# 次元が負の場合の曲率次元条件の集中位相での安定性について

東北大学大学院 理学研究科 数学専攻
大島 駿 (Shun OSHIMA)

## 1 導入

$n$ 次元重み付きリーマン多様体 $(M^n, g, e^{-f}\,\mathrm{vol}_g)$ と $N \in (n, \infty]$ に対し, 重み付き Ricci 曲率 $\mathrm{Ric}_N$ が

$$\mathrm{Ric}(v,v) := \mathrm{Ric}_g(v,v) + \mathrm{Hess}\, f(v,v) - \frac{g(\nabla f(x), v)^2}{N-n} \qquad (v \in T_x M^n)$$

と定義されている. ($N = \infty$ のときは, 第 3 項を 0 として扱う) このとき, この $\mathrm{Ric}_N$ が

$$\mathrm{Ric}_N \geq Kg$$

を満たすという条件を曲率次元条件 ($\mathrm{CD}(K,N)$ 条件, $K \in \mathbb{R}$, $N \in (1,\infty]$) といい, リーマン多様体においては "Ricci 曲率が $K$ 以上かつ, 次元が $N$ 以下である" ということと同値である. この曲率次元条件を満たす重み付きリーマン多様体はよく研究されており, 近年は $\mathrm{Ric}_N$ の定義を $N < 0$ の場合にも考えることで, 曲率次元条件を $N < 0$ の場合に拡張したものも扱われている. 測度距離空間は測度空間の構造を持った距離空間であり, リーマン計量から定まる距離 (リーマン距離) と体積測度を持つリーマン多様体の一般化として定義された. そして, この $\mathrm{CD}(K,N)$ 条件を測度距離空間上に定式化したものが Lott-Villani [4] と Sturm [10], [11] らによりそれぞれ独立に与えられ, さらに, 太田 [7] により $N < 0$ の場合も定式化がなされた. この条件を満たす測度距離空間を $\mathrm{CD}(K,N)$ 空間といい, $\mathrm{CD}(K,N)$ 空間は Ricci 曲率が $K$ 以上かつ, 次元が $N$ 以下のリーマン多様体の性質を多く引き継いでいることが知られている.

$\mathrm{CD}(K,N)$ 空間の研究において重要な命題の一つに "$\mathrm{CD}(K,N)$ 空間の列がある測度距離空間に収束したとき, その極限も $\mathrm{CD}(K,N)$ 空間であるか" というものがあり, このような命題を "$\mathrm{CD}(K,N)$ 条件の安定性" と呼ぶ. ここでいう測度距離空間の収束は, 現在色々な種類が知られており, 例えば以下のようなものがある.

(1) 点付き測度付き Gromov-Hausdorff 収束 (pmGH 収束)
(2) 点付き測度付き Gromov 収束 (pmG 収束)
(3) Sturm の $\mathbb{D}$-収束
(4) $\square$ 収束
(5) 集中

これらはそれぞれ, 測度距離空間の定義によって考えられる範囲に差はあるが, 特に測度距離空間の定義としては一番狭い範囲である確率測度を持つ測度距離空間 (mm-空間という) に限って言えば, (1) から (5) の全てを考えることができ, その中でも Gromov [2] により導入された (5) が一番弱い収束であると知られている.

これまで知られていた $\mathrm{CD}(K,N)$ 条件の安定性に関する結果は, 例えば船野-塩谷 [1] や, 数川-小澤-鈴木 [3] らにより次のような結果が得られており,

**定理 1.1.** ([1], 定理 1.2, [3], 定理 1.1)
$K \in \mathbb{R}$ とする. このとき, $\mathrm{CD}(K,\infty)$ 条件を満たす mm-空間の列 $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ がある mm-空間 $Y$ に集中しているなら, $Y$ も $\mathrm{CD}(K,\infty)$ 空間である.

これにより $\mathrm{CD}(K,\infty)$ 条件は集中位相において安定性を持つとわかっている. また, $N<0$ の場合の $\mathrm{CD}(K,N)$ 条件の安定性については Magnabosco-Rigoni-Sosa [5] によって次のような結果が得られている.

