3 波相互作用をもつ非線形シュレディンガー方程式系に対する特異摂動問題

東京都立大学大学院 理学研究科 数理科学専攻
長田祐輝 (Yuki OSADA)

概要

本講演では, 次の 3 波相互作用をもつ非線形シュレディンガー方程式系に対して十分小さい ε に対する ground state の存在性および $\varepsilon \to +0$ における ground state のスパイクの位置について考察する:

$$\begin{cases} -\varepsilon^2 \Delta u_1 + V_1(x) u_1 = |u_1|^{p-1} u_1 + \gamma u_2 u_3 & \text{in } \mathbb{R}^N, \\ -\varepsilon^2 \Delta u_2 + V_2(x) u_2 = |u_2|^{p-1} u_2 + \gamma u_1 u_3 & \text{in } \mathbb{R}^N, \\ -\varepsilon^2 \Delta u_3 + V_3(x) u_3 = |u_3|^{p-1} u_3 + \gamma u_1 u_2 & \text{in } \mathbb{R}^N. \end{cases} \tag{$\mathcal{P}_\varepsilon$}$$

ここで, $N \leq 5$, $2 \leq p < 2^* - 1$, $2^* = \infty$ $(N = 1, 2)$, $2^* = 2N/(N-2)$, $\varepsilon, \gamma > 0$. 正確には, $\rho(\mathbf{V}(x); \gamma)$ という関数を定義し, ある場合には $\varepsilon \to +0$ において ground state の全ての成分は $\rho(\mathbf{V}(x); \gamma)$ の最小点にピークをもつピーク解に漸近し, 別の場合には, ground state の 1 つの成分だけが対応するポテンシャル $V_j(x)$ の最小点にピークをもつピーク解に漸近し残り 2 つの成分は 0 に漸近するという結果を紹介する.

1 Introduction

本講演では, 次の 3 波相互作用をもつ非線形シュレディンガー方程式系を考える:

$$\begin{cases} -\varepsilon^2 \Delta u_1 + V_1(x) u_1 = |u_1|^{p-1} u_1 + \gamma u_2 u_3 & \text{in } \mathbb{R}^N, \\ -\varepsilon^2 \Delta u_2 + V_2(x) u_2 = |u_2|^{p-1} u_2 + \gamma u_1 u_3 & \text{in } \mathbb{R}^N, \\ -\varepsilon^2 \Delta u_3 + V_3(x) u_3 = |u_3|^{p-1} u_3 + \gamma u_1 u_2 & \text{in } \mathbb{R}^N. \end{cases} \tag{$\mathcal{P}_\varepsilon$}$$

ここで, $N \leq 5$, $2 \leq p < 2^* - 1$, $2^* = \infty$ $(N \leq 2)$, $2^* = 2N/(N-2)$ $(N \geq 3)$, $\varepsilon > 0$, $\gamma \geq 0$. また, ポテンシャル $V_j(x)$ $(j = 1, 2, 3)$ に対して次の基本的な条件を仮定する:

(V1) $\forall\, j = 1, 2, 3$, $V_j \in L^\infty(\mathbb{R}^N) \cap C^1(\mathbb{R}^N)$,
(V2) $\forall\, j = 1, 2, 3$, $0 < V_{j,0} := \inf_{x \in \mathbb{R}^N} V_j(x) < \lim_{|x| \to \infty} V_j(x) =: V_{j,\infty}$.

方程式 $(\mathcal{P}_\varepsilon)$ に対して付随する汎関数 I_ε および最小エネルギー c_ε を定義する:

$$\mathbf{u} := (u_1, u_2, u_3), \quad \mathbb{H} := H^1(\mathbb{R}^N)^3.$$

$$I_\varepsilon(\mathbf{u}) := \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^N} \varepsilon^2|\nabla u_j|^2 + V_j(x)u_j^2 - \frac{1}{p+1}\sum_{j=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^N}|u_j|^{p+1} - \gamma\int_{\mathbb{R}^N} u_1u_2u_3,$$

$$c_\varepsilon := \inf_{\mathbf{u}\in\mathcal{N}_\varepsilon} I_\varepsilon(\mathbf{u}), \quad \mathcal{N}_\varepsilon := \{\mathbf{u}\in\mathbb{H}\setminus\{(0,0,0)\} \mid G_\varepsilon(\mathbf{u}) = 0\},$$

$$G_\varepsilon(\mathbf{u}) := \sum_{j=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^N} \varepsilon^2|\nabla u_j|^2 + V_j(x)u_j^2 - |u_j|^{p+1} - 3\gamma\int_{\mathbb{R}^N} u_1u_2u_3.$$

Rabinowitz [4] は $0 < \inf_{x\in\mathbb{R}^N} V(x) < \liminf_{|x|\to\infty} V(x)$ の条件の下で, ε が十分小さいときに

$$-\varepsilon^2\Delta u + V(x)u = |u|^{p-1}u \quad \text{in } \mathbb{R}^N \tag{1}$$

の ground state の存在を示した.

Wang [5] は $\varepsilon \to +0$ における (1) の正値の ground state の漸近挙動について研究した. その解はポテンシャル $V(x)$ の最小点に凝集し, 一意の最大点をもち, 最小点の周りで指数減衰する.

Lin-Wei [1] は次のような方程式系を考えた:

$$\begin{cases} -\varepsilon^2\Delta u_1 + V_1(x)u_1 = \mu_1 u_1^3 + \beta u_1 u_2^2 & \text{in } \mathbb{R}^N, \\ -\varepsilon^2\Delta u_2 + V_2(x)u_2 = \mu_2 u_2^3 + \beta u_1^2 u_2 & \text{in } \mathbb{R}^N. \end{cases}$$

この方程式系に対して, 彼らは $\beta < 0$ のとき, $\varepsilon \to +0$ において ground state は $V_j(x)$ の最小点に凝集することを示した. 一方, $\beta > 0$ のとき, ρ という関数を導入し, $\inf_{x\in\mathbb{R}^N}\rho(V_1(x), V_2(x);\beta) < d_1^{V_{1,0}} + d_1^{V_{2,0}}$ ならば ground state は $\rho(V_1(x), V_2(x);\beta)$ の最小点に凝集し, $\inf_{x\in\mathbb{R}^N}\rho(V_1(x), V_2(x);\beta) > d_1^{V_{1,0}} + d_1^{V_{2,0}}$ ならば $V_j(x)$ の最小点に凝集することを示した.

