z \in$

$W^{1,2}(0,T;V)$ を満たすものが存在する.

また, 汎関数 $E : V \times [0,T] \to \mathbb{R}$ を

$$E(u,t) := \frac{1}{2}\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{\lambda}{2}\|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \int_\Omega \sigma(t)\hat{\gamma}(u)\,\mathrm{d}x - \langle f(t), u\rangle_V, \quad u \in V,\ t \in [0,T]$$

で定める. ただし $\hat{\gamma}$ は γ の原始関数とする.

Theorem 3.3. 関数 $f, \sigma : \Omega \times (0,T) \to \mathbb{R}$, $z_0 : \Omega \to \mathbb{R}$ および $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は Theorem 3.2 の仮定を満たすとし, $z \in W^{1,2}(0,T;L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T;X \cap V)$ を (1.1) の強解とする. このとき, 次の (i)–(iii) が成り立つ.

(i) $\partial_t z \le 0$ a.e. in $\Omega \times (0,T)$.

(ii) 任意の $v \in V$ に対して, $v \le z(t) \Rightarrow E(z(t),t) \le E(v,t)$ for a.e. $t \in (0,T)$.

(iii) 写像 $t \mapsto E(z(t),t)$ は $[0,T]$ 上絶対連続であって,

$$E(z(t),t) - E(z(s),s) = \int_s^t \int_\Omega \partial_t \sigma(r)\hat{\gamma}(z(r))\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}r - \int_s^t \langle \partial_t f(r), z(r)\rangle_V\,\mathrm{d}r \quad \text{for } s,t \in [0,T]$$

が成り立つ.

4 時間離散問題

本節では, Theorem 3.2 の証明のための準備について説明する. Theorem 3.2 の証明はいわゆる minimizing movement scheme に基づく. すなわち, 区間 $[0,T]$ を有限個の小区間に分け, 各時間ステップにおける (静的) 障害物問題の解を繋ぎ合わせることで問題 (1.1) の解を構成する.

区間 $(0,T)$ を m 等分し, その 1 区間の幅を τ とする. すなわち, 自然数 $m \in \mathbb{N}$ に対し $\tau := T/m$ とおく. また, 各 $k = 0,1,\ldots,m$ に対し $t_k := k\tau$ とおく. これによって, 関数の族 $\{f_k\}_{k=0,\ldots,m}$, $\{\sigma_k\}_{k=0,\ldots,m}$ を

$$f_k := \frac{1}{\tau}\int_{t_{k-1}}^{t_k} f(\cdot,s)\,\mathrm{d}s \in L^2(\Omega) \quad \text{for } k = 1,2,\ldots,m, \tag{4.1}$$

$$\sigma_k := \frac{1}{\tau}\int_{t_{k-1}}^{t_k} \sigma(\cdot,s)\,\mathrm{d}s \in L^N(\Omega) \quad \text{for } k = 1,2,\ldots,m, \tag{4.2}$$

および $f_0 := f(\cdot,0) \in V^*$, $\sigma_0 := \sigma(\cdot,0) \in L^{N/2}(\Omega)$ によって定め, 定常障害物問題

$$\begin{cases} \partial I_{(-\infty,0]}(z_k - z_{k-1}) - \Delta z_k + \lambda z_k + \sigma_k \gamma(z_k) \ni f_k & \text{in } \Omega, \\ z_k = 0 & \text{on } \partial_D \Omega, \\ \partial_\nu z_k = 0 & \text{on } \partial_N \Omega \end{cases} \tag{4.3}$$

を考える. このとき, 次が成り立つ.

Theorem 4.1. Theorem 3.2 と同じ仮定の下で, 各 $k = 1,\ldots,m$ に対し (4.3) の強解 $z_k \in X \cap V$ が一意に存在する.