**定理 1.2.** ([5], 定理 4.1)
$K \in \mathbb{R}$, $N<0$ とする. 測度距離空間の列 $\{(X_n, d_{X_n}, \mu_{X_n})\}_{n\in\mathbb{N}}$ が $\mathrm{CD}(K,N)$ 条件を満たし, $K<0$ のときはさらに

$$\limsup_{n\to\infty} \operatorname{diam} X_n < \frac{\pi}{\sqrt{-K}}$$

を満たすとする. そして $X_n$ がある測度距離空間 $(Y, d_Y, \mu_Y)$ に pmG 収束しているなら, $Y$ も $\mathrm{CD}(K,N)$ 空間である.

ただし, Magnabosco らは一般的な測度距離空間の定義よりもさらに広い枠組みの中でこの安定性を示しており, この定理 1.2 はそれを一般的な測度距離空間の定義まで狭めたものであることには注意しておく.

## 2 主定理

本講演における主定理は $N<0$ の場合の $\mathrm{CD}(K,N)$ 条件の安定性が pmG 収束よりも弱い収束である集中についても成立することを示したものである.

**主定理 2.1** ([8], 主定理 1.3)**.** $K \in \mathbb{R}$, $N<0$ とする. $\mathrm{CD}(K,N)$ 条件を満たし, $K<0$ のときはさらに

$$\limsup_{n\to\infty} \operatorname{diam} X_n < \frac{\pi}{\sqrt{-K}} \tag{1}$$

を満たすような mm-空間の列 $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が, ある mm-空間 $Y$ に集中しているなら, $Y$ も $\mathrm{CD}(K,N)$ 空間である.

また, $K<0$ における式 (1) を仮定することの必要性はある程度妥当であることが示せ,

**主定理 2.2** ([8], 主定理 1.5)**.** $K<0$, $N<0$ とし, $D \in \mathbb{R}$ を $D \geq \pi\sqrt{(N-1)/K}$ となるものとする. このとき $\operatorname{diam} Y = D$ である 2 点からなる mm-空間 $Y$ と, ある円周上の滑らかな関数列

$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset C^\infty(\mathbb{S}^1)$ が存在して,

$$(X_n, d_{X_n}, \mu_{X_n}) := (\mathbb{S}^1, d_g, e^{-f_n}\,\mathrm{vol}_g)$$

(ただし, $g$ は $\mathbb{S}^1$ 上の標準計量を $\mathrm{diam}\,\mathbb{S}^1 = D$ となるようにスケーリングしたもの) とするとき, $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は $\mathrm{CD}(K,N)$ 条件を満たす mm-空間の列であって, $X_n$ は $Y$ に $\square$ 収束する.

特に, 2 点からなる mm-空間は $\mathrm{CD}(K,N)$ 空間ではないため, $\square$ 収束するならば集中するという性質 (命題 3.19) と併せて考えると, 主定理 2.2 の $X_n$ と $Y$ は式 (1) を仮定しない場合の主定理 2.1 の反例になっているといえる. この結果は, 定理 1.1 のように空間の直径の仮定なしで任意の $K \in \mathbb{R}$ について $\mathrm{CD}(K,N)$ 空間の集中位相による極限が $\mathrm{CD}(K,N)$ 空間となった $1 < N \leq \infty$ の場合とは明らかに異なるものである.

# 3 曲率次元条件と集中位相

$(X, d_X)$ を完備かつ可分な距離空間とし, $\mathcal{P}(X)$ を $X$ 上の Borel 確率測度全体とする.

**定義 3.1** (測地線)**.** 距離空間 $(X, d_X)$ 上の曲線 $\gamma : [0,1] \to X$ が ($\gamma(0)$ から $\gamma(1)$ への) **測地線**であるとは, 任意の $s, t \in [0,1]$ に対し,

$$d_X(\gamma(s), \gamma(t)) = |s-t| \cdot d_X(\gamma(0), \gamma(1))$$

を満たすことをいう.