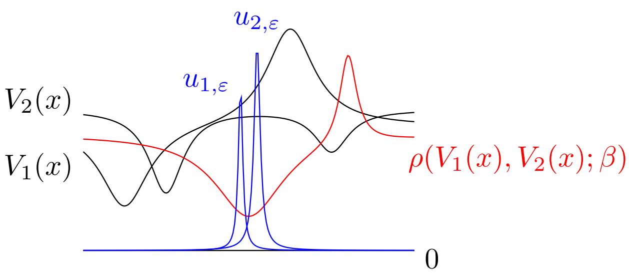

図 1 $\inf_{x\in\mathbb{R}^N}\rho(V_1(x), V_2(x);\beta) < d_1^{V_{1,0}} + d_1^{V_{2,0}}$

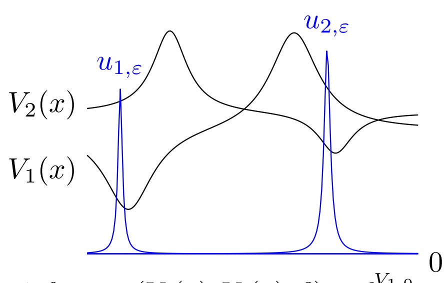

図 2 $\inf_{x\in\mathbb{R}^N}\rho(V_1(x), V_2(x);\beta) > d_1^{V_{1,0}} + d_1^{V_{2,0}}$

ここで $\rho(V_1(x_0), V_2(x_0);\beta)$, $d_1^{V_{j,0}}$ はそれぞれ次の方程式の ground state が持っているエネルギーである.

$$\begin{cases} -\Delta u_1 + V_1(x_0)u_1 = u_1^3 + \beta u_1 u_2^2, \\ -\Delta u_2 + V_2(x_0)u_2 = u_2^3 + \beta u_1^2 u_2, \end{cases} \qquad -\Delta u + V_{j,0}u = u^3.$$

本講演の主結果を述べるために, 次の方程式系に付随する汎関数 $\tilde{I}^{\lambda,\gamma}$ および最小エネルギー

$\rho(\lambda;\gamma)$ を定義する:

$$\begin{cases} -\Delta v_1 + \lambda_1 v_1 = |v_1|^{p-1} v_1 + \gamma v_2 v_3, \\ -\Delta v_2 + \lambda_2 v_2 = |v_2|^{p-1} v_2 + \gamma v_1 v_3, \\ -\Delta v_3 + \lambda_3 v_3 = |v_3|^{p-1} v_3 + \gamma v_1 v_2, \end{cases} \tag{$\tilde{\mathcal{P}}^{\lambda,\gamma}$}$$

$$\begin{aligned} \lambda &:= (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3), \\ \tilde{I}^{\lambda,\gamma}(\mathbf{v}) &:= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{3} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_j|^2 + \lambda_j v_j^2 - \frac{1}{p+1}\sum_{j=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^N} |v_j|^{p+1} - \gamma \int_{\mathbb{R}^N} v_1 v_2 v_3, \\ \rho(\lambda;\gamma) &:= \inf_{\mathbf{v}\in\tilde{\mathcal{N}}^{\lambda,\gamma}} \tilde{I}^{\lambda,\gamma}(\mathbf{v}), \\ \tilde{\mathcal{N}}^{\lambda,\gamma} &:= \{\mathbf{v} \in \mathbb{H} \setminus \{(0,0,0)\} \mid \tilde{G}^{\lambda,\gamma}(\mathbf{v}) = 0\}, \\ \tilde{G}^{\lambda,\gamma}(\mathbf{v}) &:= \sum_{j=1}^{3} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_j|^2 + \lambda_j v_j^2 - |v_j|^{p+1} - 3\gamma \int_{\mathbb{R}^N} v_1 v_2 v_3. \end{aligned}$$

定義 1. $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ を $(\mathcal{P}_\varepsilon)$ の解とする. このとき $\mathbf{u}$ が $(\mathcal{P}_\varepsilon)$ の *scalar solution* であるとは, ある $j_0 \in \{1,2,3\}$ が存在して, $u_{j_0} \neq 0$ かつ $u_j = 0$ $(\forall j \neq j_0)$ となることである. 一方, $\mathbf{u}$ が $(\mathcal{P}_\varepsilon)$ の *vector solution* であるとは, $u_j \neq 0$ $(\forall j = 1,2,3)$ となることである.

定義 2. $\mathbf{u}$ が $(\mathcal{P}_\varepsilon)$ の非自明解であるとは, $\mathbf{u}$ が $(\mathcal{P}_\varepsilon)$ をみたし, $\mathbf{u} \neq (0,0,0)$ となることである. $\mathbf{u}$ が $(\mathcal{P}_\varepsilon)$ の *ground state* であるとは, $\mathbf{u}$ が $(\mathcal{P}_\varepsilon)$ の非自明解であり, $(\mathcal{P}_\varepsilon)$ の任意の非自明解 $\mathbf{v}$ に対して $I_\varepsilon(\mathbf{u}) \leq I_\varepsilon(\mathbf{v})$ となることである. $\mathbf{u}$ が c_ε の *minimizer* であるとは, $\mathbf{u} \in \mathcal{N}_\varepsilon$ であり, $I_\varepsilon(\mathbf{u}) = c_\varepsilon$ となることである. $\mathbf{u}$ が $(\mathcal{P}_\varepsilon)$ の非負の *ground state* であるとは, $\mathbf{u}$ が $(\mathcal{P}_\varepsilon)$ の *ground state* であり, $u_j \geq 0$ $(j = 1,2,3)$ となることである. また, $\mathbf{u}$ が c_ε の非負の *minimizer* であるとは $\mathbf{u}$ が c_ε の *minimizer* であり, $u_j \geq 0$ $(j = 1,2,3)$ となることである.