Proof. 例えば [1,2] などを参照. □

5　Theorem 3.2 の証明

この節では Theorem 3.2 の証明について, その一部を簡潔に述べる. 時間離散化された定常障害物問題 (4.3) の解を z_k とする. (4.1), (4.2) によって定まる f_k, σ_k に対して, その区分的線形補間 f_τ, σ_τ と 区分的定数補間 $\overline{f}_\tau$, $\overline{\sigma}_\tau$ をそれぞれ

$$
\begin{aligned}
f_\tau(x,t) &:= f_{k-1}(x) + \frac{t-t_{k-1}}{\tau}\left(f_k(x) - f_{k-1}(x)\right),\\
f_\tau(0) &:= f_0 \in V^*,\\
\sigma_\tau(x,t) &:= \sigma_{k-1}(x) + \frac{t-t_{k-1}}{\tau}\left(\sigma_k(x) - \sigma_{k-1}(x)\right),\\
\sigma_\tau(x,0) &:= \sigma_0(x),
\end{aligned}
$$

および

$$
\overline{f}_\tau(x,t) := f_k(x), \quad \overline{\sigma}_\tau(x,t) := \sigma_k(x),
$$

$x \in \Omega$, $t_{k-1} < t \le t_k$, $k = 1,\dots,m$ によって定める. このとき $f_\tau \in L^2(0,T;L^2(\Omega)) \cap W^{1,2}(0,T;V^*)$, $\sigma_\tau \in W^{1,2}(0,T;L^N(\Omega))$ が成り立つ. また, z についても同様に

$$
\begin{aligned}
z_\tau(x,t) &:= z_{k-1}(x) + \frac{t-t_{k-1}}{\tau}\left(z_k(x) - z_{k-1}(x)\right),\\
\overline{z}_\tau(x,t) &:= z_k(x),
\end{aligned}
$$

$x \in \Omega$, $t_{k-1} < t \le t_k$, $k = 1,\dots,m$ と定める. このとき $z_\tau \in W^{1,2}(0,T;X\cap V)$ および $\overline{z}_\tau \in L^\infty(0,T;X\cap V)$ が成り立つことに注意する. 以下, (z_τ) および $(\overline{z}_\tau)$ についての各種アプリオリ評価を準備する. まず, (z_τ) の V での有界性について述べる.

Lemma 5.1. 定数 $C>0$ が τ と独立に存在して, $\|\overline{z}_\tau\|_{L^\infty(0,T;V)} \le C$ を満たす.

Proof. 各 $k = 1,\dots,m$ に対して $\eta_k := \Delta z_k - \lambda z_k - \sigma_k\gamma(z_k) + f_k \in L^2(\Omega)$ とおく. また, $k=0$ に対して $\eta_0 := \Delta z_0 - \sigma(0)\gamma(z_0) + f(0) \in V^*$ とおく. 関数 η_k に $z_k - z_{k-1}$ をテストすると

$$
\begin{aligned}
&\int_\Omega \eta_k\left(z_k - z_{k-1}\right)\mathrm{d}x + \int_\Omega \nabla z_k\cdot\nabla\left(z_k - z_{k-1}\right)\mathrm{d}x + \lambda\int_\Omega z_k\left(z_k - z_{k-1}\right)\mathrm{d}x\\
&\qquad + \int_\Omega \sigma_k\gamma(z_k)\left(z_k - z_{k-1}\right)\mathrm{d}x = \int_\Omega f_k\left(z_k - z_{k-1}\right)\mathrm{d}x
\end{aligned}
\tag{5.1}
$$

を得る. 左辺第一項の値は 0 である (実際, $\eta_k \in \partial I_{(-\infty,0]}(z_k - z_{k-1})$ より従う). ここで Theorem 3.2 の仮定 (ii) より, ある $\varepsilon > 0$ が存在して $(L+\varepsilon)\sigma \le \lambda$ a.e. in $\Omega\times(0,T)$ かつ $(L+\varepsilon)\sigma \not\equiv \lambda$ が成り立つ. これに対して $\tilde{L} := L+\varepsilon$, $\beta_\varepsilon(s) := \tilde{L}s + \gamma(s)$ for $s\in\mathbb{R}$ とし, $\hat{\beta}_\varepsilon$ を β_ε の原始関数とすると, $0 \le \lambda - \tilde{L}\sigma_k$ a.e. in Ω に注意して, (5.1) と Young の不等式より

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\left(\|\nabla z_k\|^2_{L^2(\Omega)} + \int_\Omega (\lambda - \tilde{L}\sigma_k)\left|z_k\right|^2\mathrm{d}x\right)\\
&\qquad - \frac{1}{2}\left(\|\nabla z_{k-1}\|^2_{L^2(\Omega)} + \int_\Omega (\lambda - \tilde{L}\sigma_{k-1})\left|z_{k-1}\right|^2\mathrm{d}x\right)\\
&\qquad + \int_\Omega \sigma_k\beta_\varepsilon(z_k)\left(z_k - z_{k-1}\right)\mathrm{d}x - \int_\Omega f_k z_k\,\mathrm{d}x + \int_\Omega f_{k-1}z_{k-1}\,\mathrm{d}x\\
&\le -\left\langle f_k - f_{k-1}, z_{k-1}\right\rangle_V - \frac{\tilde{L}}{2}\int_\Omega \left(\sigma_k - \sigma_{k-1}\right)\left|z_{k-1}\right|^2\mathrm{d}x
\end{aligned}
\tag{5.2}
$$