**定義 3.2** (Wasserstein 空間)(cf. [12])**.** $\mathcal{P}_2(X) \subset \mathcal{P}(X)$ を

$$\mathcal{P}_2(X) := \left\{ \mu \in \mathcal{P}(X) \;\middle|\; \exists x_0 \in X \text{ s.t. } \int_X d_X(x, x_0)^2 d\mu(x) < \infty \right\}$$

と定め, $W_2 : \mathcal{P}_2(X) \times \mathcal{P}_2(X) \to [0,\infty)$ を以下のように定める.

$$W_2(\mu,\nu) := \inf_{\pi\in\mathrm{Cpl}(\mu,\nu)} \left( \int_{X\times X} d_X(x,y)^2 d\pi(x,y) \right)^{\frac{1}{2}} \tag{2}$$

ただし $\mathrm{Cpl}(\mu,\nu) := \{\pi \in \mathcal{P}(X\times X) \mid \pi : \mu \text{ と } \nu \text{ の coupling}\}$ とする. このとき $(\mathcal{P}_2(X), W_2)$ は距離空間となり, これを **Wasserstein 空間**という. また, $\pi \in \mathrm{Cpl}(\mu,\nu)$ で, 式 (2) の inf を実現するものを optimal coupling といい, その全体を $\mathrm{Opt}(\mu,\nu)$ と書く.

**定義 3.3** (測度距離空間)**.** $(X, d_X, \mu_X)$ が**測度距離空間**であるとは, $(X, d)$ が完備かつ可分な距離空間で, $\mu_X$ が $X$ 上の局所有限な Borel 測度となることをいう. ここで, $\mu_X$ が局所有限であるとは, 任意の $x \in X$ に対し, $x$ の開近傍 $U$ で $\mu_X(U) < \infty$ となることをいう. また測度距離空間 $(X, d_X, \mu_X)$ が $\mu_X \in \mathcal{P}(X)$ を満たすとき, **mm-空間**という.

以降は, 測度距離空間 (または mm-空間) $(X, d_X, \mu_X)$ を単に $X$ と表記する.

次に, 測度距離空間における曲率次元条件を定義するために必要なものを定義する. $\kappa \in \mathbb{R}$ に対し,

$s_\kappa : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ を

$$s_\kappa(\theta) := \begin{cases} \dfrac{\sin\sqrt{\kappa}\theta}{\sqrt{\kappa}\theta} & (\kappa > 0) \\ 1 & (\kappa = 0) \\ \dfrac{\sinh\sqrt{-\kappa}\theta}{\sqrt{-\kappa}\theta} & (\kappa < 0) \end{cases}$$

とし, $t \in [0,1]$, $K \in \mathbb{R}$, $N < 0$ に対し $\tau_{K,N}^{(t)} : [0,\infty) \to [0,\infty]$ を

$$\tau_{K,N}^{(t)}(\theta) := \begin{cases} \infty & \left(K < 0\ ,\ \theta \geq \pi\sqrt{(N-1)/K}\right) \\ t\left(\dfrac{s_{K/(N-1)}(t\theta)}{s_{K/(N-1)}(\theta)}\right)^{1-\frac{1}{N}} & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

と定める. 以降, $\tau_{K,N}^{(t),0} := \tau_{K,N}^{(1-t)}$, $\tau_{K,N}^{(t),1} := \tau_{K,N}^{(t)}$ とする.

**定義 3.4** (Rényi エントロピー)**.** $N < 0$ に対し, $S_{N,\mu_X} : \mathcal{P}(X) \to [0,\infty]$ を

$$S_{N,\mu_X}(\nu) := \begin{cases} \int_X \rho^{1-\frac{1}{N}}\, d\mu_X & (\nu = \rho\mu_X) \\ \infty & (\nu \not\ll \mu_X) \end{cases}$$

と定め, この $S_{N,\mu_X}(\nu)$ を $\nu$ の $\mu_X$ に対する **Rényi エントロピー**という. また, $\mathcal{D}(S_{N,\mu_X}) := \{\nu \in \mathcal{P}(X) \mid S_{N,\mu_X}(\nu) < \infty\}$ とする.