注意 1. $\mathbf{u}$ が c_ε の *minimizer* であることと $\mathbf{u}$ が $(\mathcal{P}_\varepsilon)$ の *ground state* であることは同値である. $\rho(\lambda;\gamma)$,$(\tilde{\mathcal{P}}^{\lambda,\gamma})$ に対しても同様な結果が成り立つ.

注意 2. $\lambda_j > 0$ かつ $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ とする. *[3]* より, $(\tilde{\mathcal{P}}^{\lambda,\gamma})$ は非負の *ground state* をもつ.

2 主結果

ポテンシャルに対して次の条件を仮定する:

$(\mathrm{C1})_\gamma$ $\inf_{x\in\mathbb{R}^N} \rho(\mathbf{V}(x);\gamma) < \rho(\mathbf{V}_\infty;\gamma)$.

本講演の主結果を述べる. まず, 十分小さい ε に対する $(\mathcal{P}_\varepsilon)$ の ground state の存在性に関する結果を述べる.

主結果 1 (O. [2] (2022) submitted)**.** *(V1),(V2)* を仮定し, γ を *(C1)*$_\gamma$ をみたすように固定する. このとき, 次が成り立つ.

$$c_\varepsilon \leq \varepsilon^N \left(\inf_{x\in\mathbb{R}^N} \rho(\mathbf{V}(x);\gamma) + o(1) \right) \quad \text{as } \varepsilon \to +0.$$

さらに, ε が十分小さいとき, $(\mathcal{P}_\varepsilon)$ の非負の *ground state* が存在する.

注意 3. 次の *(V3)* から, 任意の $\gamma \geq 0$ に対して *(C1)*$_\gamma$ が成り立つ:

(V3) $\exists\, y_0 \in \mathbb{R}^N$ *s.t.* $0 < V_j(y_0) < V_{j,\infty} \quad \forall\, j = 1,2,3.$

次に, $\varepsilon \to +0$ における $(\mathcal{P}_\varepsilon)$ の ground state の漸近挙動に関する結果を述べる. 詳細な漸近挙動を得るために, 次の条件を導入する:

(C2)$_\gamma$ $\inf_{x\in\mathbb{R}^N} \rho(\mathbf{V}(x);\gamma) < \min_{j=1,2,3} c_1^{V_{j,0}}$.

ここで,

$$
\begin{aligned}
&\lambda \in \mathbb{R},\\
I_1^\lambda(u) &:= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 + \lambda u^2 - \frac{1}{p+1}\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p+1},\\
c_1^\lambda &:= \inf_{u\in\mathcal{N}_1^\lambda} I_1^\lambda(u), \quad \mathcal{N}_1^\lambda := \{u \in H^1(\mathbb{R}^N)\setminus\{0\} \mid G_1^\lambda(u) = 0\},\\
G_1^\lambda(u) &:= \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 + \lambda u^2 - |u|^{p+1}.
\end{aligned}
$$

ここで, $\varepsilon \to +0$ における $(\mathcal{P}_\varepsilon)$ の非負の ground state の正確な漸近挙動について述べる.

主結果 2 (O. [2] (2022) submitted)**.** *(V1),(V2)* を仮定し, γ を *(C1)*$_\gamma$ と *(C2)*$_\gamma$ をみたすように固定する. $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^\infty \subset (0,\infty)$ を $\varepsilon_n \to 0$ $(n\to\infty)$ となるものとし, $\mathbf{u}_n$ を $(\mathcal{P}_{\varepsilon_n})$ の非負の *ground state* とする. さらに $x_{j,n}$ を $u_{j,n}$ の最大点とする.

(1) このとき, 任意の $j = 1,2,3$ に対して $\{x_{j,n}\}_{n=1}^\infty$ は有界になる.

(2) 次が成り立つ:

$$c_\varepsilon = \varepsilon^N \left(\inf_{x\in\mathbb{R}^N} \rho(\mathbf{V}(x);\gamma) + o(1) \right) \quad \text{as } \varepsilon \to +0.$$

(3) さらに, 部分列をとれば, ある $\mathbf{W}_0 \in \mathbb{H}$ と $x_0 \in \mathbb{R}^N$ が存在して,

$$
\begin{aligned}
&x_{j,n} \to x_0, \quad \frac{|x_{j,n} - x_{k,n}|}{\varepsilon_n} \to 0, \quad \text{as } n\to\infty,\ j \neq k,\\
&\inf_{x\in\mathbb{R}^N} \rho(\mathbf{V}(x);\gamma) = \rho(\mathbf{V}(x_0);\gamma),\\
&u_{j,n}(x_{j,n} + \varepsilon_n y) \to W_{j,0} \quad \text{in } H^1(\mathbb{R}^N),\\
&\mathbf{W}_0 \text{ は } (\tilde{\mathcal{P}}^{\mathbf{V}(x_0),\gamma}) \text{ の ground state},\\
&W_{j,0} \text{ は正値, 球対称, 狭義単調減少 } (j = 1,2,3),
\end{aligned}
$$

where $\mathbf{V}(x_0) = (V_1(x_0), V_2(x_0), V_3(x_0))$.

(4) さらに, 任意の $0 < \eta < V_0$ に対して, ある $C_\eta > 0$ が存在して,

$$u_{j,n}(x) \leq C_\eta e^{-\sqrt{\eta}|x - x_{j,n}|/\varepsilon_n} \quad \forall x \in \mathbb{R}^N,\ j = 1,2,3.$$

ここで $V_0 := \min\{V_{1,0}, V_{2,0}, V_{3,0}\}$.