が成り立つ．さらに, $\hat{\beta}_\varepsilon$ は凸だから

$$
\begin{aligned}
&\int_\Omega \sigma_k \beta_\varepsilon(z_k)\,(z_k - z_{k-1})\,\mathrm{d}x \\
&\qquad \geq \int_\Omega \sigma_k \left(\hat{\beta}_\varepsilon(z_k) - \hat{\beta}_\varepsilon(z_{k-1})\right) \mathrm{d}x \\
&\qquad = \int_\Omega \left(\sigma_k \hat{\beta}_\varepsilon(z_k) - \sigma_{k-1}\hat{\beta}_\varepsilon(z_{k-1})\right) \mathrm{d}x - \int_\Omega (\sigma_k - \sigma_{k-1})\,\hat{\beta}_\varepsilon(z_{k-1})\,\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

が成り立つ．したがって, (5.2) の両辺を k に関して足し合わせると,

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\left(\|\nabla z_k\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_\Omega (\lambda - \tilde{L}\sigma_k)\,|z_k|^2\,\mathrm{d}x\right) + \int_\Omega \sigma_k \hat{\beta}_\varepsilon(z_k)\,\mathrm{d}x - \int_\Omega f_k z_k\,\mathrm{d}x \\
&\quad \leq \frac{1}{2}\left(\|\nabla z_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_\Omega (\lambda - \tilde{L}\sigma_0)\,|z_0|^2\,\mathrm{d}x\right) + \int_\Omega \sigma_0 \hat{\beta}_\varepsilon(z_0)\,\mathrm{d}x - \langle f_0, z_0\rangle_V \\
&\quad\quad - \tau \sum_{l=1}^{k} \Bigg\{ \left\langle \frac{f_l - f_{l-1}}{\tau}, z_{l-1} \right\rangle_V + \frac{\tilde{L}}{2}\int_\Omega \frac{\sigma_l - \sigma_{l-1}}{\tau}\,|z_{l-1}|^2\,\mathrm{d}x \\
&\quad\quad - \int_\Omega \frac{\sigma_l - \sigma_{l-1}}{\tau}\,\hat{\beta}_\varepsilon(z_{l-1})\,\mathrm{d}x \Bigg\},
\end{aligned}
$$

for $k = 1, \ldots, m$ が成り立つ．ここで $\hat{\beta}_\varepsilon(s) = \hat{\gamma}(s) + (L+\varepsilon)s^2/2$ であり, 仮定より $\hat{\gamma}(s) + Ls^2/2$ は凸であることに注意すると, ある定数 $C > 0$ が存在して

$$
C\left(s^2 - 1\right) \leq \hat{\beta}_\varepsilon(s) \quad \text{for} \quad s \in \mathbb{R}
$$

とできる．したがって, Theorem 3.2 の仮定 (iii) より

$$
\begin{aligned}
\|z_k\|_V^2 &\leq C\Bigg\{ 1 + \|z_0\|_V^2 + \|f_k\|_{V^*}^2 + \|f_0\|_{V^*}^2 \\
&\quad + \tau \sum_{l=1}^{k} \left(\left\| \frac{f_l - f_{l-1}}{\tau} \right\|_{V^*} \|z_{l-1}\|_V + \left\| \frac{\sigma_l - \sigma_{l-1}}{\tau} \right\|_{L^{N/2}(\Omega)} \|z_{l-1}\|_V^2 \right) \Bigg\} \\
&\leq C\Bigg\{ 1 + \|z_0\|_V^2 + \sup_{t\in[0,T]} \|f(t)\|_{V^*}^2 \\
&\quad + \tau \sum_{l=1}^{k} \left\| \frac{f_l - f_{l-1}}{\tau} \right\|_{V^*}^2 + \sum_{l=1}^{k} \left(\tau \left\| \frac{\sigma_l - \sigma_{l-1}}{\tau} \right\|_{L^{N/2}(\Omega)} + 1 \right) \|z_{l-1}\|_V^2 \Bigg\}
\end{aligned}
\tag{5.3}
$$