**定義 3.5** (曲率次元条件)(e.g. [7], 定義 4.4)**.** $K \in \mathbb{R}$, $N < 0$ とする. 測度距離空間 $X$ が $\mathrm{CD}(K,N)$ **空間**である (または $\mathrm{CD}(K,N)$ **条件を満たす**) とは, 任意の $\nu_0 = \rho_0\mu_X, \nu_1 = \rho_1\mu_X \in \mathcal{P}_2(X) \cap \mathcal{D}(S_{N,\mu_X})$ に対し, ある $(\mathcal{P}_2(X), W_2)$ 上の $\nu_0$ から $\nu_1$ への測地線 $\{\nu_t\}_{t\in[0,1]}$ と $\pi \in \mathrm{Opt}(\nu_0,\nu_1)$ が存在して, 任意の $t \in [0,1]$ と $\nu_0, \nu_1 \in \mathcal{D}(S_{N',\mu_X})$ を満たす任意の $N' \in [N,0)$ に対し,

$$S_{N',\mu_X}(\nu_t) \leq \sum_{i=0}^{1} \int_{X\times X} \tau_{K,N'}^{(t),i}\left(d_X(x_0,x_1)\right)\rho_i(x_i)^{-\frac{1}{N'}}\, d\pi(x_0,x_1) \tag{3}$$

が成立することをいう.

**例 3.6** ([6], 定理 1.1)**.** $n \geq 2$, $\alpha > 0$, $x \in \mathbb{R}^{n+1}$ で $|x| < 1$ を満たすものとし, $g$ を $\mathbb{R}^{n+1}$ から誘導される $\mathbb{S}^n$ 上の標準計量とする. また, $\varphi : \mathbb{S}^n \to [0,\infty)$ を

$$\varphi(y) := \frac{c_x^{n,\alpha}}{|y-x|^{n+\alpha}}$$

と定める. (ただし, $c_x^{n,\alpha} > 0$ は $\varphi\,\mathrm{vol}_g \in \mathcal{P}(\mathbb{S}^n)$ となるような定数とする.) このとき, 測度距離空間 $(\mathbb{S}^n, d_g, \varphi\,\mathrm{vol}_g)$ は $\mathrm{CD}(n-1-\frac{n+\alpha}{4}, -\alpha)$ 空間である.

次に, mm-空間の収束である集中を定義する.

**定義 3.7.** (オブザーバブル直径)
$X$ を mm-空間とし, $\alpha \geq 0$ とする. このとき,

$$\mathrm{diam}(X;\alpha) = \mathrm{diam}(\mu_X;\alpha) := \inf\{\mathrm{diam}\, A \mid A \in \mathcal{B}_X, \mu_X(A) \geq \alpha\}$$

と定め, $X$ の**部分直径**という. そして, $\kappa \geq 0$ に対し,

$$\mathrm{ObsDiam}(X; -\kappa) := \sup\{\mathrm{diam}(f_*\mu_X; 1-\kappa) \mid f \in \mathcal{L}ip_1(X)\}$$
$$\mathrm{ObsDiam}(X) := \inf_{\kappa > 0}(\kappa \vee \mathrm{ObsDiam}(X; -\kappa))$$

と定め, それぞれ $X$ の **$\kappa$-オブザーバブル直径**, **オブザーバブル直径**という.

**注意 3.8.** $\kappa$-オブザーバブル直径は $\kappa$ について単調非増加であり, $\kappa \geq 1$ のとき, $\mathrm{ObsDiam}(X; -\kappa) = 0$ であるから, 以降は基本的に $\kappa < 1$ として考える.

**定義 3.9.** (Lévy 族)
mm-空間の列 $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が **Lévy 族**であるとは, 任意の $\kappa > 0$ に対し,

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{ObsDiam}(X_n; -\kappa) = 0$$

が成立すること, あるいは同値なことだが

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{ObsDiam}(X_n) = 0$$

が成立することをいう. また, 注意 3.8 より, 十分小さな任意の $\kappa > 0$ としても同値である.