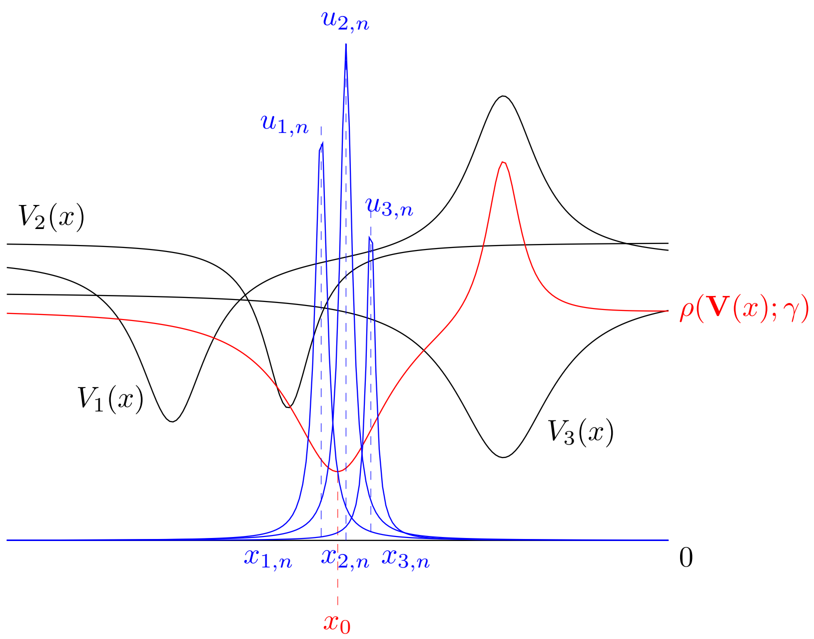

図 3　主結果 2 の結果の図示

以下では, $(\mathrm{C2})_\gamma$ が成り立たないケースを考える. $(\mathrm{C2})_\gamma$ が成り立たないとき, 以下が成り立つ:

$(\mathrm{C3})_\gamma$ $\inf_{x\in\mathbb{R}^N}\rho(\mathbf{V}(x);\gamma)=\min_{j=1,2,3}c_1^{V_{j,0}}$.

主結果 3 (O. [2] (2022) submitted)**.** *(V1),(V2)* を仮定し, γ を *(C1)*$_\gamma$ と *(C3)*$_\gamma$ が成り立つように固定する. さらに, *(C3)*$_{\gamma'}$ が成り立つような $\gamma'>\gamma$ が存在すると仮定する. $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^\infty\subset(0,\infty)$ を $\varepsilon_n\to+0$ となるものとし, $\mathbf{u}_n$ を $(\mathcal{P}_{\varepsilon_n})$ の非負の *ground state* とする. $x_{j,n}$ を $u_{j,n}$ の最大点とする. このとき, 部分列をとれば, ある $l_0\in\{1,2,3\}$ と $x_{l_0,0}\in\mathbb{R}^N$ が存在して

$$
\begin{aligned}
&x_{l_0,n}\to x_{l_0,0},\quad V_{l_0}(x_{l_0,0})=V_{l_0,0}=V_0,\\
&c_\varepsilon=\varepsilon^N\left(\min_{j=1,2,3}c_1^{V_{j,0}}+o(1)\right)=\varepsilon^N\left(c_1^{V_{l_0,0}}+o(1)\right),\quad \mathit{as}\ \varepsilon\to+0,\\
&u_{l_0,n}(x_{l_0,n}+\varepsilon_n y)\to W\quad \mathit{in}\ H^1(\mathbb{R}^N),\quad u_{j,n}(x_{j,n}+\varepsilon_n y)\to 0\quad \mathit{in}\ H^1(\mathbb{R}^N)\quad j\neq l_0.
\end{aligned}
$$

ここで W は次の方程式の一意解である*:*

$$
\begin{cases}
-\Delta W+V_0W=W^p\quad \mathit{in}\ \mathbb{R}^N,\quad W>0\quad \mathit{in}\ \mathbb{R}^N,\\
W(0)=\max_{x\in\mathbb{R}^N}W(x),\quad W(x)\to 0\quad \mathit{as}\ |x|\to\infty.
\end{cases}
$$

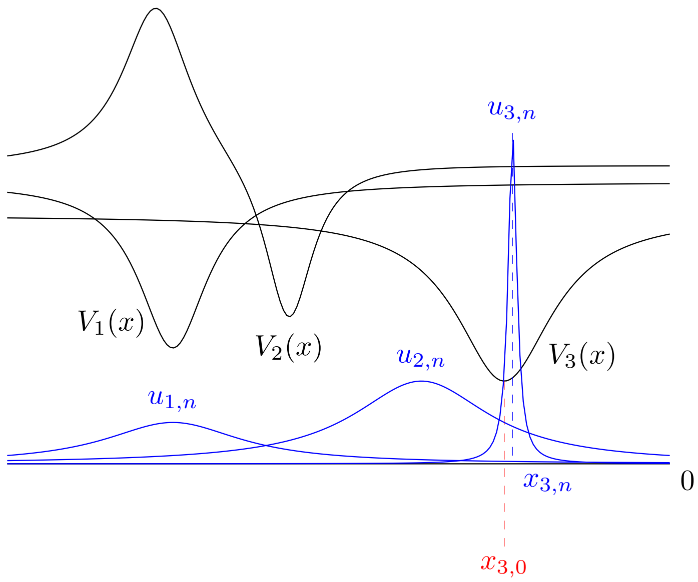

図 4　主結果 3 の結果の図示

注意 4. *(V1),(V2),(V3)* を仮定する．このときある $\gamma^* > 0$ が存在して，$\gamma > \gamma^*$ なら *(C2)*$_\gamma$ が成り立ち，$0 \le \gamma < \gamma^*$ なら，*(C3)*$_\gamma$ が成り立つ．したがって，$\gamma > \gamma^*$ なら主結果 *2* が成り立ち，$0 \le \gamma < \gamma^*$ なら主結果 *3* が成り立つ．