が成り立つ．ここで $f \in W^{1,2}(0,T;V^*)$ を用いた．さらに, $\{f_k\}$, $\{\sigma_k\}$ の定め方より

$$
\tau \sum_{k=1}^{m} \left\| \frac{f_k - f_{k-1}}{\tau} \right\|_{V^*}^2 \leq C\,\|\partial_t f\|_{L^2(0,T;V^*)}^2, \quad \tau \sum_{k=1}^{m} \left\| \frac{\sigma_k - \sigma_{k-1}}{\tau} \right\|_{L^{N/2}(\Omega)} \leq C\,\|\partial_t \sigma\|_{L^2(0,T;L^{N/2}(\Omega))}
$$

である．したがって, 式 (5.3) に Gronwall の不等式 (の離散版, cf. [7]) を適用して,

$$
\begin{aligned}
\|z_k\|_V^2 &\leq C\left(1 + \|z_0\|_V^2 + \sup_{t\in[0,T]} \|f(t)\|_{V^*}^2 + \|\partial_t f\|_{L^2(0,T;V^*)}^2 \right) \exp\left(\tau \sum_{l=1}^{k} \left\| \frac{\sigma_l - \sigma_{l-1}}{\tau} \right\|_{L^{N/2}(\Omega)} + 1 \right) \\
&\leq C\left(1 + \|z_0\|_V^2 + \sup_{t\in[0,T]} \|f(t)\|_{V^*}^2 + \|\partial_t f\|_{L^2(0,T;V^*)}^2 \right) \exp\left(\|\partial_t \sigma\|_{L^1(0,T;L^{N/2}(\Omega))} + 1 \right)
\end{aligned}
$$

for $k = 1, 2, \ldots, m$ が成り立つ．よって結論が従う． □

これを用いて $(\partial_t z_\tau)$ の V ノルムおよび $(\overline{z}_\tau)$ の X ノルムに関する次の評価を得るが, 紙面の都合によりそれらの証明は省略する.

Lemma 5.2. 定数 $C>0$ が τ および T とは独立に存在して, 次を満たす.

$$\|\partial_t z_\tau(t)\|_V^2 \le C\left(\|\partial_t \sigma_\tau(t)\|_{L^{N/2}(\Omega)}^2 + \|\partial_t f_\tau(t)\|_{V^*}^2\right) \quad \text{for a.e. } t\in(0,T) \ \text{ and all } \ \tau>0. \tag{5.4}$$

Lemma 5.3. 定数 τ に依存しない定数 $C>0$ が存在して,

$$\tau\sum_{k=1}^m \|z_k\|_X^2 \le C\tau\sum_{k=1}^m\left(\|z_k\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|f_k\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\sigma_k\|_{L^{N/2}(\Omega)}^2 + \|g\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|z_0\|_X^2\right).$$

不等式 (5.4) の証明に代えて, その難点をかいつまんで説明する. 拡散方程式のように $\partial_t z$ を陽に含む方程式に対しエネルギー法を用いて $\partial_t z$ の H^1 ノルム評価を得たいならば, 例えばテスト関数として $\partial_t z$ を選ぶのが一般的である. しかし方程式 (1.1) では時間微分項に非線形作用素 $\partial I_{(-\infty,0]}$ が作用しており, さらにそれは次の意味で退化している: $u,\ v\in L^2(\Omega)$ に対して $v\in\partial I_{(-\infty,0]}(u)$ in $L^2(\Omega)$ が成り立っているならば, $uv=0$ a.e. in Ω, 特に $(u,v)_{L^2(\Omega)}=\int_\Omega uv\,\mathrm{d}x=0$. そのため方程式に $\partial_t z$ をテストしたとしても, $\partial_t z$ が方程式から消えてしまい, 我々が求めている評価を得ることができない. そこで方程式の代わりに, 方程式を時間微分したものに $\partial_t z$ をテストする操作を考える. 前節で定式化した (1.1) の時間離散化 (4.3) はこの操作を正当化するための一つの手段であり, またこれにより形式計算では到達し得ない非線形項の精密な評価が得られる.

最後に (z_τ) の相対コンパクト性を示す. これにより強収束部分列を抜き出すことができるようになる. 証明はいわゆる Ascoli-Arzelá の定理による.

Lemma 5.4. 集合 (z_τ) は $C([0,T];V)$ 上プレコンパクトである.