**定義 3.10.** (セパレーション距離)
$X$ を mm-空間とし, $N \in \mathbb{N}$, $\kappa_0, \kappa_1, \ldots, \kappa_N > 0$ とする. このとき, $X$ の**セパレーション距離** $\mathrm{Sep}(X; \kappa_0, \kappa_1, \ldots, \kappa_N)$ を $\min_{i\neq j} \mathrm{dist}(A_i, A_j)$ の上限として定める. ここで $A_0, A_1, \ldots, A_N$ は $X$ の Borel 部分集合で, $\mu_X(A_i) \geq \kappa_i$ $(i = 0, 1, \ldots, N)$ を満たすものを動くとする.

**定義 3.11** (mm-同型)**.** 2 つの mm-空間 $X, Y$ が **mm-同型**であるとは, ある等長写像 $f : \mathrm{supp}\,\mu_X \to \mathrm{supp}\,\mu_Y$ が存在して, $f_*\mu_X = \mu_Y$ を満たすことをいう. また, mm-空間の同型類全体を $\mathcal{X}$ と書く.

ここで $I := [0, 1)$ とし, $I$ は Lebesgue 測度 $\mathcal{L}^1$ によって確率測度空間となる.

**定義 3.12** (パラメータ)**.** $X$ を mm-空間とする. Borel 写像 $\varphi : I \to X$ が $\varphi_*\mathcal{L}^1 = \mu_X$ を満たすとき, $\varphi$ は **$X$ のパラメータ**であるという.

**命題 3.13** ([9], 補題 4.2)**.** 任意の mm-空間 $X$ に対し, $X$ のパラメータが存在する.

**定義 3.14** (ボックス距離)**.** mm-空間 $X, Y$ に対し,

(1) $\mathcal{L}^1(\tilde{I}) \geq 1 - \varepsilon$
(2) 任意の $s, t \in \tilde{I}$ に対し, $|d_X(\varphi(s), \varphi(t)) - d_Y(\psi(s), \psi(t))| \leq \varepsilon$

を満たす Borel 集合 $\tilde{I} \subset I$, $X$ のパラメータ $\varphi$, $Y$ のパラメータ $\psi$ が存在するような $\varepsilon > 0$ の下限を $\square(X, Y)$ と書き, これを **$X$ と $Y$ のボックス距離**という. そして $\square$ を単にボックス距離という.

**定義 3.15** (Ky Fan 距離)**.** $I$ 上の Borel 可測関数 $f, g : I \to \mathbb{R}$ に対し, $d_{\mathrm{KF}}$ を

$$d_{\mathrm{KF}}(f, g) := \inf\left\{\varepsilon > 0 \mid \mathcal{L}^1(\{x \in I \mid |f(x) - g(x)| > \varepsilon\}) \leq \varepsilon\right\}$$

と定めるとき, この $d_{\mathrm{KF}}$ を **Ky Fan 距離**という.

mm-空間 $X$ に対し, $X$ 上の 1-Lipschitz 関数全体を $\mathcal{L}ip_1(X)$ と書き, さらに, $X$ のパラメータ $\varphi$ に対して, $\varphi^*\mathcal{L}ip_1(X) := \{f \circ \varphi \mid f \in \mathcal{L}ip_1(X)\}$ と定める.

**定義 3.16** (オブザーバブル距離)**.** mm-空間 $X, Y$ に対し, $X$ と $Y$ の**オブザーバブル距離** $d_{\mathrm{conc}}(X, Y)$ を

$$d_{\mathrm{conc}}(X, Y) := \inf_{\varphi, \psi} d_H^{\mathrm{KF}}\left(\varphi^*\mathcal{L}ip_1(X), \psi^*\mathcal{L}ip_1(Y)\right)$$

と定める. ただし, $d_H^{\mathrm{KF}}$ は $d_{\mathrm{KF}}$ に関する Hausdorff 距離であり, $\varphi$, $\psi$ はそれぞれ $X$, $Y$ のパラメータ全体を動くものとする. このとき $d_{\mathrm{conc}}$ を単にオブザーバブル距離という.