注意 5. *(C1)*$_\gamma$ は *ground state* の存在性を保証するための条件である．*(C2)*$_\gamma$, *(C3)*$_\gamma$ は $\varepsilon \to +0$ における *ground state* の漸近挙動を分類するための条件である．

3　主結果の証明の概略

$\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $z_0 \in \mathbb{R}^N$ に対して，

$$\mathbf{w}(y) = \mathbf{u}(z_0 + \varepsilon y) \tag{2}$$

とおく. 次の方程式を考える. また付随する汎関数と最小エネルギーを定義する:

$$\begin{cases} -\Delta w_1 + V_1(z_0+\varepsilon y)w_1 = |w_1|^{p-1}w_1 + \gamma w_2 w_3, \\ -\Delta w_2 + V_2(z_0+\varepsilon y)w_2 = |w_2|^{p-1}w_2 + \gamma w_1 w_3, \\ -\Delta w_3 + V_3(z_0+\varepsilon y)w_3 = |w_3|^{p-1}w_3 + \gamma w_1 w_2, \end{cases} \tag{$\tilde{\mathcal{P}}^{\mathbf{V}(z_0+\varepsilon y),\gamma}$}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{w} &:= (w_1, w_2, w_3), \\
\tilde{I}^{\mathbf{V}(z_0+\varepsilon y),\gamma}(\mathbf{w}) &:= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w_j|^2 + V_j(z_0+\varepsilon y)w_j^2 - \frac{1}{p+1}\sum_{j=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^N}|w_j|^{p+1} - \gamma\int_{\mathbb{R}^N} w_1w_2w_3, \\
\tilde{c}^{\mathbf{V}(z_0+\varepsilon y),\gamma} &:= \inf_{\mathbf{w}\in\tilde{\mathcal{N}}^{\mathbf{V}(z_0+\varepsilon y),\gamma}} \tilde{I}^{\mathbf{V}(z_0+\varepsilon y),\gamma}(\mathbf{w}), \\
\tilde{\mathcal{N}}^{\mathbf{V}(z_0+\varepsilon y),\gamma} &:= \{\mathbf{w} \in \mathbb{H} \setminus \{(0,0,0)\} \mid \tilde{G}^{\mathbf{V}(z_0+\varepsilon y),\gamma}(\mathbf{w}) = 0\}, \\
\tilde{G}^{\mathbf{V}(z_0+\varepsilon y),\gamma}(\mathbf{w}) &:= \sum_{j=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla w_j|^2 + V_j(z_0+\varepsilon y)w_j^2 - |w_j|^{p+1} - 3\gamma\int_{\mathbb{R}^N} w_1w_2w_3.
\end{aligned}$$

(2) の下で次の関係式に注意する:

$$I_\varepsilon(\mathbf{u}) = \varepsilon^N \tilde{I}^{\mathbf{V}(z_0+\varepsilon y),\gamma}(\mathbf{w}), \quad G_\varepsilon(\mathbf{u}) = \varepsilon^N \tilde{G}^{\mathbf{V}(z_0+\varepsilon y),\gamma}(\mathbf{w}), \quad c_\varepsilon = \varepsilon^N \tilde{c}^{\mathbf{V}(z_0+\varepsilon y),\gamma}.$$

3.1 主結果 1 の証明の概略

Proof. $z_0 \in \mathbb{R}^N$ を

$$\inf_{x\in\mathbb{R}^N} \rho(\mathbf{V}(x);\gamma),$$

を達成する点とし, $\mathbf{w}_0$ を $\rho(\mathbf{V}(z_0);\gamma)$ の非負の minimizer とする (注意 2 参照). このとき $t_{0,\varepsilon}\mathbf{w}_0 \in \tilde{\mathcal{N}}^{\mathbf{V}(z_0+\varepsilon y),\gamma}$ となる $t_{0,\varepsilon} > 0$ が存在する. このとき

$$\sum_{j=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w_{j,0}|^2 + V_j(z_0+\varepsilon y)w_{j,0}^2 = t_{0,\varepsilon}^{p-1}\sum_{j=1}^{3}|w_{j,0}|^{p+1} + 3t_{0,\varepsilon}\gamma\int_{\mathbb{R}^N} w_{1,0}w_{2,0}w_{3,0}.$$

したがって, $\{t_{0,\varepsilon}\}_\varepsilon$ は有界である. したがって

$$\begin{aligned} &\inf_{x\in\mathbb{R}^N} \rho(\mathbf{V}(x);\gamma) = \rho(\mathbf{V}(z_0);\gamma) = \tilde{I}^{\mathbf{V}(z_0),\gamma}(\mathbf{w}_0) \geq \tilde{I}^{\mathbf{V}(z_0),\gamma}(t_{0,\varepsilon}\mathbf{w}_0) \\ &= \frac{t_{0,\varepsilon}^2}{2}\sum_{j=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w_{j,0}|^2 + V_j(z_0)w_{j,0}^2 - \frac{t_{0,\varepsilon}^{p+1}}{p+1}\sum_{j=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^N} w_{j,0}^{p+1} - t_{0,\varepsilon}^3\gamma\int_{\mathbb{R}^N} w_{1,0}w_{2,0}w_{3,0} \\ &= \tilde{I}^{\mathbf{V}(z_0+\varepsilon y),\gamma}(t_{0,\varepsilon}\mathbf{w}_0) + o(1) \geq \tilde{c}^{\mathbf{V}(z_0+\varepsilon y),\gamma} + o(1), \quad \text{as } \varepsilon \to +0 \end{aligned} \tag{3}$$

を得る. したがって $c_\varepsilon = \varepsilon^N \tilde{c}^{\mathbf{V}(z_0+\varepsilon y),\gamma}$ より,

$$c_\varepsilon \leq \varepsilon^N \left(\inf_{x\in\mathbb{R}^N} \rho(\mathbf{V}(x);\gamma) + o(1)\right) \quad \text{as } \varepsilon \to +0$$