Proof. 初めに (z_τ) の $C([0,T];V)$ 上での同程度連続性をいう. Lemma 5.2 により, 各 $t,s\in[0,T]$ に対して

$$\|z_\tau(t)-z_\tau(s)\|_V \le \int_s^t \|\partial_t z_\tau(r)\|_V\,\mathrm{d}r \le |t-s|^{1/2}\,\|\partial_t z_\tau\|_{L^2(0,T;V)} \le C\,|t-s|^{1/2}$$

が成り立つ. よって (z_τ) は $C([0,T];V)$ 上同程度連続である. さらに, (z_τ) は $L^2(0,T;X)$ 上有界である. 実際,

$$\|\Delta z_\tau(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \le \frac{t_k-t}{\tau}\|\Delta z_{k-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{t-t_{k-1}}{\tau}\|\Delta z_k\|_{L^2(\Omega)}^2 \quad \text{for a.e. } t\in(t_{k-1},t_k)$$

が $k=1,\dots,m$ で成り立ち, これにより

$$\int_{t_{k-1}}^{t_k}\|\Delta z_\tau(t)\|_{L^2(\Omega)}^2\,\mathrm{d}t \le \frac{\tau}{2}\|\Delta z_{k-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\tau}{2}\|\Delta z_k\|_{L^2(\Omega)}^2$$

が成り立つ．したがって

$$
\begin{aligned}
\int_0^T \|\Delta z_\tau(t)\|^2_{L^2(\Omega)}\,\mathrm{d}t &= \sum_{k=1}^m \int_{t_{k-1}}^{t_k} \|\Delta z_\tau(t)\|^2_{L^2(\Omega)}\,\mathrm{d}t \\
&\le \frac{\tau}{2}\sum_{k=1}^m \|\Delta z_{k-1}\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{\tau}{2}\sum_{k=1}^m \|\Delta z_k\|^2_{L^2(\Omega)} \\
&\le \frac{\tau}{2}\|\Delta z_0\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\Delta \overline{z}_\tau\|^2_X
\end{aligned}
$$

であり, Lemma 5.3 により $(\overline{z}_\tau)$ は $L^2(0,T;X)$ 上有界であるから, (z_τ) は $L^2(0,T;X)$ 上有界である．ここで X は V にコンパクトに埋め込まれるから, [11, Theorem 3] を用いると (z_τ) は $C([0,T];V)$ 上プレコンパクトである． □

上記の Lemma 5.2 – 5.4 により, (z_τ) と $(\overline{z}_\tau)$ は弱収束部分列を持つことが分かる．正確には, 部分列 $(\tau') \subset (\tau)$ と関数 $z \in W^{1,2}(0,T;V) \cap L^2(0,T;X)$ が存在して,

$$
\begin{aligned}
z_{\tau'} \to z &\quad \text{weakly in } \ W^{1,2}(0,T;V), \\
&\quad \text{strongly in } \ C([0,T];V), \\
\overline{z}_{\tau'} \to z &\quad \text{weakly in } \ L^2(0,T;X)
\end{aligned}
$$

を満たす．以下, 部分列 (τ') を改めて (τ) と書くことにする．

最後に, 弱極限 z が方程式 (1.1) の解であることを確かめる．証明の方針はいわゆる Minty's trick の応用である．

Lemma 5.5. 極限 z は (1.1) の強解である．

Proof. 証明は [2] などを参照． □

以上で Theorem 3.2 の証明が完了する．

6　解の定性的性質

本節では問題 (1.1) の解の満たす定性的性質について述べた Theorem 3.3 を証明する．

Proof of Theorem 3.3. 関数 $z = z(x,t)$ を (1.1) の強解とする．不可逆性 (i) は, z が (1.1) の解であることから直ちに従う．以下, (ii) と (iii) が成り立つことをいう．関数 z について,

$$
-\Delta z(t) + \lambda z(t) + \sigma(t) z(t) - f(t) \le 0 \quad \text{a.e. in } \ \Omega \tag{6.1}
$$

がほとんどすべての $t \in [0,T]$ について成り立つ．実数 $s \in \mathbb{R}$ に対して $\beta(s) = \gamma(s) + Ls$ とおく．ただし $L > 0$ は Theorem 3.2 の仮定に現れる定数とする．このとき, ほとんどすべての $t \in [0,T]$