**命題 3.17** ([9], 定理 4.10, 定理 4.14, 定理 5.16)**.** $\square$, $d_{\mathrm{conc}}$ はどちらも $\mathcal{X}$ 上の距離であり, 特に, $(\mathcal{X}, \square)$ は完備距離空間である.

**定義 3.18** ($\square$ 収束, 集中)**.** mm-空間の列 $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ がある mm-空間 $Y$ に $\mathcal{X}$ 上の距離 $\square$ (resp. $d_{\mathrm{conc}}$) について収束するとき, $X_n$ が $Y$ に **$\square$ 収束する** (resp. **集中する**) といい, $X_n \xrightarrow{\square} Y$ (resp. $X_n \xrightarrow{\mathrm{conc}} Y$) と書く.

**命題 3.19** ([9], 命題 5.5)**.** 任意の mm-空間 $X, Y$ に対し $d_{\mathrm{conc}}(X, Y) \leq \square(X, Y)$ が成立する. 特に mm-空間の列 $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が mm-空間 $Y$ に $\square$ 収束しているとき, $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は $Y$ に集中している.

**命題 3.20.** ([9], 命題 5.7, 系 5.8)
$X$ を mm-空間とし, $*$ を 1 点からなる mm-空間, つまり $* := (\{*\}, d_*, \delta_*)$ とするとき

$$d_{\mathrm{conc}}(X, *) \leq \mathrm{ObsDiam}(X) \leq 2\, d_{\mathrm{conc}}(X, *)$$

が成立する. 特に, mm-空間の列 $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ について, $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が Lévy 族であることと $X_n \xrightarrow{\mathrm{conc}} *$ が同値である.

**例 3.21.** 正規化された体積測度を持つ $n$ 次元単位球面の列は Lévy 族である.

**例 3.22.** 例 3.6 で挙げた $(\mathbb{S}^n, d_g, \varphi\, \mathrm{vol}_g)$ は Lévy 族である. (後述の系 3.27 より従う.)

**命題 3.23** ([9], 命題 9.31)**.** mm-空間の列 $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が mm-空間 $Y$ に集中しているとする. このとき, ある Borel 写像 $p_n : X_n \to Y$, コンパクト集合 $\tilde{X}_n \subset X_n$, $\varepsilon_n > 0$ が存在して以下を満たす.

(1) $d_H^{\mathrm{KF}}(\mathcal{L}ip_1(X_n), p_n^*\mathcal{L}ip_1(Y)) \leq \varepsilon_n$ かつ $\varepsilon_n \to 0$
(2) $(p_n)_*\mu_{X_n}$ は $\mu_Y$ に弱収束する.
(3) 任意の $x, x' \in \tilde{X}_n$ に対し $d_Y(p_n(x), p_n(x')) \leq d_{X_n}(x, x') + \varepsilon_n$
(4) $\mu_{X_n}(\tilde{X}_n) \geq 1 - \varepsilon_n$
(5) 任意の $y \in Y$ に対し $\limsup_{n\to\infty} \sup_{x \in X_n \setminus \tilde{X}_n} d_Y(p_n(x), y) < \infty$

ここで, 主定理の他に, $N < 0$ の場合の $CD(K, N)$ 空間に関する結果がいくつか得られているので, それらを紹介する. まず, 次の定理は船野-塩谷 [1] の系 1.4 を CD$(0, N)$ 空間に拡張したもので, この証明は [1] の時とほぼ同様だが, 主定理 2.1 の $K = 0$ の場合を適用することで得られる.

**定理 3.24.** [[8], 定理 6.5] $N<0$ とする. コンパクトなリーマン多様体の列 $\{M_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が, 以下の 2 条件を満たすとする.

(a) $M_n$ は $\mathrm{CD}(0,N)$ 空間である.
(b) ある $k\in\mathbb{N}$ について $\lim_{n\to\infty}\lambda_k(M_n)=\infty$ が成立する.