を得る. さらに, $(\mathrm{C1})_\gamma$ と (3) より, 十分小さい ε に対して

$$\tilde{c}^{\mathbf{V}(z_0+\varepsilon y),\gamma} < \rho(\mathbf{V}_\infty;\gamma) \tag{4}$$

が成り立つ. (4) より, $(\tilde{\mathcal{P}}^{\mathbf{V}(z_0+\varepsilon y),\gamma})$ の ground state $\mathbf{w}$ が存在する (Pomponio [3] の議論を参照). $|\mathbf{w}| = (|w_1|,|w_2|,|w_3|)$ も $(\tilde{\mathcal{P}}^{\mathbf{V}(z_0+\varepsilon y),\gamma})$ の ground state になる. したがって $(\mathcal{P}_\varepsilon)$ の非負の ground state が存在する. □

3.2 主結果 2 と 3 の証明の概略

主結果 2 と 3 で共通に示せることを抜き出しておく. Osada [2] では記載していないが, 次の補題が成り立つ.

補題 1. *(V1),(V2),(C1)*$_\gamma$ を仮定する. $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^\infty \subset (0,\infty)$ を $\varepsilon_n \to 0$ $(n\to\infty)$ となる数列とし, $\mathbf{u}_n$ を $(\mathcal{P}_{\varepsilon_n})$ の非負の *ground state* とする. さらに $x_{j,n}$ を $u_{j,n}$ の最大点とする. このとき, 部分列をとれば, ある $l_0 \in \{1,2,3\}$ と $x_{l_0,0} \in \mathbb{R}^N$ と $\mathbf{U}^{(l_0)} = (U_1^{(l_0)}, U_2^{(l_0)}, U_3^{(l_0)}) \in \mathbb{H}$ が存在して:

(0) $u_{j,n}(x_{l_0,n}+\varepsilon_n y) \rightharpoonup U_j^{(l_0)}(y)$ *weakly in* $H^1(\mathbb{R}^N)$ $(j=1,2,3)$, $\quad U_{l_0}^{(l_0)} \neq 0$.

(1) $\{x_{l_0,n}\}_{n=1}^{\infty}$ は有界.

(2) 以下が成り立つ:

$$c_\varepsilon = \varepsilon^N \left(\inf_{x\in\mathbb{R}^N} \rho(\mathbf{V}(x);\gamma) + o(1) \right) \quad \textit{as } \varepsilon \to +0.$$

(3) 以下が成り立つ:

$$\begin{aligned}
&x_{l_0,n} \to x_{l_0,0},\\
&\inf_{x\in\mathbb{R}^N} \rho(\mathbf{V}(x);\gamma) = \rho(\mathbf{V}(x_{l_0,0});\gamma),\\
&u_{j,n}(x_{l_0,n}+\varepsilon_n y) \to U_j^{(l_0)}(y) \quad \textit{in } H^1(\mathbb{R}^N)\ (j=1,2,3),\\
&\mathbf{U}^{(l_0)} \text{ は } (\tilde{\mathcal{P}}^{\mathbf{V}(x_{l_0,0}),\gamma}) \text{ の } \textit{ground state}.
\end{aligned}$$

補題 1 の証明の概略. $\mathbf{U}_n^{(l)}(y) := \mathbf{u}_n(x_{l,n}+\varepsilon_n y)$ $(l=1,2,3)$ とおく. このとき $\{\mathbf{U}_n^{(l)}\}_{n=1}^{\infty}$ は $\mathbb{H}$ で有界になるので, 部分列をとれば, ある $\mathbf{U}^{(l)} \in \mathbb{H}$ が存在して, $\mathbf{U}_n^{(l)} \rightharpoonup \mathbf{U}^{(l)}$ weakly in $\mathbb{H}$ となる.

(0)　このとき $V_j \in C^1(\mathbb{R}^N)$ と $\mathbf{U}_n^{(l)}$ がみたす方程式と正則性から $U_{j,n}^{(l)} \in C^2(\mathbb{R}^N)$ かつ $U_{j,n}^{(l)} \to U_j^{(l)}$ in $C^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)$ となる. さらに $V_0 \le 2(U_{1,n}^{(1)}(0)+U_{2,n}^{(2)}(0)+U_{3,n}^{(3)}(0))^{p-1}+\gamma(U_{1,n}^{(1)}(0)+U_{2,n}^{(2)}(0)+U_{3,n}^{(3)}(0))$ が成り立つ. したがってある $l_0 \in \{1,2,3\}$ が存在して $U_{l_0}^{(l_0)} \neq 0$ となる.

(1)　$\sup_{n\in\mathbb{N}} |x_{l_0,n}| = \infty$ とする. 部分列をとれば $|x_{l_0,n}| \to \infty$ となる. このとき $\mathbf{U}^{(l_0)} \neq (0,0,0)$ に注意すると

$$\inf_{x\in\mathbb{R}^N} \rho(\mathbf{V}(x);\gamma) \ge \liminf_{n\to\infty} \frac{c_{\varepsilon_n}}{\varepsilon_n^N} = \liminf_{n\to\infty} \tilde{I}^{\mathbf{V}(x_{l_0,n}+\varepsilon_n y),\gamma}(\mathbf{U}_n^{(l_0)}) \ge \tilde{I}^{\mathbf{V}_\infty,\gamma}(\mathbf{U}^{(l_0)}) \ge \rho(\mathbf{V}_\infty;\gamma).$$

これは $(\mathrm{C1})_\gamma$ に反する.