と $v \leq z(t)$ a.e. in Ω を満たす関数 $v \in V$ に対して, (6.1) より

$$
\begin{aligned}
0 &\leq \int_\Omega \left(-\Delta z(t) + \lambda z(t) + \sigma(t)\gamma(z(t)) - f(t)\right)(v - z(t))\,\mathrm{d}x \\
&= \int_\Omega \left(-\Delta z(t) + (\lambda - L\sigma(t))z(t) + \sigma(t)\beta(z(t)) - f(t)\right)(v - z(t))\,\mathrm{d}x \\
&\leq \frac{1}{2}\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}^2 - \frac{1}{2}\|\nabla z(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2}\int_\Omega (\lambda - L\sigma(t))\,|v|^2\,\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int_\Omega (\lambda - L\sigma(t))\,|z(t)|^2\,\mathrm{d}x \\
&\quad + \int_\Omega \sigma(t)\big(\hat{\beta}(v) - \hat{\beta}(z(t))\big)\,\mathrm{d}x - \langle f(t), v\rangle_V + \langle f(t), z(t)\rangle_V \\
&= E(v,t) - E(z(t),t)
\end{aligned}
$$

が成り立つ. ここで $s \mapsto \beta(s)$ は単調であることと, $\lambda - L\sigma \geq 0$ a.e. in $\Omega \times (0,T)$ であることを使った. また, $t \mapsto E(z(t),t)$ は $[0,T]$ 上連続 (実際は絶対連続まで分かる) であるから, (ii) が従う.

(iii) について, 関数 $t \mapsto E(z(t),t)$ を t で微分すると, 連鎖率により

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E(z(t),t) &= \int_\Omega \left(-\Delta z(t) + \lambda z(t) + \sigma(t)\gamma(z(t)) - f(t)\right)\partial_t z(t)\,\mathrm{d}x \\
&\quad + \int_\Omega \partial_t\sigma(t)\hat{\gamma}(z(t))\,\mathrm{d}x - \langle \partial_t f(t), z(t)\rangle_V \\
&= \int_\Omega \partial_t\sigma(t)\hat{\gamma}(z(t))\,\mathrm{d}x - \langle \partial_t f(t), z(t)\rangle_V \qquad \text{for a.e. } t \in (0,T)
\end{aligned}
$$

が成り立つ. したがって, 任意の $s, t \in [0,T]$ に対して

$$
E\left(z(t),t\right) - E\left(z(s),s\right) = \int_s^t \int_\Omega \partial_t\sigma(r)\hat{\gamma}(z(r))\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}r - \int_s^t \langle \partial_t f(r), z(r)\rangle_V\,\mathrm{d}r
$$

が成り立つ. □

参考文献

[1] G. Akagi and M. Kimura, Unidirectional evolution equations of diffusion type, J. Differential Equations **266** (2019), no. 1, 1–43.

[2] G. Akagi and K. Sato, Evolution equations with complete irreversibility and energy conservation, submitted.

[3] L. Ambrosio and V.M. Tortorelli, Approximation of functionals depending on jumps by elliptic functionals via Γ-convergence, Comm. Pure Appl. Math. **43** (1990), no. 8, 999–1036.

[4] L. Ambrosio and V. M. Tortorelli, On the approximation of free discontinuity problems, Boll. Un. Mat. Ital. B (7) **6** (1992), no. 1, 105–123.

[5] T. Arai, On the existence of the solution for $\partial\varphi(u'(t)) + \partial\psi(u(t)) \ni f(t)$, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo sec. IA Math. **26** (1979), 75–96.

[6] V. Barbu, Existence theorems for a class of two point boundary problems, J. Differential Equations **17** (1975), 236–257.

[7] D.S. Clark, Short proof of a discrete Gronwall inequality, Discrete Appl. Math. **16** (1987), no. 3, 279–281.

[8] P. Colli and A. Visintin, On a class of doubly nonlinear evolution equations, Comm. Partial Differential Equations **15** (1990), no. 5, 737–756.

[9] P. Grisvard, *Elliptic problems in nonsmooth domains*, Monographs and Studies in Mathematics, vol. 24, Pitman (Advanced Publishing Program), Boston, MA, 1985.

[10] T. Senba, On some nonlinear evolution equation, Funkcial. Ekvac. **29** (1986), no. 3, 243–257.

[11] J. Simon, Compact sets in the space $L^p(0,T;B)$, Ann. Mat. Pura Appl. (4) **146** (1987), 65–96.