(ここで, $\lambda_k(M_n)$ は $M_n$ の第 $k$ 固有値である. ) このとき, $\{M_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は Lévy 族である.

次に, $K$ が大きくなると, $\mathrm{CD}(K,N)$ 空間は小さくなっていくという結果を $N<0$ の場合に示したもので, $N\in(1,\infty]$ におけるこの定理は [10] の定理 4.26 や [11] の系 2.6 からわかる.

**定理 3.25** ([8], 定理 8.3)**.** $(X,d_X,\mu_X)$ を測度距離空間とする. ある $N<0$ が存在して, 任意の $K>0$ に対して $X$ が $\mathrm{CD}(K,N)$ 空間となるとき, $|\operatorname{supp}\mu_X|=1$ となる.

また, 次の 2 つは [9] の命題 9.26, 系 9.27 をそれぞれ $N<0$ の $\mathrm{CD}(K,N)$ 空間の場合に拡張したものである.

**定理 3.26** ([8], 定理 4.1)**.** $K>0$, $N<0$ とし, $X$ を $\mathrm{CD}(K,N)$ 条件を満たす mm-空間とする. このとき, $\kappa_0+\kappa_1<1$ を満たす任意の $\kappa_0,\kappa_1>0$ と任意の $\kappa\in(0,1)$ に対し,

(1) $\mathrm{Sep}(X;\kappa_0,\kappa_1)\le 2\sqrt{\dfrac{1-N}{K}}\cosh^{-1}\left(\left(\dfrac{\kappa_0^{1/N}+\kappa_1^{1/N}}{2}\right)^{\frac{-N}{1-N}}\right)$

(2) $\mathrm{ObsDiam}(X;-\kappa)\le 2\sqrt{\dfrac{1-N}{K}}\cosh^{-1}\left(\left(2\kappa^{-1}\right)^{\frac{1}{1-N}}\right)$

が成立する. (ただし, $\cosh^{-1}$ は cosh の逆関数であり, $x\ge 1$ に対し, $\cosh^{-1}(x)=\log(x+\sqrt{x^2-1})$ である.)

**系 3.27** ([8], 系 4.3)**.** $\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subset\mathbb{R}$, $\{N_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subset(-\infty,0)$ とし, $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を $\mathrm{CD}(K_n,N_n)$ 条件を満たす mm-空間の列とする. このとき, $K_n\to\infty$ なら $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は Lévy 族である.

この系 3.27 は $N$ が動いても良いので, 主定理 2.1 と定理 3.25 から直ちに従うわけではない.

# 4 主定理の証明の概略

主定理 2.1 の証明の方針は基本的に定理 1.1 に基づいている.

主定理 2.1 の証明の概略. $X_n$ が $Y$ に集中しているという仮定から, 命題 3.23 より得られる $p_n:X_n\to Y$ が存在する. 任意の $\nu_0,\nu_1\in\mathcal{P}_2(Y)\cap\mathcal{D}(S_{N,\mu_Y})$ に対し, $(p_n)_*\nu_0^n\to\nu_0$, $(p_n)_*\nu_1^n\to\nu_1$ となるような $\nu_0^n,\nu_1^n\in\mathcal{P}_2(X_n)\cap\mathcal{D}(S_{N,\mu_{X_n}})$ が取れる. $X_n$ は $\mathrm{CD}(K,N)$ 条件を満たすので, $(\mathcal{P}_2(X_n),W_2)$ 上の $\nu_0^n$ から $\nu_1^n$ への測地線 $\{\nu_t^n\}_{t\in[0,1]}$ と $\pi^n\in\mathrm{Opt}(\nu_0^n,\nu_1^n)$ がとれて, これらは式 (3) を満たす. このとき, 部分列を取ることで $(p_n\times p_n)_*\pi^n\to\exists\pi\in\mathrm{Opt}(\nu_0,\nu_1)$, $t\in[0,1]$ について