(2),(3)　(1) より部分列をとれば, ある $x_{l_0,0} \in \mathbb{R}^N$ が存在して $x_{l_0,n} \to x_{l_0,0}$ となる. (1) と同様にして

$$\begin{aligned}
\inf_{x\in\mathbb{R}^N} \rho(\mathbf{V}(x);\gamma) &\ge \liminf_{n\to\infty} \frac{c_{\varepsilon_n}}{\varepsilon_n^N} = \liminf_{n\to\infty} \tilde{I}^{\mathbf{V}(x_{l_0,n}+\varepsilon_n y),\gamma}(\mathbf{U}_n^{(l_0)})\\
&\ge \tilde{I}^{\mathbf{V}(x_{l_0,0}),\gamma}(\mathbf{U}^{(l_0)}) \ge \rho(\mathbf{V}(x_{l_0,0});\gamma) \ge \inf_{x\in\mathbb{R}^N} \rho(\mathbf{V}(x);\gamma)
\end{aligned}$$

を得る. このことから次が従う:

$$\begin{aligned}
&c_\varepsilon = \varepsilon^N \left(\inf_{x\in\mathbb{R}^N} \rho(\mathbf{V}(x);\gamma) + o(1) \right) \quad \text{as } \varepsilon \to +0, \quad \inf_{x\in\mathbb{R}^N} \rho(\mathbf{V}(x);\gamma) = \rho(\mathbf{V}(x_{l_0,0});\gamma),\\
&\mathbf{U}^{(l_0)} \text{ は } (\tilde{\mathcal{P}}^{\mathbf{V}(x_{l_0,0}),\gamma}) \text{ の ground state}, \quad U_{j,n}^{(l_0)} \to U_j^{(l_0)} \text{ in } H^1(\mathbb{R}^N).
\end{aligned}$$

□

主結果 2 の証明の概略. $\mathbf{U}_n^{(l)}(y) := \mathbf{u}_n(x_{l,n}+\varepsilon_n y)$ とおく. このとき $\{\mathbf{U}_n^{(l)}\}_{n=1}^{\infty}$ は $\mathbb{H}$ で有界になるので, 部分列をとれば, ある $\mathbf{U}^{(l)} \in \mathbb{H}$ が存在して, $\mathbf{U}_n^{(l)} \rightharpoonup \mathbf{U}^{(l)}$ weakly in $\mathbb{H}$ となる. このとき補

題 1 より, 部分列をとれば, ある $l_0 \in \{1,2,3\}$ と $x_{l_0,0} \in \mathbb{R}^N$ が存在して, 次が成り立つ:

$$U_{l_0}^{(l_0)} \neq 0, \quad \inf_{x\in\mathbb{R}^N} \rho(\mathbf{V}(x);\gamma) = \rho(\mathbf{V}(x_{l_0,0});\gamma),$$
$$\mathbf{U}^{(l_0)} \text{ は } (\tilde{\mathcal{P}}^{\mathbf{V}(x_{l_0,0}),\gamma}) \text{ の ground state.}$$

(Step 1) $\mathbf{U}^{(l_0)}$ は vector.
もし $\mathbf{U}^{(l_0)}$ が scalar だとすると,

$$\inf_{x\in\mathbb{R}^N} \rho(\mathbf{V}(x);\gamma) = \rho(\mathbf{V}(x_{l_0,0});\gamma) = \tilde{I}^{\mathbf{V}(x_{l_0,0}),\gamma}(\mathbf{U}^{(l_0)}) \geq \min_{j=1,2,3} c_1^{V_j(x_{l_0,0})} \geq \min_{j=1,2,3} c_1^{V_{j,0}}.$$

これは $(\mathrm{C2})_\gamma$ に反する.

(Step 2) 任意の $l = 1,2,3$ に対して $\mathbf{U}^{(l)}$ は vector.
もし $\mathbf{U}^{(k_0)} = (0,0,0)$ となる $k_0 \in \{1,2,3\}$ が存在すると, $U_{k_0}^{(l)} = 0$ $(\forall l \in \{1,2,3\})$. 特に $U_{k_0}^{(l_0)} = 0$. これは $\mathbf{U}^{(l_0)}$ が vector であることに反する. また, (Step 1) と同様に, $\mathbf{U}^{(l)}$ が scalar になるような $l \in \{1,2,3\}$ は存在しない.

(1) **(Step 3)** $\sup_{n\in\mathbb{N}} |x_{l,n}| < \infty$ $(\forall l = 1,2,3)$.
(Step 2) より, $\mathbf{U}^{(l)} \neq (0,0,0)$ $(\forall l = 1,2,3)$. 補題 1 (1) と同様に, $\sup_{n\in\mathbb{N}} |x_{l,n}| < \infty$ $(\forall l = 1,2,3)$ が従う.

(2) は補題 1 (2) から従う.

(3) 補題 1 より, 部分列をとれば, 任意の $l = 1,2,3$ に対して, ある $x_{l,0} \in \mathbb{R}^N$ が存在して, 次が成り立つ:

$$x_{l,n} \to x_{l,0}, \quad c_\varepsilon = \varepsilon^N \left(\inf_{x\in\mathbb{R}^N} \rho(\mathbf{V}(x);\gamma) + o(1) \right) \quad \text{as } \varepsilon \to +0, \quad \inf_{x\in\mathbb{R}^N} \rho(\mathbf{V}(x);\gamma) = \rho(\mathbf{V}(x_{l,0});\gamma),$$
$$\mathbf{U}^{(l)} \text{ は } (\tilde{\mathcal{P}}^{\mathbf{V}(x_{l,0}),\gamma}) \text{ の ground state}, \quad U_{j,n}^{(l)} \to U_j^{(l)} \text{ in } H^1(\mathbb{R}^N).$$