$(p_n)_*\nu_t^n \to \exists \nu_t \in \mathcal{P}_2(Y)$ とすることが出来て

$$\begin{aligned} S_{N',\mu_Y}(\nu_t) &\leq \liminf_{n\to\infty} S_{N',\mu_X}(\nu_t^n) \\ &\leq \limsup_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{1} \int_{X_n\times X_n} \tau_{K,N'}^{(t),i}\left(d_{X_n}(x_0,x_1)\right) \rho_i^n(x_i)^{-\frac{1}{N'}} d\pi^n(x_0,x_1) \\ &\leq \sum_{i=0}^{1} \int_{Y\times Y} \tau_{K,N'}^{(t),i}\left(d_Y(y_0,y_1)\right) \rho_i(y_i)^{-\frac{1}{N'}} d\pi(y_0,y_1) \end{aligned}$$

と評価できる. □

主定理 2.2 の証明の概略. $f_n : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}$ を

$$f_n(x,y) := -(N-1)\log\left(a_n \cdot \log\left(2\cosh(ny)\right)\right)$$

と定める. (ただし, $a_n > 0$ は正規化定数, つまり

$$a_n := n\left(\int_{\mathbb{S}^1} (2\cosh(ny))^{N-1} d\,\mathrm{vol}_g(x,y)\right)^{-\frac{1}{N-1}}$$

とする) このとき, $f_n \in C^\infty(\mathbb{S}^1)$ であり, $(\mathbb{S}^1, g, e^{-f_n}\,\mathrm{vol}_g)$ が $\mathrm{CD}(K,N)$ 空間になることが証明でき, なおかつ $e^{-f_n}\,\mathrm{vol}_g$ が $\frac{1}{2}(\delta_{(-1,0)}+\delta_{(1,0)})$ に弱収束することから, 2 点空間 $Y = \{(-1,0),(1,0)\}$ へ □ 収束することがわかる. □

# 参考文献


[1] K. Funano and T. Shioya, *Concentration, Ricci curvature, and eigenvalues of Laplacian*, Geom. Funct. Anal. **23** (2013), no. 3, 888–936.

[2] M. Gromov, *Metric structures for Riemannian and non-Riemannian spaces*, Reprint of the 2001 English edition, Modern Birkhäuser Classics, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2007. Based on the 1981 French original; With appendices by M. Katz, P. Pansu and S. Semmes; Translated from the French by Sean Michael Bates.

[3] D. Kazukawa, R. Ozawa, and N. Suzuki, *Stabilities of rough curvature dimension condition*, J. Math. Soc. Japan **72** (2020), no. 2, 541–567.

[4] J. Lott and C. Villani, *Ricci curvature for metric-measure spaces via optimal transport*, Ann. of Math. (2) **169** (2009), no. 3, 903–991.

[5] M. Magnabosco, C. Rigoni, and G. Sosa, *Convergence of metric measure spaces satisfying the CD condition for negative values of the dimension parameter*. preprint (2021), arXiv:2104.03588.

[6] E. Milman, *Harmonic measures on the sphere via curvature-dimension*, Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6) **26** (2017), no. 2, 437–449.

[7] S.-i. Ohta, *$(K,N)$-convexity and the curvature-dimension condition for negative $N$*, J. Geom. Anal. **26** (2016), no. 3, 2067–2096.

[8] S. Oshima, *Stability of curvature-dimension condition for negative dimensions under concentration topology*. preprint (2022), arXiv:2209.03587.

[9] T. Shioya, *Metric measure geometry. Gromov's theory of convergence and concentration of metrics and measures*, IRMA Lectures in Mathematics and Theoretical Physics, vol. 25, EMS Publishing House, Zürich, 2016.

[10] K.-T. Sturm, *On the geometry of metric measure spaces. I*, Acta Math. **196** (2006), no. 1, 65–131.

[11] ———, *On the geometry of metric measure spaces. II*, Acta Math. **196** (2006), no. 1, 133–177.

[12] C. Villani, *Optimal transport, old and new*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], vol. 338, Springer-Verlag, Berlin, 2009.