(Step 4) $\sup_{n\in\mathbb{N}} |x_{j,n} - x_{k,n}|/\varepsilon_n < \infty$ $(j \neq k)$.
ある $j,k \in \{1,2,3\}$ が存在して, $\sup_{n\in\mathbb{N}} |x_{j,n} - x_{k,n}|/\varepsilon_n = \infty$ とすると, 部分列をとれば, $|x_{j,n} - x_{k,n}|/\varepsilon_n \to \infty$ となる. このとき,

$$\inf_{x\in\mathbb{R}^N} \rho(\mathbf{V}(x);\gamma) \geq \liminf_{n\to\infty} \frac{c_{\varepsilon_n}}{\varepsilon_n^N} = \liminf_{n\to\infty} \tilde{I}^{\mathbf{V}(x_{j,n}+\varepsilon_n y),\gamma}(\mathbf{U}_n^{(j)}) \geq \min_{j=1,2,3} c_1^{V_{j,0}}$$

となる. これは $(\mathrm{C2})_\gamma$ に反する. (Step 4) より $x_{1,0} = x_{2,0} = x_{3,0} =: x_0$ が従う. $W_{j,0} := U_j^{(j)}$, $\mathbf{W}_0 := (W_{1,0}, W_{2,0}, W_{3,0})$ とおく. このとき $\mathbf{U}^{(l)}$ がみたす方程式の情報から $\mathbf{W}_0$ は正値, 球対称, 狭義単調減少になり, そのことから $(\tilde{\mathcal{P}}^{V(x_0),\gamma})$ の ground state になり, $|x_{j,n} - x_{k,n}|/\varepsilon_n \to 0$ が従う.

(4) は省略. □

主結果 3 の証明の概略. $\mathbf{U}_n^{(l)}(y) := \mathbf{u}_n(x_{l,n} + \varepsilon_n y)$ とおく. このとき $\{\mathbf{U}_n^{(l)}\}_{n=1}^{\infty}$ は $\mathbb{H}$ で有界になるので, 部分列をとれば, ある $\mathbf{U}^{(l)} \in \mathbb{H}$ が存在して, $\mathbf{U}_n^{(l)} \rightharpoonup \mathbf{U}^{(l)}$ weakly in $\mathbb{H}$ となる.
補題 1 と $(\mathrm{C3})_\gamma$ より, 部分列をとれば, $l_0 \in \{1,2,3\}$ と $x_{l_0,0} \in \mathbb{R}^N$ が存在して

$$
\begin{aligned}
&c_\varepsilon = \varepsilon^N \left(\inf_{x \in \mathbb{R}^N} \rho(\mathbf{V}(x);\gamma) + o(1) \right) = \varepsilon^N \left(\min_{j=1,2,3} c_1^{V_{j,0}} + o(1) \right) \quad \text{as } \varepsilon \to +0, \\
&x_{l_0,n} \to x_{l_0,0}, \quad \rho(\mathbf{V}(x_{l_0,0});\gamma) = \inf_{x \in \mathbb{R}^N} \rho(\mathbf{V}(x);\gamma), \\
&\mathbf{U}^{(l_0)} \text{ は } (\tilde{\mathcal{P}}^{V(x_{l_0,0}),\gamma}) \text{ の ground state}, \quad U_{j,n}^{(l_0)} \to U_j^{(l_0)} \text{ in } H^1(\mathbb{R}^N).
\end{aligned}
$$

$(\mathrm{C3})_\gamma$ と $(\mathrm{C3})_{\gamma'}$ より,

$$
\inf_{x \in \mathbb{R}^N} \rho(\mathbf{V}(x);\gamma) = \inf_{x \in \mathbb{R}^N} \rho(\mathbf{V}(x);\gamma').
$$

もし $\mathbf{U}^{(l_0)}$ が vector であると仮定すると,

$$
\inf_{x \in \mathbb{R}^N} \rho(\mathbf{V}(x);\gamma) > \inf_{x \in \mathbb{R}^N} \rho(\mathbf{V}(x);\gamma')
$$

となってしまい矛盾する. したがって $\mathbf{U}^{(l_0)}$ は scalar となり, $U_{l_0,n}^{(l_0)} \to U_{l_0}^{(l_0)}$, $U_{j,n}^{(l_0)} \to 0$ $(j \neq l_0)$ が従う. したがって $U_{j,n}^{(j)} \to 0$ $(j \neq l_0)$. $\tilde{I}^{\mathbf{V}(x_{l_0,n}+\varepsilon_n y),\gamma}(\mathbf{U}_n^{(l_0)})$ の上下からの評価より $V_{l_0}(x_{l_0,0}) = V_{l_0,0} = V_0 := \min_{j=1,2,3} V_{j,0}$ かつ $\min_{j=1,2,3} c_1^{V_{j,0}} = c_1^{V_{l_0,0}}$ が従う. したがって

$$
c_\varepsilon = \varepsilon^N \left(\min_{j=1,2,3} c_1^{V_{j,0}} + o(1) \right) = \varepsilon^N \left(c_1^{V_{l_0,0}} + o(1) \right) \quad \text{as } \varepsilon \to +0.
$$

また $U_{l_0}^{(l_0)}$ は

$$
\begin{cases}
-\Delta U + V_0 U = U^p, \quad U > 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^N, \\
U(0) = \max_{x \in \mathbb{R}^N} U(x), \quad U(x) \to 0 \quad \text{as } |x| \to \infty
\end{cases}
$$

をみたすので解の一意性より $U_{l_0}^{(l_0)} = W$ が従う. $\square$

参考文献

[1] T.-C. Lin and J. Wei: Spikes in two-component systems of nonlinear Schrödinger equations with trapping potentials. J. Differential Equations, **229** (2006), 538–569.

[2] Y. Osada: A singular perturbation problem for a nonlinear Schrödinger system with three wave interaction. (2022), submitted.

[3] A. Pomponio: Ground states for a system of nonlinear Schrödinger equations with three wave interaction. J. Math. Phys., **51** (2010), 093513, 20 pp.

[4] P. H. Rabinowitz: On a class of nonlinear Schrödinger equations. Z. Angew. Math. Phys., **43** (1992), 270–291.

[5] X. Wang: On concentration of positive bound states of nonlinear Schrödinger equations. Comm. Math. Phys., **153** (1993), 229–244.